

2M renforcé

Puissances, racines, exponentielles et logarithmes

Sarah Delmonico
Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2026-2027

Table des matières

1	Puissances et racines	2
1.1	Puissances à exposant entier positif	2
1.2	Puissances à exposant entier négatif	3
1.3	Propriétés des puissances	4
1.4	La notation scientifique	5
1.5	Racines	7
1.6	Puissances à exposant rationnel	11
1.7	Puissances à exposant réel	13
2	Exponentielles	14
2.1	Introduction	14
2.2	Définition des fonctions exponentielles	15
2.3	Représentation graphique et propriétés	16
2.4	Équations exponentielles	17
3	Logarithmes	19
3.1	Définition	19
3.2	Propriétés	20
3.3	Retour sur les équations exponentielles	22
3.4	Représentation graphique	23
3.5	Équations logarithmiques	24
4	Applications des exponentielles et des logarithmes	26
4.1	Les intérêts composés	26
4.2	Processus de croissance et de décroissance	28
4.3	Décomposition d'une substance radioactive	30
4.4	pH	31
4.5	Échelle de Richter	31
5	Exercices	32
5.1	Puissances et racines	32
5.2	Exponentielles	42
5.3	Logarithmes	45
5.4	Applications des exponentielles et des logarithmes	49
6	Solutions	52
6.1	Réponses - Puissances et racines	52
6.2	Réponses - Exponentielles	57
6.3	Réponses - Logarithmes	58
6.4	Réponses - Applications	60

1 Puissances et racines

1.1 Puissances à exposant entier positif

Définition 1.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On appelle **puissance n -ième de a** le nombre :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

qui se lit **a à la puissance n** .

Le nombre a s'appelle la **base** de la puissance et le nombre n s'appelle l'**exposant**.

Exemples : Calculer les expressions ci-dessous.

a) $9000^2 =$

d) $17^1 =$

b) $(0,1)^3 =$

e) $0^8 =$

c) $1^{17} =$

f) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 =$

Proposition 1.1.

Les puissances à exposant pair sont forcément positives.

Les puissances à exposant impair ont le même signe que la base.

Exemples :

a) $(-2)^4 =$

c) $(+2)^4 =$

b) $(-2)^5 =$

d) $(+2)^5 =$

Remarque : Il faut faire attention à la priorité des opérations.

a) $(-5)^4 =$

c) $2 \cdot 3^2 =$

e) $\left(\frac{12}{11}\right)^2 =$

g) $10^{2^3} =$

b) $-5^4 =$

d) $(2 \cdot 3)^2 =$

f) $\frac{12^2}{11} =$

h) $(10^2)^3 =$

Quelques puissances à connaître et reconnaître :a) Les **carrés parfaits** :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x^2														

b) Les **cubes** et les puissances 4 :

x	2	3	4	5
x^3				
x^4				

c) Les **puissances de 2** :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n									

Remarque : La calculatrice a des touches qui permettent de calculer les puissances. À essayer...

ex. 1.1 à 1.7

1.2 Puissances à exposant entier négatifIl est possible de généraliser la notion de **puissance à des exposants entiers négatifs ou nuls**.**Définition 1.2** Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

$$a^0 = 1$$

et

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Attention : 0^n n'est pas défini si $n \leq 0$.**Exemples :** Calculer les expressions ci-dessous.

a) $2^{-3} =$

e) $4^0 =$

b) $3^{-2} =$

f) $0^4 =$

c) $(-2)^3 =$

g) $(0,1)^{-3} =$

d) $(-3)^2 =$

h) $(0,2)^{-2} =$

ex. 1.8 à 1.10

1.3 Propriétés des puissances

Proposition 1.2. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $a, b \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$$

Exemples : Utiliser les propriétés pour calculer $\left(\frac{3}{10}\right)^4$, $\left(\frac{3}{10}\right)^{-1}$ et $\left(\frac{3}{10}\right)^{-4}$.

ex. 1.11

Théorème 1.3. Pour $m, n \in \mathbb{Z}$ et $a, b \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$a) a^0 = 1$$

$$g) 0^n = 0 \text{ si } n \neq 0$$

$$b) a^1 = a$$

$$h) 1^n = 1$$

$$c) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$i) (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$d) (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$j) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$e) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$k) \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

$$f) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$l) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$$

Une partie des preuves seront vues en exercice.

Exemples : Calculer en utilisant les propriétés.

$$a) 12^{-15} \cdot 12^{17} =$$

$$c) \frac{1}{8^{-1}} =$$

$$b) (0,0001)^{-2} =$$

$$d) \frac{3^{11} \cdot 2^{11}}{(18^3)^4 \cdot 3^{-11}} =$$

e) $(-2a)^5 \cdot (5a^3)^5 =$

g) $\frac{1}{14^{-2}} =$

f) $17^8 : 17^9 =$

h) $\frac{35^4 \cdot (2a^2)^3 \cdot 2}{(7a)^4} =$

Remarques :

- Il n'y a pas de propriétés pour simplifier une addition ou une soustraction de puissances.

$$2^2 + 1^2 =$$

$$(2 + 1)^2 =$$

À de rares exceptions près, si $x \neq 1$, on a $(a + b)^x \neq a^x + b^x$ et $(a - b)^x \neq a^x - b^x$

- De même, on doit se méfier de la distributivité.

$$10(3 + 5)^2 =$$

$$(10 \cdot 3 + 10 \cdot 5)^2 =$$

En effet, on a $k(a + b)^x \neq (ka + kb)^x = k^x(a + b)^x$

ex. 1.12 à 1.22

1.4 La notation scientifique

Définition 1.3 Écrire un nombre positif en **notation scientifique** signifie que l'on va l'écrire sous la forme :

$$b \cdot 10^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \text{ et } 1 \leq |b| < 10$$

La notation scientifique est très utile en chimie ou en physique pour écrire les très petits ou les très grands nombres. Par exemple, il est beaucoup plus agréable d'exprimer la masse d'un atome d'hydrogène par $1,7 \cdot 10^{-24}$ g que par 0,000'000'000'000'000'000'000'001'7 g.

Exemples : Écrire les nombres ou les expressions ci-dessous en notation scientifique.

a) $328 =$

d) $5 =$

b) $1'140'000'000 =$

e) $9109,5 \cdot 10^{-33} =$

c) $0,0045 =$

f) $10 =$

Cette écriture permet aussi de faire les calculs facilement en utilisant les propriétés des puissances.

Exemples : Répondre en notation scientifique.

a) $(5 \cdot 10^7) \cdot (9 \cdot 10^6) =$

c) $(1,2 \cdot 10^{-7})^2 =$

b) $\frac{2,1 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{-5}} =$

d) $(5,1 \cdot 10^7) + (9 \cdot 10^6) =$

Remarque : La calculatrice a une touche qui permet de calculer en notation scientifique. À essayer ...

La notation scientifique est particulièrement pratique pour les changements d'unité.

Exemples :

A) Répondre en notation scientifique.

a) $4,53 \cdot 10^9 \text{ mm} = \dots\dots\dots \text{ m}$

b) $1,9 \cdot 10^5 \text{ kg} = \dots\dots\dots \text{ mg}$

B) Trouver l'unité.

a) $8 \cdot 10^{-4} \text{ hl} = 8 \dots\dots\dots$

c) $7 \cdot 10^{-6} \text{ MW} = 7 \dots\dots\dots$

b) $2,2 \cdot 10^9 \mu\text{m} = 2,2 \dots\dots\dots$

d) $2,5 \cdot 10^5 \text{ cm}^3 = 2,5 \dots\dots\dots$

ex. 1.23 à 1.26

1.5 Racines

Définition 1.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si n est *pair* :

La racine n -ième de x est le nombre réel *positif* y défini par :

$$y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x \text{ et } y \geq 0$$

Comme y^n est toujours positif si n est pair, $\sqrt[n]{x}$ n'est définie que si x est *positif*.

- Si n est *impair* :

La racine n -ième de x est le nombre réel y défini par :

$$y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x$$

Elle est donc définie pour tout x .

Si x est *positif*, elle sera *positive*. Si x est *négatif*, elle sera *négative*.

Notation : On note généralement $\sqrt{x}$ à la place de $\sqrt[2]{x}$ et on l'appelle **racine carrée**.

$\sqrt[3]{x}$ se lit **racine cubique**.

Exemples :

a) $\sqrt{64} =$ car

b) $\sqrt{-64} =$ car

c) $\sqrt[3]{64} =$ car

d) $\sqrt[3]{-64} =$ car

e) $\sqrt[1]{64} =$ car

f) $\sqrt[6]{64} =$ car

g) $\sqrt[2]{1'000'000} =$ car

h) $\sqrt[3]{1'000'000} =$ car

i) $\sqrt[4]{0,0001} =$ car

j) $\sqrt{\frac{49}{81}} =$ car

k) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} =$ car

l) $\sqrt[3]{-0,027} =$ car

Remarque : La calculatrice a des touches qui permettent de calculer les racines. À essayer...

ex. 1.27 à 1.29

Historique

Au V^e av. J.-C., les Grecs ne connaissaient que les nombres rationnels $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire les nombres pouvant s'écrire sous forme de fraction.

Ils découvrent alors que la racine carrée de 2, la diagonale d'un carré de côté 1, ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers. Dès lors, une nouvelle catégorie de nombres apparaît : les irrationnels.

La racine d'un nombre naturel est soit un nombre naturel, soit un nombre irrationnel.

Exemples :

a) $\sqrt{0} =$

d) $\sqrt{3} =$

b) $\sqrt{1} =$

e) $\sqrt{4} =$

c) $\sqrt{2} =$

f) $\sqrt{5} =$

Propriétés des racines

Théorème 1.4. Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

a) $\sqrt[n]{a} = a$

c) $\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ si } b \neq 0$

d) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Les preuves seront vues en exercice.

Exemples :

a) $\sqrt[4]{7} =$

e) $\sqrt{\frac{1}{9}} =$

b) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 =$

f) $\sqrt[3]{125'000} =$

c) $\sqrt[7]{29^7} =$

g) $\sqrt{3^2 + 4^2} =$

d) $\sqrt{484} =$

h) $\sqrt{13^2 - 5^2} =$

Ces propriétés sont-elles valables si a est négatif? Chercher les situations qui pourraient poser problème.

Autres propriétés des racines

Théorème 1.5. Soit $a \in \mathbb{R}_+$, n et $p \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, alors :

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$$

$$\sqrt[pn]{a^{pm}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Preuve :

- Pour prouver que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, il faut montrer que $\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n = a^m$.

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{nm} = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m = [a]^m = a^m$$

- Pour prouver que $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$, il faut montrer que $\left[\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right]^{np} = a$.

$$\left[\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right]^{np} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^n\right]^p = \left[\sqrt[p]{a}\right]^p = a$$

- Pour prouver que $\sqrt[pn]{a^{pm}} = \sqrt[n]{a^m}$, il faut montrer que $\left[\sqrt[pn]{a^{pm}}\right]^{pn} = a^{pm}$.

$$\left[\sqrt[pn]{a^{pm}}\right]^{pn} = \left[\left(\sqrt[pn]{a^{pm}}\right)^n\right]^p = [a^m]^p = a^{pm}$$

#

Exemples :

a) $\sqrt[3]{27^4} =$

e) $\sqrt[10]{2^{15}} =$

b) $\sqrt[6]{64^7} =$

f) $\sqrt[6]{8} =$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{a}} =$

g) $\sqrt[5]{32^4} =$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} =$

h) $\sqrt{\sqrt[3]{25}} =$

Remarque : Ces propriétés sont aussi vraies pour $m \in \mathbb{Z}$ à condition que $a \neq 0$.

ex. 1.30 à 1.32

Extraction d'un entier d'une racine

En général, les réponses sous forme de racines doivent être simplifiées au maximum. On écrira $10\sqrt{7}$ plutôt que $\sqrt{700}$. Cela veut dire que l'on sort le plus grand entier possible de la racine de la manière suivante :

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a \cdot \sqrt{b}, \text{ pour } a, b \geq 0$$

Il faut donc d'abord décomposer le nombre sous la racine en produit, de manière à repérer les facteurs au carré.

On peut procéder de manière similaire pour les autres racines.

Exemples :

a) $\sqrt{72} =$

b) $\sqrt{54} =$

c) $\sqrt[3]{40} =$

d) $\sqrt{45} - \sqrt{20} =$

e) $\frac{\sqrt{700} + \sqrt{28}}{12} =$

ex. 1.33 à 1.35

Rationalisation des dénominateurs

En général, on ne laisse pas de racine au dénominateur ni de fraction dans une racine.

Pour enlever une racine carrée du dénominateur, on amplifie la fraction par cette racine.

a) $\sqrt{\frac{1}{2}} =$

b) $\frac{21}{\sqrt{7}} =$

Pour enlever « $a \pm \sqrt{b}$ » du dénominateur, on amplifie la fraction par son conjugué « $a \mp \sqrt{b}$ ».

a) $\frac{1}{3 + \sqrt{2}} =$

b) $\frac{21}{4 - \sqrt{7}} =$

Pour enlever $\sqrt[n]{a^p}$ du dénominateur, on amplifie la fraction de manière à obtenir $\sqrt[n]{a^n}$.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} =$

b) $\frac{4}{\sqrt[5]{1000}} =$

ex. 1.36 à 1.38

Regroupement sous une même racine

On ne laisse pas de multiplication de racines.

Pour regrouper ces racines, il faut les transformer pour qu'elles aient le même indice n .

a) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[5]{2} =$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} =$

On ne laisse pas de racine dans une racine.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} =$

b) $\sqrt{3\sqrt{5}} =$

ex. 1.39 à 1.43

1.6 Puissances à exposant rationnel

L'objectif est de définir $a^{p/q}$ pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, en gardant les propriétés déjà étudiées des puissances.

Observations : Expliquer chaque étape de ces raisonnements :

$$(a^{1/2})^2 = a^{1/2 \cdot 2} = a^1 = a \quad \text{donc} \quad a^{1/2} = \sqrt[2]{a}$$

$$(a^{1/n})^n = a^{1/n \cdot n} = a^1 = a \quad \text{donc} \quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$(a^{p/q})^q = a^{p/q \cdot q} = a^p \quad \text{donc} \quad a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

On définit donc les **puissances à exposant rationnel** comme étant des racines :

Définition 1.5 Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Exemples :

a) $1000^{1/3} =$

c) $125^{-2/3} =$

b) $1000^{2/6} =$

d) $625^{0,25} =$

Vérifier les réponses ci-dessus à l'aide des touches puissances de la calculatrice.

Remarques :

- Pour que cette définition ait un sens, il faut s'assurer qu'elle ne dépend pas de la fraction choisie pour représenter l'exposant avec cette définition. C'est bien le cas si $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$a^{\frac{k \cdot p}{k \cdot q}} = \sqrt[kp]{a^{kq}} = \sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{p}{q}} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, k, q \in \mathbb{N}^* \text{ et } p \in \mathbb{Z}$$

- Peut-on dire que $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} =$? Comparer à $(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} =$. Que peut-on constater ?

ex. 1.44 à 1.49

Propriétés des puissances à exposant rationnel

Les propriétés des puissances à exposant rationnel sont les mêmes que celles des puissances à exposant entier :

Théorème 1.6. Soit $m, n \in \mathbb{Q}$ et $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

d) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

b) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

c) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

f) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$

Exemples :

a) $a^{2/7} \cdot a^{1/4} =$

d) $3^{1/3} \cdot 9^{1/3} =$

b) $(4^{1/3})^{15/2} =$

e) $\left(\frac{4}{25}\right)^{-1/2} =$

c) $(8a)^{1/3} =$

f) $\frac{a^{1/3}}{a^{-2/5}} =$

ex. 1.50 à 1.51

1.7 Puissances à exposant réel

Nous avons défini jusqu’ici a^x lorsque x est rationnel et a un réel strictement positif.

Comment faire pour calculer 5^π ou pour tout autre exposant irrationnel ?

Nous ne pouvons pas le faire de manière rigoureuse dans le cadre de ce cours, mais l’idée est de s’approcher de plus en plus de l’exposant par des nombres rationnels :

$\pi \simeq 3,14159$

x	3	3,1	3,14	3,141	...	π	...			3,2	4
5^x	125	146,83				?				172,47	625

Que vaut 5^π d’après la calculatrice ?

ex. 1.52

2 Exponentielles

2.1 Introduction

« Quand vous recevrez cette lettre, versez-moi CHF 10.– puis recopiez la lettre 10 fois et envoyez-la à 10 de vos amis. Ainsi, vous gagnerez CHF 100.– après avoir donné seulement CHF 10. – . Ne brisez pas la chaîne, car sinon le malheur s’abattra sur vous ! »

Imaginons que toutes les personnes qui reçoivent cette lettre en renvoient 10 le jour même et que le courrier ne mette qu’un jour pour arriver à ses destinataires, compléter le tableau ci-dessous.

nb de jours depuis le début de la chaîne	nb de lettres envoyées ce jour-là
0	1
1	
2	
3	
4	
x	

Au bout de combien de temps, le nombre de lettres envoyées ce jour-là sera-t-il plus grand que la population mondiale (environ 8 milliards de personnes) ?

Les **problèmes de croissance exponentielle** sont des problèmes où **la quantité de départ est multipliée à chaque étape par une valeur constante**. C’est le cas, par exemple, avec les calculs d’intérêts composés ou la propagation d’une épidémie.

Pour les résoudre, nous allons avoir besoin de nouvelles fonctions : les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques.

ex. 2.1

2.2 Définition des fonctions exponentielles

Définition 2.6 Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle **exponentielle de base a** la fonction :

$$\begin{array}{l} \exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \\ \mathbb{R}_+^* \\ \exp_a(x) = a^x \end{array}$$

Exemples :

a) Compléter l'expression de la fonction :

$$\exp_2(x) =$$

$$\exp_{1,3}(x) =$$

$$\exp_{1/5}(x) =$$

b) Calculer :

$$\exp_4(2) =$$

$$\exp_4\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\exp_4(-1) =$$

$$\exp_4\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

Remarque : Pourquoi $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$?

- $a > 0$ pour éviter les problèmes du type " $(-1)^{1/2}$ ", car $(-1)^{1/2} =$
- $a \neq 1$ car $1^x =$. C'est une fonction , elle a donc des propriétés différentes des autres fonctions exponentielles.
- $a \neq 0$ car $0^x =$ si $x > 0$ et est non défini si $x \leq 0$.

Bases privilégiées

Les calculatrices sont munies des touches exponentielles $10^x = \exp_{10}$ et $e^x = \exp_e$.

Le nombre e (pour Euler¹) est un nombre irrationnel, très utilisé en mathématiques, au même titre que π .

$$e \simeq 2,71828183$$

Exemples : Calculer à l'aide de la calculatrice :

a) $e^3 \simeq$

b) $\sqrt{e} \simeq$

c) $\sqrt[10]{e^3} \simeq$

Remarque : Lorsqu'on note **exp** sans précision de la base, il s'agit de la base e .

Une des propriétés remarquables de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est qu'elle est la seule fonction à être sa propre dérivée.

$$(e^x)' = e^x$$

ex. 2.2 à 2.5

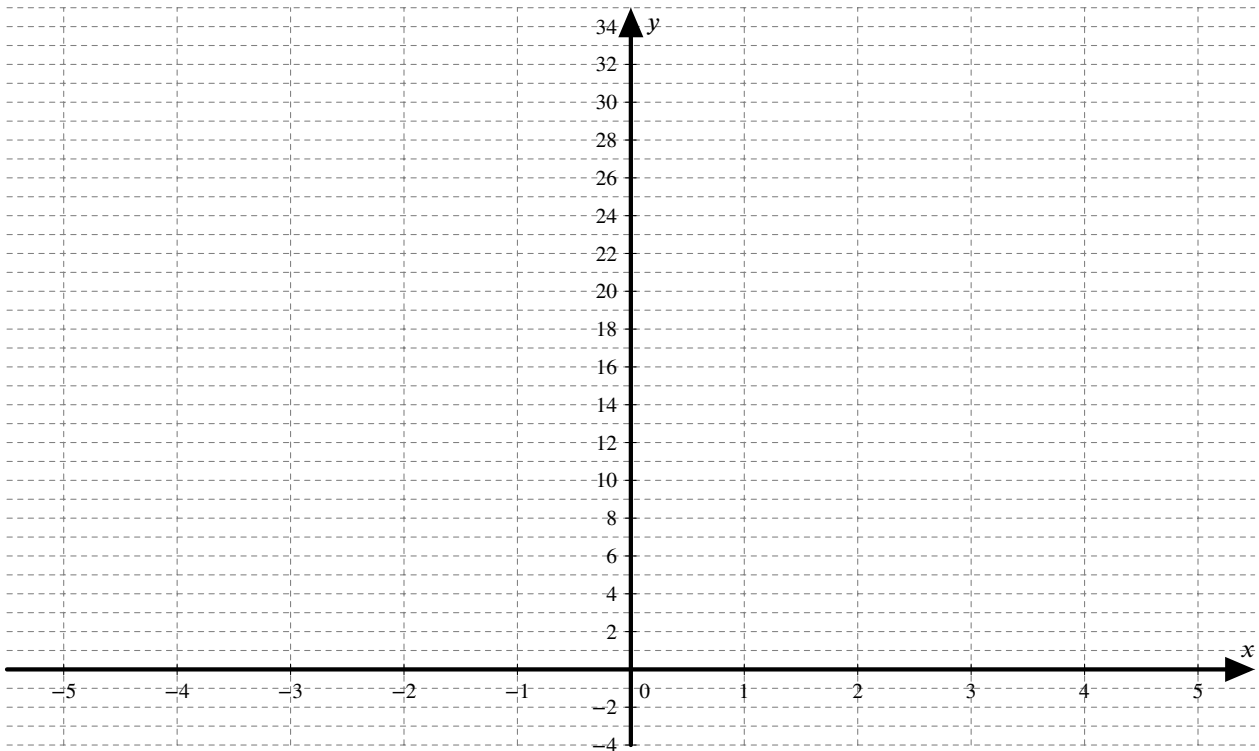
1. Léonard Euler, mathématicien suisse (1707-1783)

2.3 Représentation graphique et propriétés

Représenter les graphes des fonctions $\exp_2$ et $\exp_{1/2}$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\exp_2(x) = 2^x$									

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\exp_{1/2}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$									



Propriétés :

- Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction exponentielle $f(x) = \exp_a(x) = a^x$ est définie pour tout nombre réel x , donc $D_f = \mathbb{R}$.
- Son ordonnée à l'origine est toujours 1 car
- Elle n'a pas de zéros.
- Son tableau des signes est :
- Elle est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.

Théorème 2.1. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	(iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
(ii) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	(v) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
(iii) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	(vi) $a^x = a^y \iff x = y$

Rappel : En général, si $x \neq 1$: $(a+b)^x \neq a^x + b^x$ $(a-b)^x \neq a^x - b^x$ et $k(a+b)^x \neq (ka+kb)^x$.

Exemples :

a) $(3^x)^{x+1} =$

b) $\frac{7^3}{7^x} =$

c) $3 \cdot \frac{12^{x-1}}{4^{x-1}} =$

ex. 2.6 à 2.9

2.4 Équations exponentielles

Définition 2.7 Une **équation exponentielle** est une équation dans laquelle la variable apparaît en exposant.

Exemples :

a) $2^{2x+2} - 14 \cdot 2^x = 8$

b) $3^x = 9^{x-1}$

Pour résoudre une équation exponentielle, on observera s'il est possible de se ramener à une équation du type $a^x = a^y$, ce qui nous permettra d'utiliser $a^x = a^y \iff x = y$.

Exemples : Résoudre les équations :

a) $e^x = \frac{1}{\sqrt[5]{e^3}}$

c) $2^{4x^2-1} - \sqrt{2} = 0$

b) $3^x = 9^{x-1}$

d) $4 \cdot 2^x - 8 \cdot 4^{x+3} = 0$

ex. 2.10

Dans d'autres cas, il faut effectuer un changement de variable.

Exemples :

a) Résoudre l'équation $2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x = 4$.

b) Résoudre l'équation $9 \cdot 3^{-3x} - 10 \cdot 3^{-x} + 3^x = 0$.

ex. 2.11 à 2.13

3 Logarithmes

3.1 Définition

Certaines équations exponentielles « simples » peuvent être résolues de tête, mais d'autres non :

a) $10^x = 1'000'000$

b) $10^x = 2$

Par le passé, les solutions de telles équations étaient listées dans des livres appelés « tables logarithmiques ». Maintenant, la calculatrice nous permet de les trouver rapidement grâce aux touches **LOG** et **LN**.

Exemples : Les solutions des équations ci-dessus se trouvent en calculant :

a) $\text{Log}(1'000'000) =$

b) $\text{Log}(2) =$

Définition 3.8 Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle **logarithme en base a** la fonction réciproque de la fonction $\exp_a$:

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x = \log_a(y) \iff a^x = y$$

En d'autres termes, calculer $\log_a(y)$ c'est se demander $y = a^?$.

On a donc :

$$x \xrightleftharpoons[\log_a]{\exp_a} a^x \quad \text{et} \quad y \xrightleftharpoons[\exp_a]{\log_a} \log_a(y)$$

Exemples : Compléter :

a) $\log_3(81) =$

car

b) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) =$

car

c) $\log_7(1) =$

car

Remarque :

- On note **Log** ou **log** au lieu de $\log_{10}$. C'est le **logarithme en base dix** ou le **logarithme décimal**.
- On note **ln** au lieu de $\log_e$. C'est le **logarithme naturel** ou le **logarithme népérien**².

Exemples :

a) $\text{Log}(0,01) =$

b) $\ln(e^5) =$

ex. 3.1 à 3.8

2. John Néper, mathématicien britannique (1550-1617)

3.2 Propriétés

Théorème 3.1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in \mathbb{R}$.

$$(i) \log_a(a^x) = x$$

$$(v) a^{\log_a(y)} = y$$

$$(ii) \log_a(1) = 0$$

$$(vi) \log_a(a) = 1$$

$$(iii) \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$(vii) \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$(iv) \log_a(x^q) = q \log_a(x)$$

$$(viii) \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$(ix) \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\text{Log}(x)}{\text{Log}(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Preuve :

(i) par définition

$$(ii) a^0 = 1$$

$$(iii) a^{\log_a(x) + \log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = x \cdot y$$

$$(iv) a^{q \log_a(x)} = (a^{\log_a(x)})^q = x^q$$

(v) par définition

$$(vi) a^1 = a$$

$$(vii) a^{\log_a(x) - \log_a(y)} = \frac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}} = \frac{x}{y}$$

$$(viii) a^{-\log_a(x)} = \frac{1}{a^{\log_a(x)}} = \frac{1}{x}$$

$$(ix) b^{\log_b(a) \cdot \log_a(x)} = (b^{\log_b(a)})^{\log_a(x)} = a^{\log_a(x)} = x$$

$$\implies \log_b(a) \cdot \log_a(x) = \log_b(x) \implies \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Si $b = 10$, on obtient $\frac{\text{Log}(x)}{\text{Log}(a)}$ et si $b = e$, on obtient $\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

#

Exemples : Calculer sans calculatrice.

a) $\text{Log}(4) + 2 \text{Log}(5) =$

b) $\text{Log}(30) - \text{Log}(3) =$

La propriété (ix) de la page précédente est appelée **formule de changement de base**. Elle permet de calculer les logarithmes dans n'importe quelle base à l'aide des touches LN et LOG de la calculatrice.

Exemple : À l'aide de la calculatrice, calculer la valeur approximative.

$\log_2(5) =$

Remarques : Les propriétés des logarithmes se déduisent des propriétés des exponentielles.

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'un produit est la somme des exposants.
 $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ exprime la même propriété.
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'un quotient est la différence des exposants.
 $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ exprime la même propriété.
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'une puissance de puissance est le produit des exposants.
 $\log_a(x^q) = q \log_a(x)$ exprime la même propriété.
- Attention aux fausses propriétés :
Comparer $\text{Log}(1000)$ et $\text{Log}(100)$ avec $\text{Log}(1000 + 100)$ et $\text{Log}(1000 - 100)$.

ex. 3.9 à 3.12

3.3 Retour sur les équations exponentielles

Pour résoudre ces équations exponentielles, on observera s'il est possible de se ramener à une équation du type $a^x = y$, ce qui nous permettra "d'appliquer le $\log_a$ ", c'est-à-dire utiliser que $a^x = y \iff x = \log_a(y)$.

Exemple : Résoudre $3^{2x+6} = 7$.

Exemples : Résoudre.

a) $8 \cdot 10^{3x+1} + 7 = 167$

b) $e^{4-x} = 5e^x$

ex. 3.13 à 3.14

c) $3^{2x+1} = 2^{x-4}$

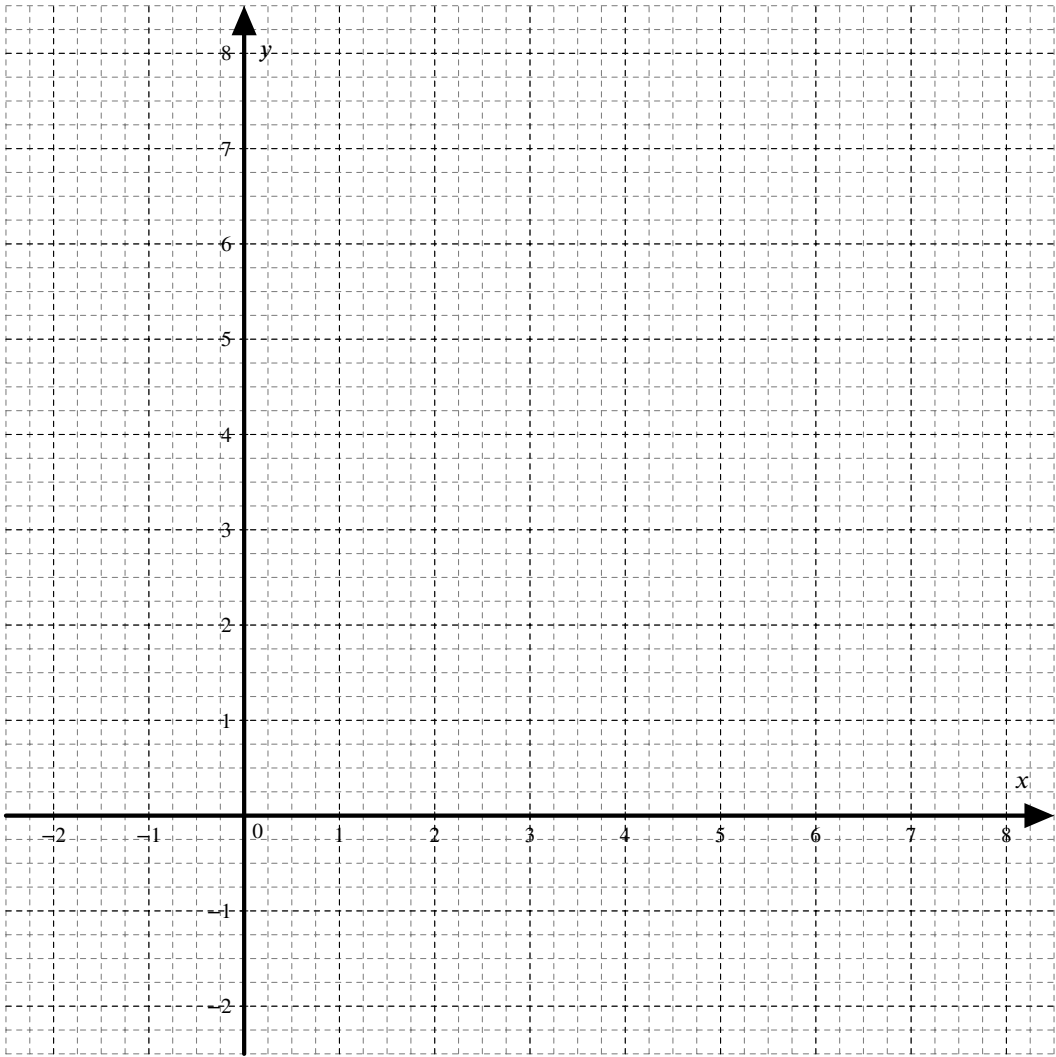
ex. 3.15 à 3.16

3.4 Représentation graphique

Représenter les graphes des fonctions $\exp_2$ et $\log_2$.

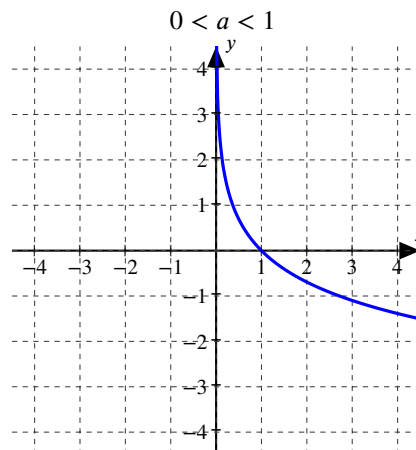
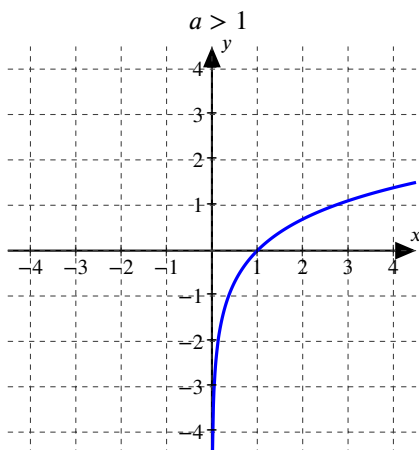
x	-2	-1	0	1	2	3
$\exp_2(x)$						

x	-1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\log_2(x)$													



- Comparer les deux graphes.
- Quel est l'ensemble de définition de la fonction $\log_a$? Pourquoi ?
- Quel est le zéro de la fonction $\log_a$? Pourquoi ?

- La fonction logarithme $\log_a$ est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.



- Son tableau des signes est :

3.5 Équations logarithmiques

Définition 3.9 Une **équation logarithmique** est une équation dans laquelle la variable apparaît dans un logarithme.

Pour résoudre ces équations logarithmiques, on observera s'il est possible de se ramener à une équation du type $\log_a(y) = x$, ce qui nous permettra "d'appliquer le $\exp_a$ ", c'est-à-dire utiliser que $x = \log_a(y) \iff a^x = y$. De même, si on a $\log_a(y) = \log_a(z)$, alors $y = z$.

Remarque : Il ne faut pas oublier de contrôler si les réponses obtenues ne posent pas de problème dans l'équation de départ. En effet, l'utilisation de certaines propriétés des logarithmes élargit l'ensemble de définition de l'équation. (voir exemple d ci-dessous)

Exemples : Résoudre les équations :

a) $\ln(8 + 4x) = 12$

c) $\log_x(81) = 4$

b) $3 \log_8(x) - 2 = 0$

d) $\text{Log}(x) + \text{Log}(x - 3) = 1$

ex. 3.17 à 3.19

Exemples : Résoudre les équations :

a) $\text{Log}(5 + x) = \text{Log}(4 - x) + 1$

b) $\log_2(3x - 4) + \log_2(10x - 4) = 2 \log_2(5x - 2)$

ex. 3.20 à 3.22

4 Applications des exponentielles et des logarithmes

4.1 Les intérêts composés

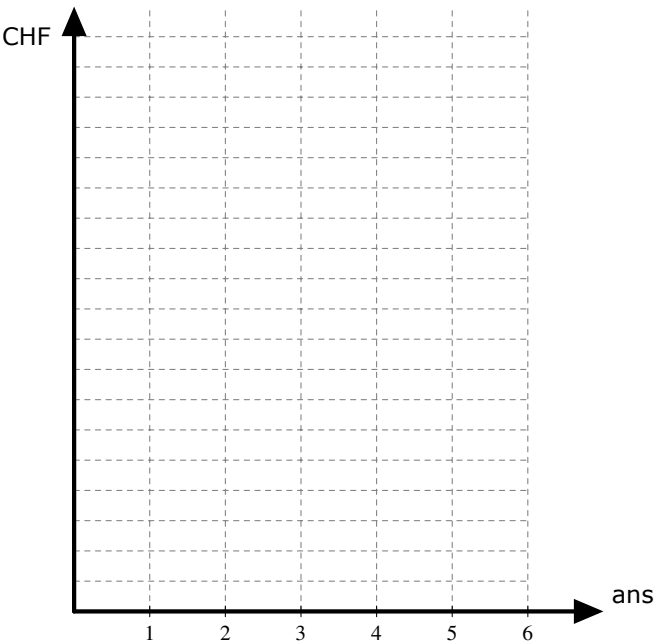
Au début de mes études, j’ai emprunté CHF 10’000.– avec taux annuel i de 10%. Je rembourserai cette somme et les intérêts à la fin de mon master dans 5 ans. Combien cela fera-t-il ?

On parle d’**intérêts composés** si les intérêts sont ajoutés au capital initial. Il y aura ainsi un capital plus grand la deuxième année et donc plus d’intérêts.

Calculons le capital à la fin des prochaines années :

Nombre d’années n	C_n	Capital au 1er janvier après n années de placement	I_n	Intérêts
0	C_0	10’000.–	I_0	
1	C_1		I_1	
2				
3				
4				
5				

Représenter l’évolution du capital C_n sur le graphique ci-dessous :



Est-ce une fonction affine ?

On peut remarquer la progression suivante :

Nombre d'années n	Capital sur le compte 1er janvier C_n	Intérêts I_n
0	C_0	$I_0 = C_0 \cdot i$
1	$C_1 = C_0 + I_0 = C_0 + C_0 \cdot i$ $= C_0 \cdot (1 + i)$	$I_1 = C_1 \cdot i$
2	$C_2 = C_1 + I_1 = C_1 + C_1 \cdot i$ $= C_1 \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^2$	$I_2 = C_2 \cdot i$
3	$C_3 = C_2 + I_2 = C_2 + C_2 \cdot i$ $= C_2 \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^3$	$I_3 = C_3 \cdot i$

On a donc :

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

où n est le nombre d'années, C_n le capital au début après n années, C_0 le capital initial et i le taux d'intérêts annuel.

Exemples :

- Utiliser la formule pour répondre à la question de la page précédente et comparer au résultat obtenu dans le tableau.
- Pour quelle somme initiale devra-t-on rembourser 20'000.– 5 ans plus tard ?
- Avec quel taux d'intérêt devra-t-on rembourser CHF 20'000.– 5 ans plus tard si l'emprunt était de CHF 10'000.– initialement ?
- Actuellement, les taux d'intérêts des comptes épargne sont au mieux de 0,5%.
En combien d'années passe-t-on de CHF 10'000.– à CHF 20'000.– ?

ex. 4.1 à 4.5

4.2 Processus de croissance et de décroissance

Définition 4.10 On dit qu'une quantité **croît ou décroît de façon exponentielle**, si elle est multipliée par un facteur a à chaque intervalle de temps T .

Pour trouver combien de fois la quantité Q_0 a été multipliée par a durant le temps t , il faut diviser t par T , en faisant attention d'avoir les mêmes unités.

Théorème 4.1. Soit Q_0 la quantité initiale et $Q(t)$ la quantité à la fin du temps t . On a :

$$Q(t) = Q_0 \cdot a^{t/T}$$

Exemple : On a observé expérimentalement que le nombre de bactéries dans une culture double toutes les 30 minutes. Au départ, il y a 100 bactéries.

a) Quel est le nombre de bactéries après 5h30 ?

b) Exprimer le nombre de bactéries en fonction du temps écoulé t en minutes. Et si t est en heures ?

c) Au bout de combien de minutes le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?

ex. 4.6 à 4.7

Remarque : Au lieu de donner le facteur a , on indique parfois le pourcentage d'augmentation ou de diminution (décroissance).

Si i est le **taux d'augmentation**, on a $Q(t) = Q_0 \cdot (1 + i)^{t/T}$.

Si i est le **taux de décroissance**, on a $Q(t) = Q_0 \cdot (1 - i)^{t/T}$.

Les problèmes d'intérêts composés sont des exemples de ce type de situation.

Exemples :

A) En 1867, les USA ont acheté l'Alaska à la Russie pour la somme de CHF 7'200'000.

a) En supposant que la valeur du terrain augmente régulièrement de 3% par an, quelle aurait été sa valeur en 2018 ?

b) Que représente l'augmentation totale en % du prix de départ ?

B) J'ai acheté ma voiture au prix de CHF 30'000.– il y a 5 ans.

a) Que vaut-elle maintenant, s'il on compte qu'elle perd 15% de sa valeur chaque année ?

b) Quand ne vaudra-t-elle plus que CHF 5'000.– ?

c) Avec ce taux de dévaluation, quelle est la valeur d'achat d'un véhicule qui vaut CHF 20'000.– après 5 ans ?

d) Quel est le taux de dévaluation si la valeur est passée de 30'000.– à CHF 20'000.– en 3 ans ?

ex. 4.8 à 4.19

4.3 Décomposition d'une substance radioactive

Une substance radioactive n'est pas stable. Au cours du temps elle se transforme en d'autres substances : ce phénomène est appelé **décomposition radioactive**. Lorsqu'on étudie la désintégration radioactive, on constate que le taux de désintégration est proportionnel à la quantité de matière présente. A l'aide du modèle exponentiel, si $Q(t)$ désigne la quantité de substance radioactive restante après un temps t , on a la relation :

$$Q(t) = Q_0 e^{ct}$$

où Q_0 est la quantité initiale de substance et c est un nombre réel qui dépend de la substance. c est négatif puisque la quantité de matière diminue avec le temps.

On appelle **demi-vie** d'un isotope, noté T , le temps nécessaire pour que la moitié de l'échantillon de départ se désintègre. Elle est la principale caractéristique utilisée pour distinguer une substance radioactive d'une autre. Voici un tableau donnant les demi-vies de quelques isotopes :

^{91}Kr (krypton)	10 s	^{90}Sr (strontium)	28,1 ans
^{55}Cr (chrome)	18,2 h	^{238}Pu (plutonium)	86 ans
^{51}Cr (chrome)	27,8 jours	^{14}C (carbone)	5'730 ans
^{141}Ce (cérium)	32,5 jours	^{239}Pu (plutonium)	24'400 ans
^{60}Co (cobalt)	5,3 ans	^{238}U (uranium)	$4,51 \cdot 10^9$ ans

Exemple : Un physicien possède 20 g d'une substance radioactive inconnue. Après 10 ans, il constate qu'il n'en reste plus que 18,45 g. Quelle est la nature de cette substance ?

4.4 pH

On note $[H^+]$ la concentration d'ions d'hydrogène présents dans une substance (en mole par litre). Le pH (potentiel hydrogène) d'une substance est déterminé à partir de la concentration par la formule :

$$pH = -\text{Log}([H^+])$$

Le pH sert en particulier à déterminer si une solution est acide ($pH < 7$), neutre ($pH = 7$) ou basique ($pH > 7$).

Exemples :

- a) Pour les tomates $[H^+] = 6,3 \cdot 10^{-5}$. Font-elles partie des aliments acides ? Même question pour le lait pour lequel $[H^+] = 4 \cdot 10^{-7}$.

- b) Calculer la concentration en ions d'hydrogène d'une crème de corps ayant un pH égal à 5,5.

4.5 Échelle de Richter

L'échelle de Richter donne la magnitude M d'un séisme en fonction de l'énergie E dissipée par le séisme. Cette échelle est définie par la relation :

$$\text{Log}(E) = 1,5M + 4,4$$

où E est mesurée en Joules.

Exemples :

- a) Calculer le rapport de l'énergie dissipée lors du séisme qui détruisit San Francisco en 1906 ($M_{SF} = 8,3$) par l'énergie de celui de Los Angeles en janvier 1994 ($M_{LA} = 6,6$).

- b) Quelle est la magnitude sur l'échelle de Richter correspondant à l'explosion d'une bombe H de 10 mégatonnes, c'est-à-dire d'une bombe libérant une énergie équivalente à celle qui est dégagée par l'explosion de 10 millions de tonnes de TNT ? Un kilo de TNT libère en explosant une énergie de $4,2 \cdot 10^7$ Joules.

5 Exercices

5.1 Puissances et racines

Puissances à exposant entier positif

Exercice 1.1 A) Calculer de tête.

- a) 300^2 b) $(-0,5)^3$ c) 9^1 d) 2^7 e) 0^8 f) $\left(\frac{8}{7}\right)^2$

B) Utiliser votre calculatrice pour vérifier vos réponses de l'exercice précédent. N'employer que les touches « puissance » et non la touche « multiplier ».

Exercice 1.2 Calculer de tête.

- a) $(-10)^6$ c) $(+10)^9$ e) $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ g) $(0,\overline{3})^3$ i) $(-1)^{1234}$
 b) $(-10)^9$ d) $\left(\frac{6}{11}\right)^2$ f) $0,25^2$ h) 0^9 j) $(0,\overline{6})^4$

Exercice 1.3 Calculer de tête.

- a) $(-1)^3$ e) $(-2)^4$ i) $-0,5^2$ m) -2^4 q) -3^3
 b) 1^5 f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ j) $(-2)^5$ n) -4^3 r) $-(-5)^2$
 c) 2^3 g) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ k) $-(3)^2$ o) $-(-\frac{1}{2})^2$ s) $-(-\frac{2}{3})^3$
 d) $(-2)^3$ h) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$ l) -5^3 p) $-(-2)^3$ t) $(-0,1)^4$

Exercice 1.4 Calculer de tête et répondre sous forme de nombre entier ou de code décimal.

- a) 6^2 e) $(-4)^3$ i) $12'000^2$ m) $-0,9^2$ q) $0,4^4$
 b) 3^3 f) $(-2)^7$ j) 5^4 n) $(+0,5)^3$ r) $(-0,07)^2$
 c) $(-14)^2$ g) 1100^2 k) 1500^2 o) $0,008^2$ s) $(-1,5)^2$
 d) $(-2)^{10}$ h) $(+130)^2$ l) $(-30)^4$ p) $(-0,2)^5$ t) 130^2

Exercice 1.5 Calculer sans calculatrice.

a) $20^2(6^2 - 4^2)$

e) $5^3 \cdot 0^2 \cdot 7^5 + 2^1 \cdot 5^4$

b) $2^5 + 2^3 \cdot 3^2$

f) $4^1 + 4^3 - 4^2$

c) $(-2)^4 + (-1)^7 \cdot (-4)^3 - 3^4 \cdot 5^3 \cdot 0$

g) $1^7 - 13^2$

d) $-3^2(5^2 - 2^3 \cdot 3)$

h) $(-4)^3 \cdot 1^2 - (2^3 \cdot 2^2 - 2)$

Exercice 1.6 Écrire sous forme de puissance avec un rationnel positif comme base et le plus grand entier possible comme exposant.

a) $\frac{1}{8}$

c) 0,25

e) 0,0081

g) $\frac{625}{81}$

b) 0,09

d) $\frac{1}{625}$

f) 0,125

h) $\frac{8}{128}$

Exercice 1.7

n	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
5^n									

a) Compléter les premières cases de ce tableau et déterminer quelle opération permet de passer d'une case à celle à sa droite. Finir de remplir le tableau.

b) En déduire la valeur de 5^{-10} , a^{-n} et a^0 pour $a \neq 0$.

c) Cette logique peut-elle s'appliquer à $a = 0$?

Puissances à exposant entier négatif

Exercice 1.8 Calculer de tête et répondre sous forme de nombre entier ou de fraction.

a) 11^{-2}

e) 0^{-3}

i) $(-1)^9$

m) $(-1)^{-9}$

q) $(-5)^{-2}$

b) $(-4)^{-3}$

f) $(-3)^0$

j) $(+1)^9$

n) 9^{-1}

r) 2^{-5}

c) 0^7

g) 0^0

k) 9^1

o) $(-9)^{-1}$

s) $(-2)^5$

d) 7^0

h) 1^9

l) 1^{-9}

p) 5^{-2}

t) $(-2)^{-5}$

Exercice 1.9 Calculer de tête et répondre sous forme de nombre entier ou de code décimal.

- a) 10^4 c) $0,1^{-1}$ e) $0,001^{-1}$ g) $0,2^{-1}$ i) $0,002^{-1}$ k) $0,02^{-2}$
 b) 10^{-4} d) $0,5^{-2}$ f) $0,01^{-2}$ h) $0,02^{-1}$ j) $0,2^{-2}$ l) $0,002^{-2}$

Exercice 1.10 Calculer. Que peut-on observer ?

- a) $\left(\frac{7}{11}\right)^{-1}$ et $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$ b) $\left(\frac{7}{11}\right)^{-2}$ et $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ c) $\frac{1}{2^{-4}}$ et $\frac{1}{5^{-3}}$

Propriétés des puissances

Exercice 1.11 Calculer de tête et répondre sous forme de nombre entier ou de fraction.

- a) $\left(\frac{11}{13}\right)^2$ b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^4$ c) $\left(-\frac{3}{10}\right)^3$ d) $\left(\frac{8}{7}\right)^{-1}$ e) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$ f) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-2}$

Exercice 1.12 Soit $a \in \mathbb{R}^*$, démontrer $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ pour :

- a) $n, m \in \mathbb{N}^*$ b) $m \in \mathbb{Z}$ et $n = 0$ c) $m = 5$ et $n = -2$ d) $m = -5$ et $n = -2$

Exercice 1.13 Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n, m \in \mathbb{Z}$, en utilisant que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, prouver que $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Exercice 1.14 Soit $a \in \mathbb{R}^*$, démontrer que $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ pour :

- a) $n, m \in \mathbb{N}^*$ b) $m \in \mathbb{Z}$ et $n = 0$ c) $m = 5$ et $n = -2$ d) $m = -5$ et $n = -2$

Exercice 1.15 Soit a et $b \in \mathbb{R}^*$, démontrer que $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ pour :

- a) $n \in \mathbb{N}^*$ b) $n = 0$ c) $n \in \mathbb{Z}_-$

Exercice 1.16 Simplifier les expressions suivantes en n'utilisant que des exposants positifs.

- a) $5^7 \cdot 5^{-3}$ c) $(-4)^3 \cdot (-3)^3$ e) $\frac{23^{-2}}{23^{-4}}$ g) $2^3 \cdot 4^5$
 b) $(7^2)^3$ d) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-5}$ f) $\frac{5^6}{5^2 \cdot 5^3}$ h) $\frac{3^7 + 2^7}{5^3 \cdot 5^4}$

Exercice 1.17 Calculer de tête.

- a) $4^{-3} \cdot 25^{-3}$ c) $\frac{12^{91}}{12^{89}}$ e) $10^9 \div 10^{11}$ g) $\left(\frac{11}{13}\right)^{-2}$ i) $\left(-\frac{3}{10}\right)^{-3}$ k) $\left(-\frac{1}{10}\right)^{-6}$
 b) $2^3 - 2^4$ d) $10^4 + 10^2$ f) $(-2)^3 \cdot 5^{-2}$ h) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}$ j) $\left(\frac{5}{4}\right)^3$ l) $\left(\frac{12}{7}\right)^2$

Exercice 1.18 Compléter les exposants manquants.

a) $4^{-5} \cdot 4^{-7} = 4^{\dots}$

c) $(3^3)^{-5} = 3^{\dots}$

e) $10^6 = 100^{\dots} = 0,1^{\dots}$

b) $(2^9)^5 = 2^{\dots}$

d) $5^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5 \cdot 5^4 = 5^{\dots}$

f) $6^{16} : 6^{-5} = 6^{\dots}$

Exercice 1.19 Simplifier les expressions suivantes en n'utilisant que des exposants positifs.

a) $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \frac{1}{3^7}$

c) $-\left(\frac{1}{3}\right)^{-8}$

e) $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{3}\right)^6}$

b) $\frac{2^6 \cdot 7^7 \cdot 2}{14^3}$

d) $\frac{(24^5)^3 \cdot 3^2}{4^{15} \cdot 2^{15}}$

f) $\left(\frac{3}{5^4 \cdot 3^5}\right)^2$

Exercice 1.20 Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Simplifier les expressions suivantes en n'utilisant que des exposants positifs.

a) $x^3 \cdot x^7 \cdot x^{-4}$

d) $\left(\frac{3x^3}{9x^7}\right)^{-1}$

g) $(-x^2) \cdot (-x)^4$

j) $(-10x^2)^3$

b) $\frac{x^{4n}}{x^n}$

h) $(-x)^3 - x^3$

k) $-\left(\frac{2}{x^4}\right)^{-2}$

c) $(2x)^n$

e) $\frac{(5x)^3}{x^7}$

i) $(-10x^3)^2$

l) $-(-x^7)^0$

f) $(-x^3) \cdot (-x^4)$

Exercice 1.21 Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Simplifier les expressions suivantes en n'utilisant que des exposants positifs.

a) $(a^{-3})^2$

c) $a^{6n} \cdot a^{-4n}$

e) $2^n \cdot 5^{-n}$

g) $\frac{2^{-n}}{5^n}$

b) $a^4 \cdot a^{-6}$

d) $4^{-n} \cdot 5^{-n}$

f) $a^3 \cdot (2a)^{-2}$

h) $\frac{(a^2)^n}{a^{-2}}$

Exercice 1.22 Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Compléter les écritures des expressions suivantes.

a) $a^3 \cdot a^4 \cdot a^5 = a^{\dots}$

f) $\frac{4^{n+3}}{4^4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\dots}$

j) $a^{-n} \cdot a^{n+1} = \frac{1}{a^{\dots}}$

b) $(a^3)^4 = \frac{1}{a^{\dots}}$

g) $\frac{a^{n+1}}{a} = a^{\dots}$

k) $a^{-4} \cdot a^{n+3} = a^{\dots}$

c) $\frac{a^4}{a^5} = a^{\dots}$

h) $(a^3 \cdot b^4)^2 = \frac{a^{\dots}}{b^{\dots}}$

l) $\frac{a^5}{a^{-2}} = a^{\dots}$

d) $3^n \cdot 3^2 = 3^{\dots}$

i) $\frac{(a^2 \cdot b)^3 \cdot a^4}{(a \cdot b^3)^3} = a^{\dots} \cdot b^{\dots}$

m) $\frac{a^n}{a^{n-1}} = a^{\dots}$

e) $5^{n+1} \cdot 5^{n-1} = 5^{\dots}$

$$n) \left(\frac{a^{-3}}{a^{-4}} \right)^2 = a^{\dots}$$

$$o) \left(\frac{a^3}{a^4} \right)^{-2} = a^{\dots}$$

Exercice 1.23 Calculer sans calculatrice et répondre en notation scientifique :

a) $3'000'000^2$

g) $(3 \cdot 10^6) + (2 \cdot 10^5)$

b) $0,1^7$

h) $\frac{8 \cdot 10^{-8} \cdot 1'000}{40'000'000}$

c) $(3 \cdot 10^{-12}) \cdot (1,1 \cdot 10^{20})$

i) $3 \cdot 10^3 \cdot (1 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^2)$

d) $(6 \cdot 10^6)^2$

j) $0,002 \cdot 0,00011 \cdot 30$

e) $(3 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^{15})$

k) $(3 \cdot 10^{-3})^2 + (4 \cdot 10^{-3})^2$

f) $\frac{1,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8}$

l) $\frac{12 \cdot 10^{-4} \cdot (3 \cdot 10^{-7} + 9 \cdot 10^{-6})}{3,1 \cdot 10^{-4}}$

Exercice 1.24 Répondre en notation scientifique.

a) $8,6 \text{ km} = \dots\dots\dots \text{m} = \dots\dots\dots \text{mm}$

b) $3,45 \text{ mm}^2 = \dots\dots\dots \text{m}^2 = \dots\dots\dots \text{km}^2$

c) $8,5 \cdot 10^4 \text{ l} = \dots\dots\dots \text{m}^3 = \dots\dots\dots \text{ml}$

Exercice 1.25 Estimer le nombre de grains de sable dans le Sahara, sachant qu'on estime :

- la superficie du Sahara à 8 millions de km^2
- le nombre de grains de sable au m^2 à 2 milliards

Exercice 1.26 La Voie lactée, notre galaxie, ressemble à un disque. Elle est constituée d'environ deux cents milliards d'étoiles, dont la plupart sont semblables au Soleil. Toutes ces étoiles tournent autour de l'axe de rotation du disque. Le soleil se situe à $2,5 \cdot 10^{17} \text{ km}$ du centre galactique. Depuis sa naissance, il y a 4,57 milliards d'années, il a effectué une vingtaine de tours.

La vitesse de révolution du Soleil autour de l'axe de la Voie lactée est-elle supérieure ou inférieure à celle d'un bolide de formule 1 ($\sim 300 \text{ km/h}$) ?

(Une estimation de tête, du moins sans machine à calculer, peut suffire pour répondre à la question.)

Racines**Exercice 1.27** Calculer de tête.

- | | | | |
|--------------------|------------------------|----------------------|------------------------|
| a) $\sqrt{0}$ | e) $\sqrt[4]{160'000}$ | i) $\sqrt[5]{32}$ | m) $\sqrt[3]{125'000}$ |
| b) $\sqrt{225}$ | f) $\sqrt[4]{160'000}$ | j) $\sqrt{1,96}$ | n) $\sqrt[3]{0,001}$ |
| c) $\sqrt{0,04}$ | g) $\sqrt[3]{1000}$ | k) $\sqrt[3]{64}$ | o) $\sqrt[10]{1024}$ |
| d) $\sqrt{0,0009}$ | h) $\sqrt[4]{625}$ | l) $\sqrt[3]{0,027}$ | p) $\sqrt[3]{0,008}$ |

Exercice 1.28 Calculer de tête.

- | | | | |
|--------------------|--------------------|-------------------------|-----------------|
| a) $\sqrt[3]{-27}$ | b) $\sqrt[4]{-16}$ | c) $\sqrt[5]{-0,00032}$ | d) $\sqrt{-25}$ |
|--------------------|--------------------|-------------------------|-----------------|

Exercice 1.29 A) Calculer de tête.

- | | | | |
|-------------------------------|--------------------------|-----------------------|------------------------------|
| a) $\sqrt{25}$ | f) $\sqrt[6]{64}$ | k) $\sqrt[3]{-0,125}$ | p) $\sqrt[8]{1}$ |
| b) $\sqrt{10'000}$ | g) $\sqrt{1}$ | l) $\sqrt{115^2}$ | q) $\sqrt{196}$ |
| c) $\sqrt[3]{-1'000}$ | h) $\sqrt[3]{8'000'000}$ | m) $\sqrt[1]{5}$ | r) $\sqrt[3]{-8}$ |
| d) $\sqrt{-64}$ | i) $\sqrt{0,04}$ | n) $\sqrt[3]{0,027}$ | s) $\sqrt[3]{-0,001}$ |
| e) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$ | j) $\sqrt[3]{0,001}$ | o) $\sqrt[5]{0}$ | t) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ |

B) Vérifier à la calculatrice.

Propriétés des racines**Exercice 1.30** Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$ avec $b \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.**Exercice 1.31** Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Exercice 1.32 Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{\sqrt{3}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

i) $\sqrt[12]{125} \sqrt[12]{25} \sqrt[12]{5}$

n) $\sqrt[3]{125^7}$

b) $\sqrt[3]{5^{33}}$

f) $\sqrt{12}\sqrt{3}$

j) $\sqrt{2^2}$

o) $\sqrt[3]{2^3\sqrt[3]{4}}$

c) $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3}$

g) $\sqrt[7]{\sqrt{17^7}}$

k) $\sqrt{2^{36}}$

p) $\sqrt[3]{\sqrt{3^6}}$

d) $\sqrt[4]{8^4\sqrt{2}}$

h) $\sqrt[4]{81}\sqrt[4]{27}\sqrt[4]{3}$

l) $\sqrt{\sqrt{16}}$

q) $\sqrt[10]{2^5}$

m) $\sqrt[24]{3^8}$

r) $\sqrt[3]{9^5}\sqrt[3]{3^2}$

Exercice 1.33 Extraire le plus grand entier possible.

a) $\sqrt{12}$

c) $\sqrt{4000}$

e) $\sqrt{72}$

g) $\sqrt{12'500}$

b) $\sqrt{75}$

d) $\sqrt[3]{4000}$

f) $\sqrt[3]{72}$

h) $\sqrt[5]{12'500}$

Exercice 1.34 Effectuer et simplifier.

a) $3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$

f) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

k) $5\sqrt{45} - 3\sqrt{40}$

b) $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$

g) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}$

l) $2\sqrt{40} - 2\sqrt{90}$

c) $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

h) $2\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$

m) $(4 - \sqrt{43})\sqrt{43}$

d) $3\sqrt{7} - \sqrt{7}$

i) $2\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$

n) $(4 + \sqrt{35})(2 - \sqrt{5})$

e) $3\sqrt{7} + \sqrt{5} - 2\sqrt{7} - 8\sqrt{5}$

j) $3\sqrt{5} - 7\sqrt{20}$

o) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$

Exercice 1.35 Effectuer et simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{50} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - 7\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{5} + \sqrt{20} - 4\sqrt{80}$

b) $2\sqrt{54} - 2\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{6}$

e) $2\sqrt{81} - 5\sqrt{9} - 3\sqrt{36}$

c) $\sqrt{36} + 3\sqrt{6} - 5\sqrt{144}$

f) $\sqrt{98} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{72}$

Exercice 1.36 Ne pas laisser de racine aux dénominateurs des fractions.

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \sqrt{\frac{1}{7}} & \text{c)} \sqrt{\frac{9}{8}} & \text{e)} \sqrt[3]{\frac{11}{2}} & \text{g)} \sqrt[3]{\frac{1}{2}} & \text{i)} \frac{1}{2+\sqrt{7}} & \text{k)} \frac{10}{9-\sqrt{11}} \\ \text{b)} \sqrt{\frac{5}{3}} & \text{d)} \sqrt{\frac{7}{27}} & \text{f)} \sqrt[3]{\frac{2}{5}} & \text{h)} \sqrt[5]{\frac{1}{2}} & \text{j)} \frac{\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} & \text{l)} \frac{7}{4+\sqrt{2}} \end{array}$$

Exercice 1.37 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a \neq b$. Simplifier.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sqrt{ab^2c^3} & \text{b)} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{9a}} & \text{c)} \sqrt[3]{\frac{a^6bc^5}{27b^4c^2}} & \text{d)} \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \end{array}$$

Exercice 1.38 Effectuer et simplifier les expressions suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} & \text{b)} 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{18} + \sqrt{\frac{2}{9}} - \sqrt{\frac{9}{8}} & \text{c)} \sqrt{48} - \sqrt{\frac{12}{25}} + \sqrt{\frac{1}{3}} + 3\sqrt{75} \end{array}$$

Exercice 1.39 Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Simplifier les expressions suivantes.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} & \text{b)} \sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[3]{a^2} & \text{c)} \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} & \text{d)} \sqrt{10\sqrt[3]{a}} \end{array}$$

Exercice 1.40 Calculer de tête sachant que $\sqrt{27} \approx 5,19$ et $\sqrt{270} \approx 16,43$.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt{2700} & \text{c)} \sqrt{270'000} & \text{e)} \sqrt{0,27} \\ \text{b)} \sqrt{27'000} & \text{d)} \sqrt{2,7} & \text{f)} \sqrt{0,027} \end{array}$$

Exercice 1.41 Simplifier les expressions suivantes.

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} \sqrt[3]{125^2} & \text{e)} \frac{1}{5+\sqrt{3}} & \text{i)} \frac{\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} & \text{m)} \sqrt{12} + \sqrt{27} & \text{q)} \sqrt[3]{-8} \\ \text{b)} \frac{4+\sqrt{8}}{2} & \text{f)} \frac{14-\sqrt{48}}{18} & \text{j)} \sqrt{\frac{39}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} & \text{n)} \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} & \text{r)} \frac{1}{\sqrt{3^3}} \\ \text{c)} \sqrt[3]{-250} & \text{g)} \sqrt[3]{16} & \text{k)} \frac{2}{\sqrt[3]{6}} & \text{o)} \sqrt{\frac{1}{8}} & \text{s)} \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \\ \text{d)} \frac{5}{4\sqrt{3}} & \text{h)} \frac{1}{\sqrt{8}} & \text{l)} \sqrt{162} & \text{p)} 2\sqrt{1000} & \text{t)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} \right)^2 \end{array}$$

Exercice 1.42 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 3\sqrt{2}$. Simplifier les expressions suivantes.

- | | | | |
|--|--|--------------------------------|---|
| a) $\sqrt{3a^2b^3} \cdot \sqrt{6a^5b}$ | c) $\sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt[3]{a^2b^5}$ | e) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ | g) $\sqrt[3]{a^{10}}$ |
| b) $\frac{4b^3}{\sqrt{8b}}$ | d) $\sqrt[3]{16a^3b^8c^4}$ | f) $\sqrt{\frac{2a^2b^3}{8b}}$ | h) $\frac{a + \sqrt{2}}{a + 3\sqrt{2}}$ |

Exercice 1.43 Résoudre les équations suivantes.

- | | |
|-----------------------------|--|
| a) $x = 5 + \sqrt{4x - 23}$ | c) $\sqrt{x + 2} - x = x + 4$ |
| b) $\sqrt{8 - x} = x - 6$ | d) $\sqrt{25 + 8x} - 1 = \sqrt{36 + 4x}$ |

Les puissances à exposant rationnel

Exercice 1.44 Écrire les expressions suivantes à l'aide de racines et simplifier.

- | | | | |
|------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------|
| a) $2^{4/5}$ | e) $\left(\frac{1}{9}\right)^{1/2}$ | i) $\left(\frac{27}{8}\right)^{2/3}$ | m) $8^{2/3}$ |
| b) $5^{1/2}$ | f) $0^{1/5}$ | j) $2^{-1/2}$ | n) $25^{-3/2}$ |
| c) $7^{31/40}$ | g) $25^{3/2}$ | k) $7^{-1/3}$ | o) $64^{-2/3}$ |
| d) $1024^{1/10}$ | h) $25^{0,5}$ | l) $4^{-5/3}$ | p) $1'000'000^{-1/6}$ |

Exercice 1.45 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Écrire sous forme de racine.

- | | | | |
|-------------------------------------|---------------|--------------------------------------|-----------------|
| a) $a^{5/7}$ | c) $a^{-1/2}$ | e) $a^{7/5}$ | g) $-a^{4/3}$ |
| b) $\left(\frac{a}{3}\right)^{1/2}$ | d) $a^{0,6}$ | f) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-3/4}$ | h) $(-a)^{9/4}$ |

Exercice 1.46 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire les expressions suivantes à l'aide d'exposants rationnels positifs et simplifier.

- | | | | |
|---------------------|------------------------------|--|---------------------------------|
| a) $\sqrt[5]{32}$ | c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3^9}}$ | e) $\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^6}$ | g) $\frac{1}{\sqrt[6]{a^{6n}}}$ |
| b) $\sqrt[11]{5^6}$ | d) $\sqrt[5]{a^{15}}$ | f) $\sqrt[n]{5^{2n}}$ | h) $\sqrt[n]{1 + a^n}$ |

Exercice 1.47 Calculer de tête.

a) $81^{1/4}$

d) $32^{1/5}$

g) $(-5)^{-1/3}$

j) $-4^{0.5}$

b) $(-125)^{1/3}$

e) $8^{-1/3}$

h) $9^{-1/2}$

k) $(-4)^{0.5}$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1/3}$

f) $\left(\frac{225}{169}\right)^{-1/2}$

i) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-1/3}$

l) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}$

Exercice 1.48 Écrire sous la forme 2^x avec $x \in \mathbb{Q}$.

a) 16

c) $\sqrt{8}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

g) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$

b) $\frac{1}{8}$

d) $\sqrt[7]{32}$

f) $2\sqrt[3]{2}$

h) $\frac{1}{1024}$

Exercice 1.49 Calculer de tête.

$$A = 8^{2/3} + 16^{1/2} + 27^{2/3} + 81^{1/4} - 125^{1/3} - 1'000^{2/3}$$

Propriétés des puissances à exposant rationnel

Exercice 1.50 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les expressions suivantes. Répondre par une puissance.

a) $a^{1/7} \cdot a^{2/21}$

d) $\left(\frac{2}{3}a^{2/3}\right)^3$

g) $\sqrt[3]{1'000'000a^6}$

j) $\frac{\sqrt{a}}{a}$

b) $(a^{1/7})^{2/21}$

e) $\left(\frac{a}{64}\right)^{2/3}$

h) $a\sqrt[3]{a}$

k) $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{3n}$

c) $a \cdot (a^2)^{3/4}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$

i) $a^2\sqrt[3]{a}$

l) $\frac{\sqrt{a}}{a^{-1/5}}$

Exercice 1.51 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier les expressions suivantes en passant par les exposants rationnels. Répondre par une racine.

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$

c) $\frac{a^5}{\sqrt[4]{a^3}}$

e) $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a}$

g) $(\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a})^3$

b) $\frac{\sqrt[3]{a^4}}{a}$

d) $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[5]{a^3}}$

f) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a}}$

h) $\frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}$

Puissances à exposant réel

Exercice 1.52 Calculer une approximation de $10^{\sqrt{2}}$ à l'aide du tableau ci-dessous.

x	1	1,4				...	$\sqrt{2}$	...				1,5	2
10^x	10	25,12					?					31,62	100

Que vaut $10^{\sqrt{2}}$ d'après la calculatrice ?

5.2 Exponentielles**Introduction**

Exercice 2.1 Je plie une feuille de 0,1 mm d'épaisseur en deux, puis je replie en deux, et je continue de la même manière.

a) Compléter le tableau ci-dessous :

n° de l'étape	nb de couches de papier	épaisseur totale en mm
0	1	0,1
1		
2		
3		
4		
x		

b) Combien de fois faut-il plier pour dépasser 1 km d'épaisseur ?

Définition

Exercice 2.2 Donner l'expression de la fonction.

a) $\exp_3(x)$

c) $\exp_{1/3}(-x)$

b) $\exp_x(3)$

d) $\exp(x)$

Est-ce que toutes les fonctions ci-dessus sont des fonctions exponentielles ?

Exercice 2.3 Calculer sans calculatrice.

- | | | |
|---|-----------------------------|--|
| a) $\exp_{15}(2)$ | h) $\exp(-5)$ | o) $\exp(0)$ |
| b) $\exp_7(-2)$ | i) $\exp_{4/5}(-1)$ | p) $\exp_{1/2}(2)$ |
| c) $\exp_2(-7)$ | j) $\exp_{100'000}(0,2)$ | q) $\exp_2\left(\frac{1}{2}\right)$ |
| d) $\exp_{27}\left(\frac{1}{3}\right)$ | k) $\exp_{1/100'000}(0,2)$ | r) $\exp_{1/2}(-2)$ |
| e) $\exp_{16}\left(-\frac{1}{4}\right)$ | l) $\exp_{100'000}(-0,2)$ | s) $\exp_2\left(-\frac{1}{2}\right)$ |
| f) $\exp_{10}(2)$ | m) $\exp_{1/100'000}(-0,2)$ | t) $\exp_{36/49}\left(-\frac{1}{2}\right)$ |
| g) $\exp_2(10)$ | n) $\exp(1)$ | u) $\exp_7\left(\frac{1}{3}\right)$ |

Exercice 2.4 Compléter le tableau de valeurs, sans utiliser de calculatrice.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$\exp_{100}(x)$									

Exercice 2.5 Compléter le tableau de valeurs, sans utiliser de calculatrice.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$
$\exp_{1/64}(x)$									

Propriétés

Exercice 2.6 Remplacer les "... " par un nombre entier ou une fraction irréductible.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $2^5 \cdot 8^3 = 2^{\dots}$ | d) $\frac{3^5 \cdot 3^4}{3^{-6}} \cdot 3^{-3} = 3^{\dots}$ | g) $\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[5]{3^4}} = 3^{\dots}$ |
| b) $3^5 \cdot \frac{1}{3^3} = 3^{\dots}$ | e) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = 5^{\dots}$ | h) $\left(\sqrt{7^3}\right)^5 \cdot \sqrt{7} = 7^{\dots}$ |
| c) $(3^3)^2 = 9^{\dots}$ | f) $\sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt{4^3} = 4^{\dots}$ | i) $\frac{\sqrt[4]{7^2}}{7^3} \sqrt[3]{7^4} = 7^{\dots}$ |

Exercice 2.7 Simplifier les expressions suivantes.

a) $9 \cdot 3^{4x-2}$

c) $\frac{32^x \cdot 2^5}{16^{x+1}}$

e) $\frac{1}{49} (7^{x+1})^x$

b) $\frac{5^{2x+7}}{5^{x-3}}$

d) $\frac{2^x + 6^x}{2^x}$

f) $(3^x \cdot 3)^2 \cdot 3^{4x-2}$

Exercice 2.8 Écrire sous la forme $k \cdot a^{bx}$ avec a, b et $c \in \mathbb{Z}$. a doit être positif et le plus petit possible.

a) $\exp_2(x) \cdot \exp_5(x)$

e) $\exp_4(x+1) \cdot \exp_4(x+1)$

b) $\exp_2(x) \cdot \exp_2(3x+5)$

f) $(\exp_3(5x-1))^2$

c) $\frac{\exp_5(4x+1)}{\exp_5(5-x)}$

g) $\left(\frac{\exp_9(1+x)}{3}\right)^2$

d) $\exp_4(x+1) \cdot \exp_3(x+1)$

h) $\exp_4(x+1) + \exp_4(x+1)$

Exercice 2.9 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Compléter les expressions suivantes.

a) $\frac{a^x}{a^3} = a^{(\dots)} = \frac{1}{a^{(\dots)}}$

e) $\frac{a^x}{a^{x+3}} = a^{(\dots)}$

b) $\frac{a}{\sqrt[5]{a^x}} = a^{(\dots)}$

f) $a^{2x} \cdot (a^x)^{x+3} = a^{(\dots)}$

c) $\sqrt{a} \cdot a^{x+2} = a^{(\dots)}$

g) $\left(\frac{a^{x+1}}{a^2}\right)^{x-4} = a^{(\dots)}$

d) $(a^{2x+1})^{2x+1} = a^{(\dots)}$

h) $(a-3)^x \cdot (a+3)^x = (\dots)^x$

Équations exponentielles

Exercice 2.10 Résoudre.

a) $25^{x+3} = 625$

f) $(10^{x+5})^2 = 0,001$

k) $5^{2x+4} - 125^x = 0$

b) $13^{3x-6} = 1$

g) $(2^{x-1})^x - 4 = 0$

l) $4^{3x} \cdot 16^{2x} = \sqrt{2}$

c) $2^{5x-2} = 4^{8-x}$

h) $3^{x-1} + 27 = 0$

m) $(5^{x-1})^x - 125^x = 0$

d) $\frac{6^{4-x}}{3^{4-x}} = 1024$

i) $\frac{11^{2x}}{121^x} = 1$

n) $2^{3x-2} \cdot 5^{3x-2} = 10'000$

e) $\frac{9^{3+x}}{3^x} = 0$

j) $\frac{7^{4x+5}}{49^{x-9}} = 7$

o) $6^{3x-2} - 6^{3x-4} = 0$

Exercice 2.11 Résoudre.

a) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 20 = 0$

c) $16^x - 20 \cdot 4^x + 64 = 0$

b) $10 \cdot 3^x + 9^x = -90$

d) $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} = 32$

Exercice 2.12 Résoudre.

a) $2 \cdot 5^{-x} - 5^x = 1$

b) $4 \cdot 2^{-3x} - 5 \cdot 2^{-x} + 2^x = 0$

Exercice 2.13 Résoudre les équations suivantes.

a) $2^{x+6} = 2^{3x+4}$

e) $2^x - 16 \cdot 2^{3x+2} = 0$

i) $3 \cdot 2^{2(x+1)} - 10 \cdot 2^{x+2} = 32$

b) $7^{8x^2+4} = 7^{(2-3x)^2}$

f) $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

j) $2 \cdot 2^{6x-1} + 3 \cdot 2^{3x+1} + 9 = 0$

c) $4^x = 16^{2x+5}$

g) $27^{x+2} = 3^{5x+8}$

k) $3^x + 9^x = 90$

d) $7^{2x+1} = 1$

h) $\frac{16^x \cdot 125^x}{5} = \frac{10^4}{5^{x+1}}$

l) $3^{x+1} + 3^{-x} = 4$

5.3 Logarithmes

Définition

Exercice 3.1 Calculer sans calculatrice.

a) $\log_2(64)$

c) $\log_{11}(121)$

e) $\log_9(3)$

b) $\log_5(625)$

d) $\log_7(1)$

f) $\log_2(0,5)$

Exercice 3.2 Calculer sans calculatrice.

a) $\text{Log}(1'000'000)$

c) $\text{Log}(1)$

e) $\text{Log}(\sqrt{10})$

g) $\text{Log}(10)$

b) $\text{Log}(0,01)$

d) $\text{Log}\left(\frac{1}{1000}\right)$

f) $\text{Log}\left(\sqrt[5]{1000}\right)$

h) $\text{Log}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right)$

Exercice 3.3 Calculer sans calculatrice.

- | | | | |
|--------------------------------------|-------------------|--------------------------------------|--|
| a) $\text{Log}(10'000)$ | d) $\log_2(1024)$ | g) $\log_7(\sqrt{7})$ | j) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ |
| b) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$ | e) $\log_2(512)$ | h) $\log_3\left(\sqrt[5]{32}\right)$ | k) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[5]{64}}\right)$ |
| c) $\log_5(1)$ | f) $\log_3(3)$ | i) $\log_4\left(\sqrt[5]{64}\right)$ | l) $\text{Log}(0,001)$ |

Exercice 3.4 Calculer sans calculatrice.

- | | | |
|------------------------------------|-----------------------|---|
| a) $\ln(e^2)$ | c) $\ln(\sqrt[4]{e})$ | e) $\ln(1)$ |
| b) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ | d) $\ln(e)$ | f) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^7}}\right)$ |

Exercice 3.5 Calculer sans calculatrice.

- | | | |
|----------------|-------------------|----------------------|
| a) $\log_2(8)$ | c) $\log_5(-5)$ | e) $\log_4(8)$ |
| b) $\log_8(2)$ | d) $\log_{64}(4)$ | f) $\log_{625}(125)$ |

Exercice 3.6 Calculer à l'aide de la définition, observer et en déduire une propriété.

- | | | | |
|---------------------|----------------|---|--|
| a) $\log_7(7^3)$ | c) $\log_7(1)$ | e) $\text{Log}(10^9 \cdot 10^5)$ | g) $\text{Log}\left(\frac{1}{10^7}\right)$ |
| b) $7^{\log_7(49)}$ | d) $\log_7(7)$ | f) $\text{Log}\left(\frac{10^9}{10^5}\right)$ | |

Exercice 3.7

- a) Vérifier sans calculatrice que $\log_2(5^7) = 7 \log_2(5)$.
- b) Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in \mathbb{R}$. Montrer que $\log_a(x^q) = q \log_a(x)$.

Exercice 3.8

- a) Vérifier sans calculatrice que $\log_6(13) = \log_2(13) \cdot \log_6(2)$.
- b) En déduire que $\log_2(13) = \frac{\log_6(13)}{\log_6(2)}$.
- c) Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\log_a(x) = \frac{\text{Log}(x)}{\text{Log}(a)}$.

Propriétés**Exercice 3.9** Calculer sans calculatrice.

a) $\log_2(40) + \log_2(3) - \log_2(15) =$

c) $3 \log_{25}(40) - \log_{25}(64) - \log_{25}(8) =$

b) $\text{Log}(14) - \text{Log}(2000) - \text{Log}(70) =$

d) $4 \log_3(10) - 2 \log_3(8100) =$

Exercice 3.10 Simplifier.

a) $\text{Log}(12) + \text{Log}(5)$

c) $\ln(16) + 2 \ln(3) - 2 \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(9)$

b) $2 \ln(5) - 3 \ln(2)$

d) $\frac{\text{Log}(20) + \text{Log}(100) - \text{Log}(2)}{\text{Log}(5000) - \text{Log}(5) + \text{Log}(0,1)}$

Exercice 3.11 À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approximative.

a) $\log_2(40)$

b) $\log_{40}(2)$

c) $\text{Log}(70)$

d) $\ln(3)$

Exercice 3.12 Sachant que $\log_5(2) \approx 0,4307$ et $\log_5(3) \approx 0,6826$ calculer.

a) $\log_5(6)$

c) $\log_5(\sqrt{2})$

e) $\log_5(36)$

b) $\log_5(16)$

d) $\log_5(0,5)$

f) $\log_5\left(\frac{8}{27}\right)$

Retour aux équations exponentielles**Exercice 3.13** Résoudre en donnant la réponse sous forme exacte.

a) $17^x + 1 = 10$

d) $4 \cdot e^{5x-2} = 1$

g) $5^{x+8} = 3 \cdot 5^{2x}$

b) $17^{x+1} = 10$

e) $5 \cdot 2^{3x+1} - 3 = 167$

h) $7^{3x} = \frac{7^{x+1}}{8}$

c) $7 + 10^{3x-6} = 9$

f) $7 \cdot e^{3-x} = e^5$

i) $3 = 5^{x^2+2}$

Exercice 3.14 Résoudre en donnant la réponse sous forme exacte, puis au centième près.

a) $5 \cdot (1+x)^3 = 1000$

d) $5 \cdot (1+0,2)^3 = x$

g) $7 \cdot (1+x)^4 = 300$

b) $x \cdot (1+0,2)^3 = 1000$

e) $5 \cdot (1+0,2)^{3/x} = 1000$

h) $7 \cdot (1+0,5)^{4x} = 300$

c) $5 \cdot (1+0,2)^x = 1000$

f) $5 \cdot (1+0,2)^{x/3} = 1000$

i) $7 \cdot (1+0,5)^{x/4} = 300$

Exercice 3.15 Expliquer pourquoi l'ensemble des solutions de l'équation :

$$5^x = 3^{x+2}$$

peut s'écrire des différentes manières ci-dessous :

$$S = \left\{ \frac{2 \log_5(3)}{1 - \log_5(3)} \right\} = \left\{ \frac{2}{\log_3(5) - 1} \right\} = \left\{ \frac{2 \operatorname{Log}(3)}{\operatorname{Log}(5) - \operatorname{Log}(3)} \right\} = \left\{ \frac{\operatorname{Log}(9)}{\operatorname{Log}\left(\frac{5}{3}\right)} \right\}$$

Exercice 3.16 Résoudre (en valeur exacte) les équations suivantes.

a) $2^{5x-3} = 5^{2x-3}$

b) $3^{-x+2} = 7^{2x}$

Équations logarithmiques

Exercice 3.17 Résoudre les équations.

a) $x = \log_2(32)$

c) $\log_x(256) = 4$

e) $\log_4(x) = 3$

b) $\log_2(x) = 4$

d) $x = \log_5(125)$

f) $\log_x(1000) = 3$

Exercice 3.18 Résoudre.

a) $\ln(2x + 1) = 5$

b) $2 \log_{25}(x) - 3 = 0$

c) $3 \log_{64}(x + 1) = -1$

d) $\log_7(2x) = 0$

Exercice 3.19 Résoudre.

a) $\operatorname{Log}(x - 4) = \operatorname{Log}(10 - x)$

c) $2 \operatorname{Log}(x - 3) = \operatorname{Log}(25 - 6x)$

b) $\log_2(x - 4) = \log_2(2 - x)$

d) $\ln(x^2 + 3) = \ln(4x)$

Exercice 3.20 Résoudre.

a) $\operatorname{Log}(x - 3) + \operatorname{Log}(x) = 1$

c) $\log_3(x + 10) - \log_3(x) = 1$

b) $\log_2(5 - x) + \log_2(x + 5) = 4$

d) $\log_3(x - 10) - \log_3(x) = 1$

Exercice 3.21 Résoudre.

a) $\text{Log}(x+2) - \text{Log}(3) = \text{Log}(2x-1) + \text{Log}(7)$

e) $\log_3(35 - x^3) = 3 \log_3(5 - x)$

b) $\text{Log}(x+2) + \text{Log}(x-1) = \text{Log}(18)$

f) $\text{Log}(x^2 - 7) = 2 \text{Log}(x+3)$

c) $\text{Log}(2x-3) + \text{Log}(3x+10) = 4 \text{Log}(2)$

g) $\ln(20) + \ln(x^2 - 9) - \ln(x+3) = 1 + \ln(2x+6)$

d) $\log_2(x^2 - 4) = 2 \log_2(x+3)$

h) $\text{Log}(20) + \text{Log}(x^2 - 9) - \text{Log}(x+3) = 1 + \text{Log}(2x+6)$

Exercice 3.22 Résoudre les systèmes d'équations suivants :

a)
$$\begin{cases} \text{Log}(x) + \text{Log}(y) = 2 \\ x + y = 25 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \text{Log}(x) - \text{Log}(y) = 5 \\ \text{Log}(x^3) + \text{Log}(y^3) = 9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 1 \\ xy = e \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \text{Log}(\sqrt{x}) - \text{Log}(\sqrt{5}) = 0,5 \\ 2 \text{Log}(x) - \text{Log}(y) = 1 \end{cases}$$

5.4 Applications des exponentielles et des logarithmes

Les intérêts composés

Exercice 4.1 En 1980, les banques proposaient des comptes-épargnes pour les jeunes avec un taux d'intérêt annuel fixe 5%.

- Mes parents ont déposé CHF 2000.– sur un tel compte à ma naissance et n'y ont plus touché. Quelle somme vais-je pouvoir retirer à mes 20 ans ?
- Au bout de combien d'années la somme sur le compte a-t-elle dépassé le double de la somme de départ ?
- Avec ce taux d'intérêt, quelle somme auraient-ils dû déposer pour que je puisse retirer CHF 10'000.– ?
- Pour ce versement de CHF 2000.–, quel taux d'intérêt aurait-il fallu pour que je puisse retirer CHF 10'000.– à mes 20 ans ?
- Si je fais la même chose pour mon enfant avec le taux d'intérêt actuel de 0,5%, quelle somme aura-t-il à ses 20 ans ?

Exercice 4.2 Un capital de CHF 5'000.– a été placé il y a 15 ans. Ce capital et les intérêts produits font aujourd'hui un total de CHF 8'019,85. Quel était le taux annuel, si le placement était à intérêts composés ?

Exercice 4.3 Quelle serait la valeur acquise en 2000 ans par un capital de CHF 1.–, placé à intérêts composés au taux annuel de 3,5%.

Exercice 4.4 A quel taux faut-il placer un capital pour qu'il double en 12 ans ?

Exercice 4.5 En combien d'années une somme placée à 6% triple-t-elle ?

Processus de croissance et de décroissance

Exercice 4.6 Au début d'une épidémie, on a constaté que le nombre de malades triple toutes les 5 heures.

- Comment calcule-t-on le nombre de malades t heures après l'apparition du premier ?
- Au bout de combien de temps dépasse-t-on le millier de malades ?

Exercice 4.7 On étudie la propagation d'une rumeur sur les réseaux sociaux. On constate qu'il y a plusieurs phases. Tout d'abord, le nombre de personnes ayant partagé l'information double toutes les 6 minutes, jusqu'à atteindre 1'000'000 de partages. Ensuite, il faut 4 heures pour passer à 2'000'000 de partages. Finalement, la croissance continue encore lentement pendant des dizaines d'années.

- Combien de temps dure la première phase ?
- Si la deuxième phase est aussi une croissance exponentielle, quel est le taux de croissance par heure, en % ? Et par minute ?

Exercice 4.8 Si la population des insectes décroît de 1% chaque année, en combien de temps aura-t-elle diminué de moitié ?

Exercice 4.9 Une firme d'informatique vient d'acquérir de nouveaux ordinateurs au coût de CHF 400'000.– et ces équipements se déprécient de 20% par année. Après combien d'années ces équipements ne vaudront-ils plus que le quart de leur valeur initiale.

Exercice 4.10 Une forêt renferme aujourd'hui 200'000 m³ de bois. Combien en contenait-elle il y a 15 ans si l'accroissement annuel de la quantité de bois est de 3,25% ?

Exercice 4.11 Depuis 1990, la population d'une région rurale diminue régulièrement année après année. En 1990, on y décomptait 25'000 personnes alors qu'en 2000, il n'y avait plus que 15'000 personnes.

- Modéliser cette situation à l'aide d'une formule donnant la population $P(t)$ en fonction du temps t , en partant d'un modèle de décroissance exponentielle.
- Au bout de combien d'années cette population sera-t-elle pour la première fois inférieure à 10'000 habitants.

Exercice 4.12 Quel est le placement le plus avantageux 10 ans à 5% puis 10 ans à 3% ou 20 ans à 4% ? Calculer l'augmentation totale en % du montant de départ de chaque variante .

Exercice 4.13 Quelle est l'augmentation exprimée en % du capital initial d'un placement :

- à 3% pendant 21 ans ?
- à 4% pendant 26 ans ?

Exercice 4.14 Quel est le placement le plus avantageux ?

- Placer pendant 10 ans la moitié de son argent à 3% et l'autre moitié à 5%.
- Placer le tout à 4% pendant le même temps ?

Exercice 4.15 En 2012, un marchand a fabriqué un million de bicyclettes pour la consommation intérieure d'un pays et 250'000 pour l'exportation. Depuis le 1er janvier 2013, les augmentations annuelles de la demande sont en moyenne de 11% pour la consommation intérieure et de 40% pour l'exportation.

- a) Calculer le nombre de bicyclettes qu'il faudra produire en 2015 pour satisfaire la demande.
- b) Au bout de combien d'années les exportations dépasseront-elles la consommation intérieure ?

Exercice 4.16 Sur une parcelle de 1m^2 de champs de colza, on mesure une population de 100 pucerons. Une semaine plus tard, la population est de 120 pucerons.

- a) Combien de pucerons y aurait-il 3 semaines après la première mesure s'il s'agit d'un modèle de croissance exponentielle ?
- b) Après combien de temps la population aura doublé ?

Exercice 4.17 En 1990, la population de Babaorum était de 3'000 habitants. L'année suivante, on y a enregistré 90 naissances et 30 décès. On n'a constaté aucune immigration, et aucune émigration, si bien que les naissances et les décès ont été les seules causes de variation de la population. Si cette tendance se poursuit, à quelle population les habitants de Babaorum peuvent-ils s'attendre en 2002 s'il s'agit d'un modèle de croissance exponentielle ?

Exercice 4.18 Les biologistes réalisent volontiers des expériences en utilisant des drosophiles (mouches du vinaigre) car la durée de vie courte de ces animaux permet d'étudier facilement leurs caractères sur plusieurs générations. Un jour, une colonie comptait 2'510 mouches. Trois jours plus tard, il y en avait 5'380.

- a) De combien d'unités la population aura-t-elle augmenté après une semaine s'il s'agit d'un modèle de croissance exponentielle ?
- b) En combien de temps la population doublera-t-elle ?

Exercice 4.19 En physique, les puissances sont généralement mesurées en Watts [W]. Pour des raisons pratiques, en acoustique, on préfère utiliser le décibel [dBm] pour mesurer la puissance du son. Dans ce cas, on l'appelle mesure du signal.

Pour convertir une puissance sonore P_{mW} exprimée en milliwatts en un signal P_{dBm} exprimé en décibel, on utilise la relation suivante :

$$P_{\text{dBm}} = 10 \cdot \text{Log} (P_{\text{mW}})$$

- a) Quelle est la mesure d'un signal sonore dont la puissance est de 1W ?
- b) Quelle est la puissance en milliwatts d'un signal sonore mesuré à 20 dBm ?
- c) Même question pour des signaux sonores mesurés à 17 dBm, 23 dBm, 30 dBm et 10 dBm ?
- d) Dans les concerts et discothèques, la puissance est limitée légalement à 100 dbm. Quelle est la puissance du signal exprimée en Watts ?
- e) L'ingénieur du son d'un concert mesure un signal de 103 dBm. Les conséquences de ce dépassement de la limite légale sont-elles négligeables ? (Comparer les puissances en Watts.)

6 Solutions

6.1 Réponses - Puissances et racines

1.1 a) 90'000 b) -0,125 c) 9 d) 128 e) 0 f) $\frac{64}{49}$

1.2 a) 1'000'000 c) 1'000'000'000 e) $\frac{1}{16}$ g) $\frac{1}{27}$ i) 1
b) -1'000'000'000 d) $\frac{36}{121}$ f) $\frac{1}{16} = 0,0625$ h) 0 j) $\frac{16}{81}$

1.3 a) -1 f) $\frac{1}{4}$ i) -0,25 n) -64 r) -25
b) 1 g) $\frac{4}{9}$ j) -32 o) $-\frac{1}{4}$
c) 8 k) -9 p) 8 s) $\frac{8}{27}$
d) -8 l) -125 q) -27 t) 0,0001
e) 16 h) $-\frac{1}{64}$ m) -16

1.4 a) 36 e) -64 i) 144'000'000 m) -0,81 q) 0,0256
b) 27 f) -128 j) 625 n) 0,125 r) 0,0049
c) 196 g) 1'210'000 k) 2'250'000 o) 0,000064 s) 2,25
d) 1024 h) 16'900 l) 810'000 p) -0,00032 t) 16'900

1.5 a) 8000 c) 80 e) 1250 g) -168
b) 104 d) -9 f) 52 h) -94

1.6 a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $0,5^2$ e) $0,3^4$ g) $\left(\frac{5}{3}\right)^4$
b) $0,3^2$ d) $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ f) $0,5^3$ h) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

n	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
5^n	625	125	25	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{625}$

1.7 a) On divise par 5.

b) $5^{-10} = \frac{1}{5^{10}}$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^0 = 1$ pour $a \neq 0$.

c) Non, car si $a = 0$, on ne peut pas diviser par a pour passer à la case suivante.
 $0^n = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ sinon 0^n n'est pas défini.

1.8 a) $\frac{1}{121}$ d) 1 h) 1 l) 1 o) $-\frac{1}{9}$ r) $\frac{1}{32}$
b) $-\frac{1}{64}$ e) indéfini i) -1 m) -1 p) $\frac{1}{25}$ s) -32
c) 0 g) indéfini j) 1 n) $\frac{1}{9}$ q) $\frac{1}{25}$ t) $-\frac{1}{32}$
k) 9

1.9

- a) 10'000 c) 10 e) 1'000 g) 5 i) 500 k) 2'500
 b) 0,0001 d) 4 f) 10'000 h) 50 j) 25 l) 250'000

a) $\left(\frac{7}{11}\right)^{-1} = \frac{11}{7}$ et $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$. Mettre à la puissance -1 inverse la fraction.

1.10

b) $\left(\frac{7}{11}\right)^{-2} = \frac{121}{49}$ et $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{125}{8}$.

Mettre à la puissance $-n$ inverse la fraction et met le numérateur et le dénominateur à la puissance n .

c) $\frac{1}{2^{-4}} = 16$ et $\frac{1}{5^{-3}} = 125$ $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ $\forall a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$

1.11

- a) $\frac{121}{169}$ b) $\frac{16}{625}$ c) $-\frac{27}{1000}$ d) $\frac{7}{8}$ e) 6 f) $\frac{225}{196}$

a) Si $n, m \in \mathbb{N}^*$ $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fois}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fois}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ fois}} = a^{m+n}$

b) Si $m \in \mathbb{Z}$ $a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0}$

1.12

c) $a^5 \cdot a^{-2} = a^5 \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{a^5}{a^2} = a^3 = a^{5+(-2)}$

d) $a^{-5} \cdot a^{-2} = \frac{1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^7} = a^{-7} = a^{(-5)+(-2)}$

1.13

$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$

a) $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ fois}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fois}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fois}} \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fois}}}_{n \text{ fois}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ fois}} = a^{m \cdot n}$

b) Si $m \in \mathbb{Z}$ $(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}$

1.14

c) $(a^5)^{-2} = \frac{1}{(a^5)^2} = \frac{1}{a^{10}} = a^{-10} = a^{5 \cdot (-2)}$

d) $(a^{-5})^{-2} = \frac{1}{(a^{-5})^2} = \frac{1}{a^{-10}} = a^{10} = a^{(-5) \cdot (-2)}$

a) $(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fois}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ fois}} = a^n b^n$

1.15

b) $(ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$

c) $(a \cdot b)^n = \frac{1}{(a \cdot b)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^n \cdot b^n$

1.16

- a) 5^4 c) 12^3 e) 23^2 g) 2^{13}
 b) 7^6 d) $\frac{7^5}{2^5}$ f) 5 h) $\frac{3^7 + 2^7}{5^7}$

1.17	a) $100^{-3} = 0,000001$	e) $\frac{1}{100} = 0,01$	i) $-\frac{1000}{27}$			
	b) $8 - 16 = -8$	f) $-8 \cdot \frac{1}{25} = -\frac{8}{25}$	j) $\frac{125}{64}$			
	c) $12^2 = 144$	g) $\frac{169}{121}$	k) $1'000'000$			
	d) $10'100$	h) $\frac{625}{16}$	l) $\frac{144}{49}$			
1.18	a) -12	b) 45	c) -15	d) 5	e) 3 et -6	f) 21
1.19	a) $\frac{3^6}{2^{12}}$	b) 14^4	c) -3^8	d) 3^{17}	e) $\frac{3^{10}}{2^4}$	f) $\frac{1}{15^8}$
1.20	a) x^6	c) $2^n x^n$	e) $\frac{125}{x^4}$	g) $-x^6$	i) $100x^6$	k) $-\frac{1}{4}x^8$
	b) x^{3n}	d) $3x^4$	f) x^7	h) $-2x^3$	j) $-1000x^6$	l) -1
1.21	a) $\frac{1}{a^6}$	c) a^{2n}	e) $\left(\frac{2}{5}\right)^n$	g) $\frac{1}{10^n}$		
	b) $\frac{1}{a^2}$	d) $\frac{1}{20^n}$	f) $\frac{a}{4}$	h) a^{2n+2}		
1.22	a) a^{12}	d) 3^{n+2}	g) a^n	j) $\frac{1}{a^{-1}}$	m) a^1	
	b) $\frac{1}{a^{-12}}$	e) 5^{2n}	h) $\frac{a^6}{b^{-8}}$	k) a^{n-1}	n) a^2	
	c) a^{-1}	f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{1-n}$	i) $a^7 \cdot b^{-6}$	l) a^7	o) a^2	
1.23	a) $9 \cdot 10^{12}$	c) $3,3 \cdot 10^8$	e) $1,5 \cdot 10^{-4}$	g) $3,2 \cdot 10^6$	i) $3,0072 \cdot 10^3$	k) $2,5 \cdot 10^{-5}$
	b) $1 \cdot 10^{-7}$	d) $3,6 \cdot 10^{13}$	f) $5 \cdot 10^{-6}$	h) $2 \cdot 10^{-12}$	j) $6,6 \cdot 10^{-6}$	l) $3,6 \cdot 10^{-5}$
1.24	a) $8,6 \text{ km} = 8,6 \cdot 10^3 \text{ m} = 8,6 \cdot 10^6 \text{ mm}$			c) $8,5 \cdot 10^4 \text{ l} = 8,5 \cdot 10^1 \text{ m}^3 = 8,5 \cdot 10^7 \text{ ml}$		
	b) $3,45 \text{ mm}^2 = 3,45 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 3,45 \cdot 10^{-12} \text{ km}^2$					
1.25	Superficie en $8 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$, nombre de grains de sable : $1,6 \cdot 10^{22}$.					
1.26	Temps nécessaire pour effectuer un tour : $\sim 2,285 \cdot 10^8$ années					
	Périmètre de l'orbite du soleil : $\sim 1,5 \cdot 10^{18} \text{ km}$					
	Vitesse approximative du soleil : $\sim 7,5 \cdot 10^5 \text{ km/h}$					
	Le soleil se déplace donc environ 2500 fois plus rapidement que la voiture de F1. En valeur exacte, à l'aide de la machine à calculer, on trouvera $7,84 \cdot 10^5$					
1.27	a) 0	d) $0,03$	g) 10	j) $1,4$	m) 50	p) $0,2$
	b) 15	e) 400	h) 5	k) 4	n) $0,1$	
	c) $0,2$	f) 20	i) 2	l) $0,3$	o) 2	
1.28	a) -3	b) pas défini	c) $-0,2$	d) pas défini		

1.29 Vérifier à la calculatrice

$$\mathbf{1.30} \quad \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$$

$$\mathbf{1.31} \quad (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$$

1.32	a) $\sqrt[4]{3}$	d) 2	g) $\sqrt{17}$	j) 2	m) $\sqrt[3]{3}$	p) 3
	b) 5^{11}	e) $\frac{1}{3}$	h) 9	k) 2^{18}	n) 5^7	q) $\sqrt{2}$
	c) 3	f) 6	i) $\sqrt{5}$	l) 2	o) 2	r) 81

1.33	a) $2\sqrt{3}$	c) $20\sqrt{10}$	e) $6\sqrt{2}$	g) $50\sqrt{5}$
	b) $5\sqrt{3}$	d) $10\sqrt[3]{4}$	f) $2\sqrt[3]{9}$	h) $5\sqrt[5]{4}$

1.34	a) 21	e) $\sqrt{7} - 7\sqrt{5}$	i) 24	m) $4\sqrt{43} - 43$
	b) 30	f) $\sqrt{15}$	j) $-11\sqrt{5}$	n) $8 - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{35} - 5\sqrt{7}$
	c) $7\sqrt{3}$	g) $3\sqrt{7}$	k) $15\sqrt{5} - 6\sqrt{10}$	o) $8 - 2\sqrt{15}$
	d) $2\sqrt{7}$	h) 12	l) $-2\sqrt{10}$	

1.35	a) $3\sqrt{2}$	b) $-2\sqrt{6}$	c) $-54 + 3\sqrt{6}$	d) $-12\sqrt{5}$	e) -15	f) $10\sqrt{2}$
-------------	----------------	-----------------	----------------------	------------------	--------	-----------------

1.36	a) $\frac{\sqrt{7}}{7}$	c) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$	e) $\frac{\sqrt[3]{44}}{2}$	g) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$	i) $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$	k) $\frac{9+\sqrt{11}}{7}$
	b) $\frac{\sqrt{15}}{3}$	d) $\frac{\sqrt{21}}{9}$	f) $\frac{\sqrt[3]{50}}{5}$	h) $\frac{\sqrt[5]{16}}{2}$	j) $\frac{5\sqrt{2}+2}{23}$	l) $\frac{4-\sqrt{2}}{2}$

1.37	a) $bc\sqrt{ac}$	b) $\frac{1}{3}$	c) $\frac{a^2c}{3b}$	d) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$
-------------	------------------	------------------	----------------------	------------------------------------

1.38	a) $\frac{19}{6}\sqrt{2}$	b) $-\frac{29\sqrt{2}}{12}$	c) $\frac{284\sqrt{3}}{15}$
-------------	---------------------------	-----------------------------	-----------------------------

1.39	a) $\sqrt[6]{a^5}$	b) $a^{15}\sqrt[4]{a^7}$	c) $\sqrt[6]{a}$	d) $\sqrt[6]{1000a}$
-------------	--------------------	--------------------------	------------------	----------------------

1.40	a) $\sim 51,9$	b) $\sim 164,3$	c) ~ 519	d) $\sim 1,643$	e) $\sim 0,519$	f) $\sim 0,1643$
-------------	----------------	-----------------	---------------	-----------------	-----------------	------------------

1.41	a) 25	f) $\frac{7-2\sqrt{3}}{9}$	j) $\frac{\sqrt{26}}{2}$	n) $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$	r) $\frac{\sqrt{3}}{9}$
	b) $2+\sqrt{2}$	g) $2\sqrt[3]{2}$	k) $\frac{\sqrt[3]{36}}{3}$	o) $\frac{\sqrt{2}}{4}$	s) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
	c) $-5\sqrt[3]{2}$	h) $\frac{\sqrt{2}}{4}$	l) $9\sqrt{2}$	p) $20\sqrt{10}$	
	d) $\frac{5\sqrt{3}}{12}$	i) $-\frac{5+\sqrt{5}}{4}$	m) $5\sqrt{3}$	q) -2	t) $3+2\sqrt{2}$
	e) $\frac{5-\sqrt{3}}{22}$				

1.42	a) $3a^3b^2\sqrt{2a}$	c) $a \cdot b^2$	e) $\sqrt{a}$	g) $a^3\sqrt[3]{a}$
	b) $b^2\sqrt{2b}$	d) $2ab^2c\sqrt[3]{2b^2c}$	f) $\frac{ab}{2}$	h) $\frac{a^2-2\sqrt{2a}-6}{a^2-18}$

1.43	a) $S = \{6; 8\}$	b) $S = \{7\}$	c) $S = \left\{-2; -\frac{7}{4}\right\}$	d) $S = \{7\}$
-------------	-------------------	----------------	--	----------------

1.44	a) $\sqrt[5]{16}$	e) $\frac{1}{3}$	i) $\frac{9}{4}$	m) 4
	b) $\sqrt{5}$	f) 0	j) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	n) $\frac{1}{125}$
	c) $\sqrt[40]{7^{31}}$	g) 125	k) $\frac{\sqrt[3]{49}}{7}$	o) $\frac{1}{16}$
	d) 2	h) 5	l) $\frac{\sqrt[3]{4}}{16}$	p) $\frac{1}{10}$

1.45	a) $\sqrt[7]{a^5}$	c) $\frac{\sqrt{a}}{a}$	e) $a\sqrt[5]{a^2}$	g) $-a\sqrt[3]{a}$
	b) $\frac{\sqrt{3a}}{3}$	d) $\sqrt[5]{a^3}$	f) $\sqrt[4]{a^3}$	h) non défini

1.46	a) 2	c) $\frac{1}{27}$	e) $\frac{1}{a^3}$	g) $\frac{1}{a^n}$
	b) $5^{6/11}$	d) a^3	f) 25	h) $(1+a^n)^{1/n}$

1.47	a) 3	c) $\frac{\sqrt[3]{20}}{2}$	e) $\frac{1}{2}$	g) non défini	i) 4	k) non défini
	b) non défini	d) 2	f) $\frac{13}{15}$	h) $\frac{1}{3}$	j) -2	l) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

1.48	a) 2^4	b) 2^{-3}	c) $2^{3/2}$	d) $2^{5/7}$	e) $2^{-1/2}$	f) $2^{4/3}$	g) $2^{-2/5}$	h) 2^{-10}
-------------	----------	-------------	--------------	--------------	---------------	--------------	---------------	--------------

1.49 $A = 4 + 4 + 9 + 3 - 5 - 100 = -85$

1.50	a) $a^{5/21}$	c) $a^{5/2}$	e) $\frac{a^{2/3}}{16}$	g) $100a^2$	i) $a^{7/3}$	k) $a^{3/2}$
	b) $a^{2/147}$	d) $\frac{8}{27}a^2$	f) $a^{1/6}$	h) $a^{4/3}$	j) $a^{-1/2}$	l) $a^{7/10}$

- 1.51 a) $\sqrt[4]{2}$ c) $a^4 \sqrt[4]{a}$ e) a g) $a\sqrt{a}$
 b) $\sqrt[3]{a}$ d) $\sqrt[10]{a^9}$ f) $\sqrt[12]{a}$ h) 1

1.52 $\sim 25,95$

x	1	1,4	1,41	1,414	1,4142	...	$\sqrt{2}$	...	1,4143	1,415	1,42	1,5	2
10^x	10	25,12	25,70	25,94	25,95		?		25,96	26,00	26,30	31,62	100

6.2 Réponses - Exponentielles

2.1

n° de l'étape	nb de couches de papier	épaisseur totale en mm
0	1	0,1
1	2	0,2
2	4	0,4
3	8	0,8
4	16	1,6
x	2^x	$0,1 \cdot 2^x$

Il faut plier 24 fois pour dépasser 1'000'000 mm d'épaisseur.

2.2

- a) 3^x b) x^3 c) 3^x d) e^x

x^3 n'est pas une fonction exponentielle.

2.3

- a) 225 d) 3 g) 1024 j) 10 m) 10 p) $\frac{1}{4}$ s) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 b) $\frac{1}{49}$ e) $\frac{1}{2}$ h) $\frac{1}{e^5}$ k) $\frac{1}{10}$ n) e q) $\sqrt{2}$ t) $\frac{7}{6}$
 c) $\frac{1}{128}$ f) 100 i) $\frac{5}{4}$ l) $\frac{1}{10}$ o) 1 r) 4 u) $\sqrt[3]{7}$

2.4

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$\exp_{100}(x)$	$\frac{1}{10'000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000	10'000

2.5

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$
$\exp_{1/64}(x)$	64	8	4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$

2.6

- a) 14 d) 12 g) $-\frac{1}{20}$
 b) 2 e) $\frac{2}{3}$ h) 8
 c) 3 f) $\frac{13}{6}$ i) $-\frac{7}{6}$

2.7	a) $3^{4x} = 81^x$	c) 2^{x+1}	e) 7^{x^2+x-2}		
	b) 5^{x+10}	d) $1 + 3^x$	f) 3^{6x}		
2.8	a) 10^x	c) $\frac{1}{625}5^{5x}$	e) $16 \cdot 2^{4x}$	g) $9 \cdot 3^{4x}$	
	b) $32 \cdot 2^{4x}$	d) $12 \cdot 12^x$	f) $\frac{1}{9}3^{10x}$	h) $8 \cdot 2^{2x}$	
2.9	a) $\frac{a^x}{a^3} = a^{(x-3)} = \frac{1}{a^{(3-x)}}$	c) $\sqrt{a} \cdot a^{x+2} = a^{(x+5/2)}$	f) $a^{2x} \cdot (a^x)^{x+3} = a^{(x^2+5x)}$		
	b) $\frac{a}{\sqrt[5]{a^x}} = a^{(\frac{5-x}{5})}$	d) $(a^{2x+1})^{2x+1} = a^{(4x^2+4x+1)}$	g) $\left(\frac{a^{x+1}}{a^2}\right)^{x-4} = a^{(x^2-5x+4)}$		
		e) $\frac{a^x}{a^{x+3}} = a^{(-3)}$	h) $(a-3)^x \cdot (a+3)^x = (a^2-9)^x$		
2.10	a) $S = \{-1\}$	d) $S = \{-6\}$	g) $S = \{-1; 2\}$	j) $S = \{-11\}$	m) $S = \{0; 4\}$
	b) $S = \{2\}$	e) $S = \emptyset$	h) $S = \emptyset$	k) $S = \{4\}$	n) $S = \{2\}$
	c) $S = \left\{\frac{18}{7}\right\}$	f) $S = \left\{-\frac{13}{2}\right\}$	i) $S = \mathbb{R}$	l) $S = \left\{\frac{1}{28}\right\}$	o) $S = \emptyset$
2.11	a) $S = \{2\}$	b) $S = \emptyset$	c) $S = \{1; 2\}$	d) $S = \{3\}$	
2.12	a) $S = \{0\}$	b) $S = \{0; 1\}$			
2.13	a) $S = \{1\}$	d) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$	g) $S = \{-1\}$	j) $S = \emptyset$	
	b) $S = \{0; 12\}$	e) $S = \{-3\}$	h) $S = \{1\}$	k) $S = \{2\}$	
	c) $S = \left\{-\frac{10}{3}\right\}$	f) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$	i) $S = \{2\}$	l) $S = \{-1; 0\}$	

6.3 Réponses - Logarithmes

3.1	a) 6	b) 4	c) 2	d) 0	e) $\frac{1}{2}$	f) -1		
3.2	a) 6	b) -2	c) 0	d) -3	e) $\frac{1}{2}$	f) $\frac{3}{5}$	g) 1	h) $-\frac{2}{3}$
3.3	a) 4	c) 0	e) 9	g) $\frac{1}{2}$	i) $\frac{3}{5}$	k) $-\frac{6}{5}$		
	b) -4	d) 10	f) 1	h) $\frac{2}{5}$	j) -4	l) -3		
3.4	a) 2	b) -3	c) $\frac{1}{4}$	d) 1	e) 0	f) $-\frac{7}{2}$		
3.5	a) 3	b) $\frac{1}{3}$	c) -	d) $\frac{1}{3}$	e) $\frac{3}{2}$	f) $\frac{3}{4}$		

3.6

a) $\log_7(7^3) = 3$ $\log_a(a^x) = x$

b) $7^{\log_7(49)} = 49$ $a^{\log_a(y)} = y$

c) $\log_7(1) = 0$ $\log_a(1) = 0$

d) $\log_7(7) = 1$ $\log_a(a) = 1$

e) $\text{Log}(10^9 \cdot 10^5) = 14$

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

f) $\text{Log}\left(\frac{10^9}{10^5}\right) = 4$ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

g) $\text{Log}\left(\frac{1}{10^7}\right) = -7$ $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

3.7

a) $2^{7 \log_2(5)} = (2^{\log_2(5)})^7 = 5^7$

b) $a^{q \log_a(x)} = (a^{\log_a(x)})^q = x^q$

3.8

a) $6^{\log_2(13) \cdot \log_6(2)} = (6^{\log_6(2)})^{\log_2(13)} = 2^{\log_2(13)} = 13$

c) $10^{\log_a(x) \cdot \text{Log}(a)} = (10^{\text{Log}(a)})^{\log_a(x)} = a^{\log_a(x)} = x$

b) On divise le résultat précédent par $\log_6(2)$.

$\text{Log}(x) = \log_a(x) \cdot \text{Log}(a)$ donc $\log_a(x) = \frac{\text{Log}(x)}{\text{Log}(a)}$

3.9

a) 3

b) -4

c) $\frac{3}{2}$

d) -8

3.10

a) $\text{Log}(60)$

b) $\ln\left(\frac{25}{8}\right)$

c) $\ln(16)(12)$

d) $\frac{3}{2}$

3.11

a) $\sim 5,32$

b) $\sim 0,19$

c) $\sim 1,85$

d) $\sim 1,10$

3.12

a) $\log_5(2) + \log_5(3) \simeq 1,1133$

c) $\frac{1}{2} \log_5(2) \simeq 0,21535$

e) $2 \log_5(2) + 2 \log_5(3) \simeq 2,2266$

b) $4 \log_5(2) \simeq 1,7228$

d) $-\log_5(2) \simeq -0,4307$

f) $3 \log_5(2) - 3 \log_5(3) \simeq -0,7557$

3.13

a) $S = \{\log_{17}(9)\}$

b) $S = \{\log_{17}(10) - 1\} = \left\{\log_{17}\left(\frac{10}{17}\right)\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\text{Log}(2) + 6}{3}\right\} = \left\{\frac{1}{3} \text{Log}(2'000'000)\right\}$

d) $S = \left\{\frac{2 - \ln(4)}{5}\right\} = \left\{\frac{1}{5} \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)\right\}$

e) $S = \left\{\frac{1}{3} \log_2(17)\right\}$

f) $S = \{\ln(7) - 2\} = \left\{\ln\left(\frac{7}{e^2}\right)\right\}$

g) $S = \{8 - \log_5(3)\} = \left\{\log_5\left(\frac{390'065}{3}\right)\right\}$

h) $S = \left\{\frac{1 - \log_7(8)}{2}\right\} = \left\{\frac{1}{2} \log_7\left(\frac{7}{8}\right)\right\}$

i) $S = \emptyset$

3.14

a) $S = \left\{\sqrt[3]{200} - 1\right\} = \{\sim 4,85\}$

b) $S = \left\{\frac{15'625}{27}\right\} = \{\sim 578,70\}$

c) $S = \{\log_{1,2}(200)\} = \{\sim 29,06\}$

d) $S = \left\{\frac{216}{25}\right\} = \{8,64\}$

e) $S = \left\{\frac{3}{\log_{1,2}(200)}\right\} = \{\sim 0,10\}$

f) $S = \{\log_{1,2}(8'000'000)\} = \{\sim 87,18\}$

g) $S = \left\{\sqrt[4]{\frac{300}{7}} - 1\right\} = \{\sim 1,56\}$

h) $S = \left\{\frac{1}{4} \log_{1,5}\left(\frac{300}{7}\right)\right\} = \{\sim 2,32\}$

i) $S = \left\{4 \log_{1,5}\left(\frac{300}{7}\right)\right\} = \{\sim 37,07\}$

3.15 À voir en classe

3.16 a) $S = \left\{ \frac{\text{Log}\left(\frac{8}{125}\right)}{\text{Log}\left(\frac{32}{25}\right)} \right\}$ b) $S = \left\{ \frac{\text{Log}(9)}{\text{Log}(147)} \right\}$

3.17 a) $S = \{5\}$ b) $S = \{16\}$ c) $S = \{4\}$ d) $S = \{3\}$ e) $S = \{64\}$ f) $S = \{10\}$

3.18 a) $S = \left\{ \frac{e^5 - 1}{2} \right\}$ b) $S = \{125\}$ c) $S = \left\{ -\frac{3}{4} \right\}$ d) $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

3.19 a) $S = \{7\}$ b) $S = \emptyset$ (3 doit être éliminé) c) $S = \{4\}$ (-4 doit être éliminé) d) $S = \{1; 3\}$

3.20 a) $S = \{5\}$ (-2 doit être éliminé) b) $S = \{-3; 3\}$ c) $S = \{5\}$ d) $S = \emptyset$ (-5 doit être éliminé)

3.21 a) $S = \left\{ \frac{23}{41} \right\}$ $\left(-\frac{23}{6} \notin D_f \right)$ e) $S = \{2; 3\}$ g) $S = \left\{ \frac{30 + 3e}{10 - e} \right\}$
 b) $S = \{4\}$ $(-5 \notin D_f)$ d) $S = \left\{ -\frac{13}{6} \right\}$ f) $S = \left\{ -\frac{8}{3} \right\}$ h) $S = \emptyset$
 c) $S = \{2\}$

3.22 a) $S = \{(20; 5); (5; 20)\}$ = b) $S = \{(e; 1)\}$ c) $S = \{(10'000; 0,1)\}$ d) $S = \{(50; 250)\}$

6.4 Réponses - Applications

a) $2000 \cdot 1,05^{20}$ CHF 5306,60

b) $2000 \cdot 1,05^n = 4000$ $n = \log_{1,05}(2) \simeq 14,2$ au bout de 15 ans

4.1 c) $C_0 \cdot 1,05^{20} = 10'000$ $C_0 = \frac{10'000}{1,05^{20}} \simeq 3768,89$ CHF 3768,90

d) $2000 \cdot (1+i)^{20} = 10'000$ $i = \sqrt[20]{5} - 1 \simeq 8,38\%$

e) $2000 \cdot 1,005^{20}$ CHF 2209,79

4.2 3,2%

4.3 CHF $7,6 \cdot 10^{29}$

4.4 5,95%

4.5 $3 = (1,06)^x \implies x \simeq 18,85$ La somme a triplé après 19 ans.

4.6 a) $3^{t/5}$ b) $t \simeq 31,4$ heures 31 h 26 min

4.7 a) $2^{t/6} = 1'000'000$ $t = 6 \log_2(1'000'000) \simeq 119,6$ minutes environ 2 heures
 b) $1'000'000(1+i)^4 = 2'000'000$ $i = \sqrt[4]{2} - 1 \simeq 0,189$ 18,9% par heure
 $1'000'000(1+i)^{240} = 2'000'000$ $i = \sqrt[240]{2} - 1 \simeq 0,0029$ 0,29% par minute

4.8 $(0,99)^n = \frac{1}{2}$ $n = \log_{0,99}(0,5) \simeq 68,97$ en 69 ans environ

4.9 $(0,8)^n = \frac{1}{4}$ $n = \log_{0,8}(0,25) \simeq 6,21$ en approximativement 6 ans

4.10 $200'000 = x \cdot (1,0325)^{15}$ La quantité initiale de bois est d'environ 123'788 m³.

4.11 a) $15'000 = 25'000 \cdot x^{10}$ $x = \sqrt[10]{\frac{3}{5}} \simeq 0,95$ $P(t) = 25'000 \cdot \left(\sqrt[10]{\frac{3}{5}}\right)^t$
 b) $10'000 = 25'000 \cdot \left(\sqrt[10]{\frac{3}{5}}\right)^t$ $t = 10 \cdot \frac{\log(2) - \log(5)}{\log(3) - \log(5)} = 10 \cdot \frac{\log(0,4)}{\log(0,6)} \simeq 17,94$ Après 18 années.

Le deuxième placement est le plus avantageux.

4.12 1^{re} variante : $1,05^{10} \cdot 1,03^{10} = 2,189$ donc, une augmentation de 118,9%
 2^e variante : $1,04^{20} = 2,191$ donc, une augmentation de 119,1%

4.13 a) 86,03% b) 177,25%

Il est plus avantageux de fractionner le capital.

4.14 1^{re} variante : $0,5 \cdot 1,03^{10} + 0,5 \cdot 1,05^{10} = 1,486$
 2^e variante : $1,04^{10} = 1,480$

4.15 a) Production intérieure : $I_3 = 1'000'000 \cdot 1,11^3 = 1'367'631$
 Production exportation : $E_3 = 250'000 \cdot 1,4^3 = 686'000$
 Production totale en 2015 : 2'053'631 vélos
 b) $1'000'000 \cdot 1,11^t = 250'000 \cdot 1,4^t$ $4 = \left(\frac{1,4}{1,11}\right)^t \Rightarrow t \simeq 5,97$
 La production pour l'exportation dépassera la production intérieure à partir de 2018.

4.16 a) Soit t le nombre de semaines écoulées depuis la première mesure.
 Lorsque $t = 1$, on a $Q(1) = 100 \cdot a^1 = 120$ $a = 1,2$
 $Q(t) = 100 \cdot 1,2^t$
 $N(3) = 100 \cdot (1,2)^3 = 172,8$
 b) $200 = 100 \cdot (1,2)^t$
 $\Rightarrow t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,2)} \simeq 3,8$ semaines.

4.17 $Q(1) = 3000 \cdot a^1 = 3060$ $a = 1,02$ $\Rightarrow Q(t) = 3000 \cdot 1,02^t$
 $Q(12) = 3000 \cdot 1,02^{12} = 3'804,73$ Il y aura environ 3804 habitants en 2002.

4.18 a) $Q(7) = 2'510 \cdot \left(\frac{538}{251}\right)^{\frac{7}{3}} = 14'868,27$ b) $2 = \left(\sqrt[3]{\frac{538}{251}}\right)^t \Rightarrow t = 2,73$
 Il y aura environ 14868 mouches,
 après une semaine.

4.19 a) $P_{\text{dBm}} = 10 \cdot \text{Log}(1000) = 30 \text{ dbm}$
 b) $20 = 10 \cdot \text{Log}(P_{\text{mW}})$ $2 = \text{Log}(P_{\text{mW}})$ $P_{\text{mW}} = 100 \text{ mW}$
 c) $17 \text{ dBm} \leftrightarrow 50,12 \text{ mW}$ $23 \text{ dBm} \leftrightarrow 199,53 \text{ mW}$ $30 \text{ dBm} \leftrightarrow 1000 \text{ mW}$ $10 \text{ dBm} \leftrightarrow 10 \text{ mW}$
 d) $100 \text{ dBm} \leftrightarrow 10^7 \text{ W} = 10 \text{ MW}$
 e) $103 \text{ dBm} \leftrightarrow 20 \text{ MW}$
 La puissance sonore a doublé, elle est donc de 10 MW supérieure à la limite légale !

Références

- [1] S. Amaudruz : Puissances, racines, exponentielles et logarithmes. CADEV - n° 30'014, 2013.
- [2] H. Bovet : Analyse. CH-1608 Oron-le-Châtel, 1999.
- [3] H. Bovet : Algèbre. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2001.
- [4] CRM : Fondamentum de mathématique - Analyse. Num. 25 de Monographies de la CRM. CRM, 2400 Le Locle, g d'encre édn, 2014.
- [5] J.-P. Javet : Puissances, racines, exponentielles et logarithmes. <http://www.gymomath.ch>, 2016.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch

sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 1^{er} juillet 2026