

3M standard

Mathématiques

Sarah Delmonico

Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2023-2024

Table des matières

1 Révision et quelques compléments sur les fonctions	2
1.1 Résolution d'équations polynomiales et factorisation de polynômes	2
1.2 Résolution d'équations exponentielles et logarithmiques	4
1.3 Résolution d'équations trigonométriques	6
1.4 Ensemble de définition	8
1.5 Zéros et étude du signe de la fonction	9
1.6 Dérivées	12
1.7 Croissance	15
1.8 Asymptotes verticales, trous et points limites	18
1.9 Asymptotes horizontales et obliques	20
2 Optimisation	21
2.1 Problèmes concrets	22
2.2 Problèmes trigonométriques	23
2.3 Problèmes mathématiques	24
3 Intégration	25
3.1 Primitives et intégrale indéfinie	25
3.2 Aire algébrique et intégrale définie	32
3.3 Calcul d'aires géométriques	37
3.4 Calcul du volume d'un solide de révolution	41
4 Fonctions exponentielles	44
4.1 Rappels	44
4.2 Limites de fonctions exponentielles dont l'exposant est une fonction	47
4.3 Calcul de limite de fonctions exponentielles à l'aide du théorème de Bernoulli-L'Hospital . . .	49
4.4 Calcul de limite de fonctions exponentielles à l'aide de la règle du plus fort.	49
5 Fonctions logarithmiques	52
5.1 Rappels	52
5.2 Calcul de limites de fonctions logarithmiques à l'aide du théorème de Bernoulli-L'Hospital . .	57
5.3 Calcul de limites de fonctions logarithmiques à l'aide de la règle du plus fort	58
5.4 Étude de fonctions logarithmiques	59
5.5 Primitive de logarithmes	61
5.6 Fonctions exponentielles et logarithmes de base a	61
6 Exercices	62
6.1 Révision sur les fonctions	62
6.2 Optimisation	66
6.3 Intégration	71
6.4 Fonctions exponentielles	81
6.5 Fonctions logarithmiques	85
7 Solutions	89
7.1 Réponses - Révision sur les fonctions	89
7.2 Réponses - Optimisation	93
7.3 Réponses - Intégration	97
7.4 Réponses - Fonctions exponentielles	103
7.5 Réponses - Fonctions logarithmiques	108

1 Révision et quelques compléments sur les fonctions

1.1 Résolution d'équations polynomiales et factorisation de polynômes

Pour étudier des fonctions ou résoudre des problèmes algébriquement, il est indispensable de savoir factoriser et résoudre des équations.

- Si c'est possible, on commence par **mettre en évidence**.

La suite dépend du degré.

Pour le **deuxième degré**, on choisit parmi les méthodes suivantes :

- Identités remarquables

Exemples :

a) Résoudre $9x^3 - 4x = 0$.

$$x(9x^2 - 4) = 0 \quad x(3x + 2)(3x - 2) = 0 \quad S = \left\{ 0 ; -\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} \right\}$$

b) Résoudre $16x^2 = 8x - 1$.

$$16x^2 - 8x + 1 = 0 \quad (4x - 1)^2 = 0 \quad S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$$

- Trinôme unitaire

Exemple : Factoriser $-x^2 - 2x + 15$.

$$-x^2 - 2x + 15 = -(x^2 + 2x - 15) = -(x + 5)(x - 3)$$

- Formule

Exemple : Factoriser $10x^2 - 13x - 3$.

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-3) = 289 \quad \frac{-(-13) + \sqrt{289}}{2 \cdot 10} = \frac{3}{2} \quad \frac{-(-13) - \sqrt{289}}{2 \cdot 10} = -\frac{1}{5}$$

$$10x^2 - 13x - 3 = 10 \left(x - \frac{3}{2} \right) \left(x + \frac{1}{5} \right) = (2x - 3)(5x + 1)$$

Pour les **degrés plus élevés**, on choisit parmi les méthodes suivantes :

• Identités remarquables

Exemple : Factoriser $9x^3 - \frac{125}{3}$.

$$9x^3 - \frac{125}{3} = \frac{1}{3}(27x^3 - 125) = \frac{1}{3}(3x - 5)(9x^2 + 15x + 25)$$

• Changement de variable

Exemple : Résoudre $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$.

$$y = x^2 \quad y^2 = x^4 \quad y^2 - 5y - 14 = 0 \quad (y - 7)(y + 2) = 0 \quad y = 7 \quad y = -2$$

$$x = \pm\sqrt{7} \quad S = \{\pm\sqrt{7}\}$$

• Groupement

Exemple : Factoriser $3x^4 - x^3 + 3x - 1$.

$$3x^4 - x^3 + 3x - 1 = x^3(3x - 1) + 1(3x - 1) = (x^3 + 1)(3x - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(3x - 1)$$

• Division

Exemple : Résoudre $6x^3 - 17x^2 - 4x + 3 = 0$.

"suspects" : les diviseurs de 3 donc ± 1 et ± 3

$$P(1) = 6 - 17 - 4 + 3 \neq 0 \quad P(-1) = -6 - 17 + 4 + 3 \neq 0 \quad P(3) = 162 - 153 - 12 + 3 = 0$$

3 est donc "coupable".

On divise $6x^3 - 17x^2 - 4x + 3 = 0$ par $x - 3$ et on écrit l'égalité fondamentale.

$$6x^3 - 17x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(6x^2 + x - 1)$$

On résout $x - 3 = 0$ et $6x^2 + x - 1 = 0$.

$$S = \left\{ 3 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} \right\}$$

ex. 1.1

1.2 Résolution d'équations exponentielles et logarithmiques

Une **équation exponentielle** est une équation dans laquelle la variable apparaît en exposant.

- On essaie **d'isoler l'exponentielle** pour appliquer $\log_a$ et le fait que $\log_a(a^k) = k \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $k \in \mathbb{R}$.

Exemple : $9^{5x-1} + 4 = 7$.

$$9^{5x-1} = 3 \quad 5x - 1 = \log_9(3) \quad 5x - 1 = \frac{1}{2} \quad x = \frac{3}{10} \quad S = \left\{ \frac{3}{10} \right\}$$

ou

$$(3^2)^{5x-1} = 3 \quad 3^{2(5x-1)} = 3^1 \quad 10x - 2 = 1 \quad x = \frac{3}{10} \quad S = \left\{ \frac{3}{10} \right\}$$

- Dans certains cas, il faut faire un changement de variable.

Exemples :

a) $4^{x+1} - 21 \cdot 2^x = -5$

$$4^1 \cdot 4^x - 21 \cdot 2^x + 5 = 0$$

$$y = 2^x \quad y^2 = 4^x \quad 4y^2 - 21y + 5 = 0 \quad y = \frac{1}{4} \text{ ou } y = 5$$

$$x = -2 \text{ ou } x = \log_2(5) \quad S = \{-2 ; \log_2(5)\}$$

b) $1 + e^{-x} = 2 \cdot e^{-2x}$

$$1 + e^{-x} - 2 \cdot e^{-2x} = 0 \quad \text{On multiplie par } e^{2x}. \text{ On a le droit car } e^{2x} \neq 0. \quad e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

$$y = e^x \quad y^2 = e^{2x} \quad y^2 + y - 2 = 0 \quad (y+2)(y-1) = 0 \quad y = -2 \text{ ou } y = 1$$

$$x = \ln(1) = 0 \quad S = \{0\}$$

Remarques :

$\log_a(x)$ n'est pas défini si $x \leq 0$

$\log_a(1) = 0$

$\log_a(a) = 1$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\text{Log}(x)}{\text{Log}(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

ex. 1.2 à 1.4

Une **équation logarithmique** est une équation dans laquelle la variable apparaît dans un logarithme.

- On essaie **d'isoler le logarithme** avant d'appliquer $\exp_a$.

On peut parfois utiliser les propriétés des logarithmes pour y arriver :

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^q) = q \log_a(x)$$

Remarque : Comme l'utilisation des propriétés des logarithmes peut générer des solutions "parasites", il faut contrôler que les réponses obtenues ne posent pas de problème dans l'équation de départ. $\log_a(x)$ n'est pas défini si $x \leq 0$.

Exemples :

a) $\log_2(x^2 - 3) = 0$

$$x^2 - 3 = 2^0 \quad x^2 - 3 = 1 \quad x^2 = 4 \quad x = \pm 2 \quad \text{Vérifications : } \log_2(4 - 3) = 0 \quad S = \{\pm 2\}$$

b) $2\ln(7x - 3) - 1 = 4$

$$\ln(7x - 3) = \frac{5}{2} \quad 7x - 3 = e^{5/2} \quad 7x - 3 = \sqrt{e^5} \quad x = \frac{\sqrt{e^5} + 3}{7}$$

$$\text{Vérification : } 2\ln(\sqrt{e^5} + 3 - 3) - 1 = 4 \quad S = \left\{ \frac{\sqrt{e^5} + 3}{7} \right\}$$

c) $\text{Log}(3x - 4) + \text{Log}(10x - 4) = 2\text{Log}(5x - 2)$

$$\text{Log}((3x - 4)(10x - 4)) = \text{Log}((5x - 2)^2) \quad (3x - 4)(10x - 4) = (5x - 2)^2 \quad 30x^2 - 52x + 16 = 25x^2 - 20x + 4$$

$$5x^2 - 32x + 12 = 0 \quad x = \frac{2}{5} \text{ ou } x = 6$$

Vérifications :

On doit éliminer $\frac{2}{5}$ car on obtient des Log de nombres négatifs et des Log(0) en remplaçant dans l'équation de départ.

$$\text{Log}(18 - 4) + \text{Log}(60 - 4) = 2\text{Log}(30 - 2)$$

$$S = \{6\}$$

ex. 1.5 à 1.6

1.3 Résolution d'équations trigonométriques

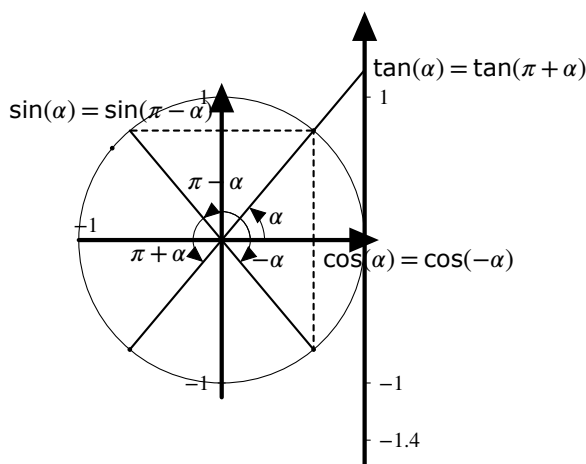
Les solutions des équations trigonométriques doivent être données en radians.

Une équation trigonométrique a soit une infinité de solutions, soit aucune solution. Dès que l'on trouve une solution, il suffit d'ajouter un nombre entier de tours, donc $k \cdot 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, pour obtenir une autre solution.

La calculatrice permet de trouver une des solutions en utilisant les fonctions $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ et $\tan^{-1}$.

Le tableau des valeurs particulières devra être utilisé chaque fois qu'il est possible d'obtenir des valeurs exactes.

En utilisant le cercle trigonométrique et les symétries, on trouve la deuxième "famille" de solutions.



$$\bullet \sin(x) = c \text{ avec } c > 1 \text{ ou } c < -1 \implies S = \emptyset$$

$$\bullet \cos(x) = c \text{ avec } c > 1 \text{ ou } c < -1 \implies S = \emptyset$$

Exemple : $\sin(3x+2) = 6 \implies S = \emptyset$

$$\bullet \sin(x) = c \text{ avec } -1 \leq c \leq 1 \implies S = \{\sin^{-1}(c) + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \sin^{-1}(c) + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple : Résoudre et énumérer quelques solutions : $2\sin(x) + 3 = 2$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \quad \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \quad \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6}$$

$$S = \left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\dots \quad -\frac{13\pi}{6} \quad -\frac{\pi}{6} \quad \frac{11\pi}{6} \quad \frac{23\pi}{6} \quad \dots \quad \text{et} \quad \dots \quad -\frac{17\pi}{6} \quad -\frac{5\pi}{6} \quad \frac{7\pi}{6} \quad \frac{19\pi}{6} \quad \dots$$

$$\bullet \cos(x) = c \text{ avec } -1 \leq c \leq 1 \implies S = \{\cos^{-1}(c) + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\cos^{-1}(c) + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple : Résoudre et énumérer quelques solutions : $2\cos(3x) - \sqrt{2} = 0$

$$\cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad 3x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad x = \pm \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}$$

$$S = \left\{\pm \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\dots \quad -\frac{15\pi}{12} \quad -\frac{7\pi}{12} \quad \frac{\pi}{12} \quad \frac{9\pi}{12} \quad \dots \quad \text{et} \quad \dots \quad -\frac{17\pi}{12} \quad -\frac{9\pi}{12} \quad -\frac{\pi}{12} \quad \frac{7\pi}{12} \quad \dots$$

$$\bullet \tan(x) = c \text{ avec } c \in \mathbb{R} \implies S = \{\tan^{-1}(c) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple : Résoudre et énumérer quelques solutions : $\tan^2(x + \frac{\pi}{4}) = 3$

$$\begin{aligned} \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= 3 & \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \pm\sqrt{3} & \tan^{-1}(\sqrt{3}) &= \frac{\pi}{3} & \tan^{-1}(-\sqrt{3}) &= -\frac{\pi}{3} \\ x + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{3} + k\pi & x &= \frac{\pi}{12} + k\pi & x + \frac{\pi}{4} &= -\frac{\pi}{3} + k\pi & x &= -\frac{7\pi}{12} + k\pi \\ S &= \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{7\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ \dots & -\frac{11\pi}{12} & \frac{\pi}{12} & \frac{13\pi}{12} & \frac{25\pi}{12} & \dots & \text{et} & \dots & -\frac{19\pi}{12} & -\frac{7\pi}{12} & \frac{5\pi}{12} & \frac{17\pi}{12} & \dots \end{aligned}$$

• Dans certains cas, il faut faire un changement de variable.

Exemple : $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$

$$\begin{aligned} y &= \cos(x) & 2y^2 + y - 1 &= 0 & y &= \frac{1}{2} \text{ et } y = -1 & \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{3} & \cos^{-1}(-1) &= \pi \\ S &= \left\{\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

• Dans certains cas, il faut utiliser les propriétés des rapports trigonométriques :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{et} \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Exemples :

a) $\sin(x) + \cos(x) = 0$

$$\sin(x) = -\cos(x) \quad \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -1 \quad \tan(x) = -1 \quad \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

$$S = \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Remarque : On ne peut diviser par $\cos(x)$ que si $\cos(x) \neq 0$. Il faut donc vérifier si $\cos(x) = 0$ donne aussi des solutions de l'équation de départ. Cela n'est pas le cas.

b) $\cos^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$

$$1 - \sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0 \quad \sin^2(x) - \sin(x) = 0$$

$$y = \sin(x) \quad y^2 - y = 0 \quad y = 1 \text{ et } y = 0 \quad \sin^{-1}(0) = 0 \quad \pi - 0 = \pi \quad \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ex. 1.7 à 1.8

1.4 Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** d'une fonction f donnée par son expression algébrique est l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe. On le note ED_f ou D_f ou encore $E_D(f)$.

Nous appellerons **valeurs interdites** les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ n'existe pas, donc qui ne sont pas dans l'ensemble de définition.

- Lorsqu'il n'y a pas de valeurs interdites, l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Exemples : L'ensemble de définition de $f(x) = 7x^3 - x^2 - 28x + 4$, de $g(x) = e^{4x-1}$ et de $h(x) = 4\sin(5x)$ est $\mathbb{R}$.

- Lorsqu'il y a une division, les zéros du dénominateur sont des valeurs interdites.

Exemple : Quel est l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{x-5}{4x^4 - 37x^2 + 9}$?

$$4x^4 - 37x^2 + 9 = 0 \quad y = x^2 \quad 4y^2 - 37y + 9 = 0 \quad y = 9 \text{ ou } y = \frac{1}{4} \quad x = \pm 3 \text{ ou } x = \pm \frac{1}{2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -3; 3; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$$

- Pour $\tan(f(x))$, les solutions de $f(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ sont des valeurs interdites.

Exemple : Quel est l'ensemble de définition de $g(x) = 8 + \tan(7x)$?

$$7x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad x = \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{7}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{7} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- Pour trouver l'ensemble de définition de la fonction $\sqrt{p(x)}$ il faut résoudre l'inéquation $p(x) \geq 0$ en faisant le tableau des signes de $p(x)$.

Exemple : Quel est l'ensemble de définition de $h(x) = \sqrt{\frac{7-x}{x+3}}$?

	-3		7	
$7-x$	+	0	+	-
$x+3$	-	0	+	+
$\frac{7-x}{x+3}$	-		+	-

$$D_h =]-3; 7]$$

- Pour trouver l'ensemble de définition de la fonction $\ln(p(x))$ il faut résoudre l'inéquation $p(x) > 0$ en faisant le tableau des signes de $p(x)$.

Exemples : Quels sont les ensembles de définition de $i(x) = \ln(x^2 - 7)$ et de $j(x) = \ln(|x^2 - 7|)$?

	$-\sqrt{7} \quad \sqrt{7}$				
$x^2 - 7$	+	0	-	0	+

	$-\sqrt{7} \quad \sqrt{7}$				
$ x^2 - 7 $	+	0	+	0	+

$$D_i =]-\infty; -\sqrt{7}[\cup]\sqrt{7}; +\infty[\quad D_j = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$$

ex. 1.9

1.5 Zéros et étude du signe de la fonction

Pour étudier le signe d'une fonction, il faut commencer par déterminer son ensemble de définition et ses zéros.

Exemples : Étudier le signe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{25 - 4x^2}$

b) $g(x) = 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1$

c) $h(x) = \sqrt{25 - x^2} - 3$

d) $f(x) = (x - 1)e^{x+4}$

e) $g(x) = \frac{2 + e^x}{2 - e^x}$

f) $h(x) = \ln(x + 3)$

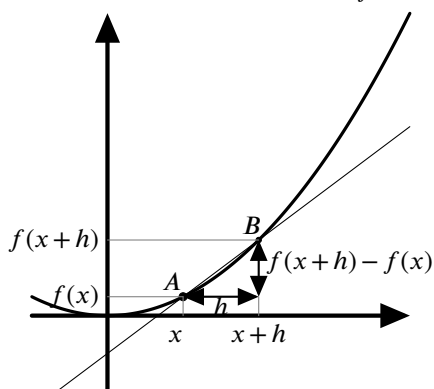
1.6 Dérivées

Pour déterminer la dérivée d'une fonction, on utilise les règles de calcul ci-dessous :

- **Règle de base n°1 :** $[x^k]' = kx^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$
- **Règle de base n°2 :** $[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$
- **Règle de la somme :** $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- **Règle du produit :** $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- **Règle du quotient :** $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
- **Règle de la puissance :** $[f(x)^k]' = k \cdot f'(x) \cdot f(x)^{k-1}$
- **Règles du sinus :** $[\sin(x)]' = \cos(x)$ $[\sin(f(x))]' = f'(x) \cdot \cos(f(x))$
- **Règles du cosinus :** $[\cos(x)]' = -\sin(x)$ $[\cos(f(x))]' = -f'(x) \cdot \sin(f(x))$
- **Règles de la tangente :** $[\tan(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
 $[\tan(f(x))]' = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} = f'(x) \cdot (1 + \tan^2(f(x)))$
- **Règles de l'exponentielle :** $[e^x]' = e^x$ $[e^{f(x)}]' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
- **Règles du logarithme :** $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$ $[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- **Règle de la composition :** $[(g \circ f(x))]' = [(g(f(x)))]' = f'(x) \cdot g'(f(x))$

Lorsque des puissances sont à l'intérieur d'un produit ou d'un quotient, il est conseillé de procéder par **mise en évidence** juste après avoir appliqué la formule de dérivation.

Ces règles ont été prouvées en partant de la définition de la dérivée :



$$f'(x) = \text{pente de la tangente en } (x; f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ex. 1.12 à 1.14

Exemples :

$$\text{a) } \left[\frac{4x^9 + 5x + 6}{3x} \right]' =$$

$$\text{b) } \left[\sqrt{4x^3 + 5} \right]' =$$

$$\text{c) } \left[\sin^7(4x) \right]' =$$

d) $[(x^2 + 1)^3(5x + 6)^4]' =$

ex. 1.15

e) $[5e^{x^2+3}]' =$

f) $[\ln(7x^5 + 3)]' =$

ex. 1.16

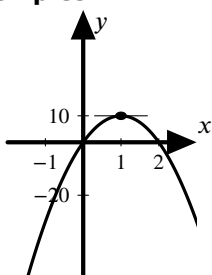
1.7 Croissance

Comme la dérivée de f est la fonction qui donne, pour chaque x , la valeur de **la pente de la tangente** au graphe de f en $(x; f(x))$, on a que :

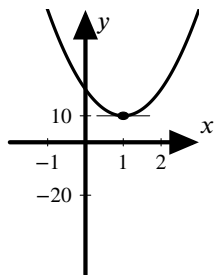
- La fonction est décroissante ($\searrow$), lorsque $f'(x)$ est négatif.
- La fonction est croissante ($\nearrow$), lorsque $f'(x)$ est positif.
- Si $f'(x) = 0$, le point $(x; f(x))$ est soit un **extremum local** (**maximum local** ou **minimum local**), soit un **plat**.

Le **tableau de croissance** de f est donc le tableau des signes de f' avec l'analyse de la croissance et les coordonnées des extremums locaux et des plats.

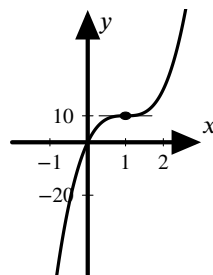
Exemples :



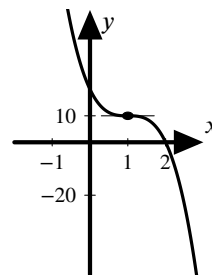
x		1	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	MAX (1; 10)	$\searrow$



x		1	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	MIN (1; 10)	$\nearrow$



x		1	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	plat (1; 10)	$\nearrow$



x		1	
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$\searrow$	plat (1; 10)	$\searrow$

Exemple :

- a) Étudier la croissance et faire une esquisse du graphe de $f(x) = x^5(x-9)^4 - 45'000$.

- b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de $f(x) = x^5(x-9)^4 - 45'000$ au point d'abscisse $x = -1$.

ex. 1.17 à 1.18

Un **maximum global** de f est un point $(x; f(x))$ tel que $f(x) \geq f(y) \forall y \in D_f$.

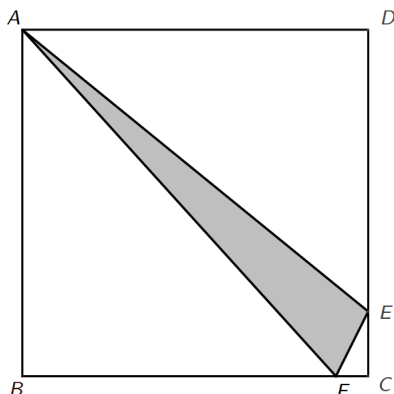
Un **minimum global** de f est un point $(x; f(x))$ tel que $f(x) \leq f(y) \forall y \in D_f$.

Dans les problèmes d'optimisation, on cherche généralement les extremums globaux d'une fonction. Pour les trouver, il faut chercher les extremums locaux et les comparer entre-eux ainsi qu'aux images des éventuelles bornes de l'ensemble de variation de x .

Exemple : Trouver les extremums globaux de la fonction $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ sur l'intervalle $\left[-4; \frac{1}{2}\right]$.

ex. 1.19

Exemple : Soit un carré $ABCD$ de 36 cm de côté, E un point du segment CD et x la longueur de EC . Soit encore F un point du segment BC tel que la longueur de CF vaut $\frac{x}{2}$. Pour quelle valeur de x l'aire du triangle AEF est-elle maximale ?



Les exercices d'optimisation seront travaillé dans le chapitre suivant.

1.8 Asymptotes verticales, trous et points limites

Pour déterminer les **trous** et les **asymptotes verticales**, il faut calculer **les limites vers les valeurs interdites**.

On se rappellera que dans les calculs de limites :

- $\frac{k}{0} = \infty$ si $k \neq 0$
- $\frac{0}{0}$ est indéterminé et qu'il faut donc simplifier la fonction ou utiliser le théorème de la page suivante.

Si a est une valeur interdite de f et que :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ alors la droite $x = a$ est une **asymptote verticale**.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ alors le point $(a; b)$ est un **trou**.

Les **points limites** correspondent aux bords de l'ensemble de définition. Ils peuvent être des trous ou des points normaux. Il faut déterminer leurs coordonnées. Il y a parfois une asymptote verticale au lieu d'un point limite.

Exemples : Déterminer les points limites, les trous et les asymptotes verticales des fonctions-ci-dessous.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 4x + 3}$

b) $g(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 + x - 2}$

Il est parfois pratique d'utiliser le **théorème de Bernoulli-l'Hospital** :

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et deux fonctions F et G , dérivables dans un voisinage de a avec $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = 0$, ou $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = \infty$, et telles que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)}$ existe. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)}$$

Exemples : Déterminer les trous et les asymptotes verticales des fonctions-ci-dessous.

a) $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$

b) $g(x) = \frac{x^{20} - 1}{x - 1}$

ex. 1.20

1.9 Asymptotes horizontales et obliques

Pour déterminer si il y a des asymptotes horizontales ou obliques, il faut calculer les **limites vers l'infini**.

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ alors la droite $y = b$ est une **asymptote horizontale**.

Pour les **fonctions rationnelles** $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0}$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$, on a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

On a donc les cas suivants :

- si $n < m$: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_m x^{m-n}} = \frac{a_n}{\infty} = 0$ donc la droite $y = 0$ est une **asymptote horizontale**.
- si $n = m$: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$ donc la droite $y = \frac{a_n}{b_m}$ est une **asymptote horizontale**.
- si $n = m + 1$: Il y a une **asymptote oblique**. On trouve son équation en faisant la **division**.
- si $n > m + 1$: Il n'y a **pas d'asymptotes** horizontales ou obliques.

En cas d'asymptotes horizontales ou obliques, on étudie la **position du graphe de la fonction par rapport à l'asymptote** en étudiant le signe de $\delta(x)$ qui est le reste de la division sur le diviseur. $\delta(x)$ est la fonction qui calcule la distance algébrique entre le graphe et l'asymptote. Elle est donc strictement positive si et seulement si le graphe est au-dessus de l'asymptote.

Exemples : Déterminer les asymptotes horizontales et obliques des fonctions-suivantes. Étudier la position du graphe de la fonction par rapport à l'asymptote.

a) $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 + x^2 - 24x}{x^3 - 8}$

b) $g(x) = \frac{5x^4 - 2x - 37}{x^4 - 9}$

ex. 1.21 à 1.22

Les calculs de limites de fonctions exponentielles ou logarithmiques seront vues pus tard.

2 Optimisation

Les problèmes d'optimisation sont des problèmes où l'on cherche à déterminer quand une mesure sera maximum ou minimum.

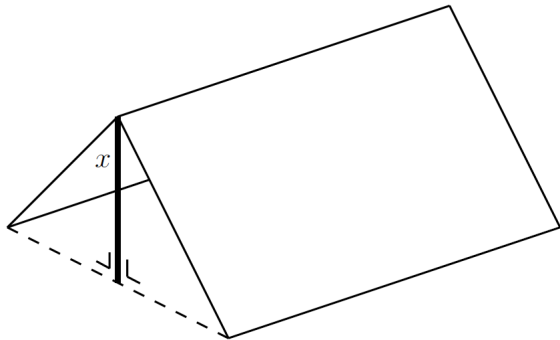
Nous allons procéderons selon le plan ci-dessous :

- lire soigneusement tout le problème et effectuer éventuellement un croquis de la situation ;
- déterminer les variables avec leur unité ;
- écrire les équations liant les différentes variables ;
- définir la quantité à optimiser avec son unité et l'exprimer en fonction des variables choisies ;
- substituer pour n'avoir plus qu'une seule variable dans la fonction ;
- déterminer E_V le domaine de variation de cette variable ;
- étudier la croissance de cette fonction en se limitant à E_V ;
- comparer les extremums trouvés avec les valeurs obtenues au bord du domaine de variation ;
- donner la réponse au problème à l'aide d'une phrase, sans oublier les unités.

2.1 Problèmes concrets

Exemple : On dispose d'une toile carrée de 2 m de côté. Elle est posée, en son milieu, sur un fil tendu entre deux piquets verticaux de hauteur x .

Quelle doit-être la hauteur x des piquets pour que le volume de la tente soit maximal ?



ex. 2.1 à 2.5

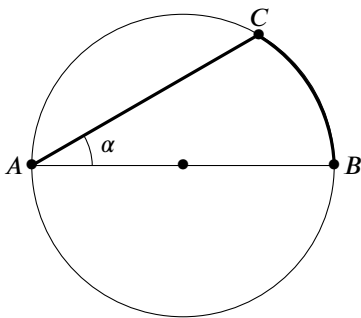
Problèmes exponentiels :

ex. 2.6 à 2.7

2.2 Problèmes trigonométriques

Exemple : Cédric part d'un point A situé au bord d'un lac circulaire de 2 km de rayon et veut atteindre le point B diamétralement opposé. Il se déplace en barque à la vitesse de 2 km/h et à pieds à la vitesse de 4 km/h.

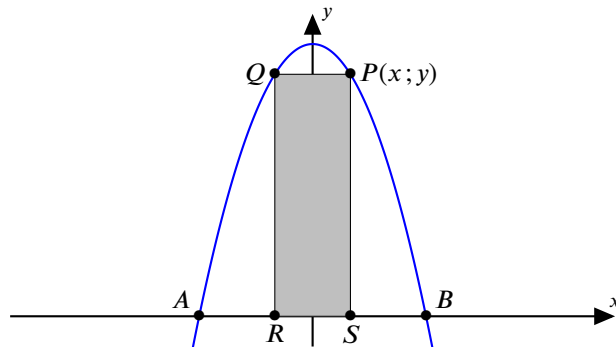
- a) Quel est le temps minimum pour ce trajet ?
- b) Quel est le temps maximum pour ce trajet ?



ex. 2.8 à 2.10

2.3 Problèmes mathématiques

Exemple :



Soit P un point d'abscisse et d'ordonnée positives se trouvant sur la parabole d'équation $y = -x^2 + 9$.

On considère le rectangle $PQRS$ où Q est sur la parabole et R et S sur l'axe Ox .

Calculer les coordonnées du point P pour que l'aire du rectangle $PQRS$ soit maximale.

ex. 2.11 à 2.16

3 Intégration

3.1 Primitives et intégrale indéfinie

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

On dit qu'une fonction F , définie sur I , est une **primitive** de f sur I , si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

En d'autres termes, **rechercher une primitive revient à effectuer l'opération inverse de la dérivée.**

Exemples :

- Trouver trois primitives de $f(x) = 10x - 3$.

- Trouver trois primitives de $f(x) = 6x^2$.

Si F est une primitive de f , $G(x) = F(x) + c$ est aussi une primitive de f quelque soit $c \in \mathbb{R}$.

Si F est une primitive de f , toute primitive G de f est de la forme $G(x) = F(x) + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Preuve : Comme F et G sont des primitives de f , on a : $G'(x) = f(x) = F'(x)$. D'où :

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Or seuls les nombres ont une dérivée nulle. Donc $G(x) - F(x)$ est un nombre que nous appellerons c .

$$G(x) - F(x) = c \quad \implies \quad G(x) = F(x) + c$$

#

Il existe donc une infinité de primitives de f . On appelle **intégrale indéfinie** de f , noté $\int f(x) dx$, l'ensemble des primitives de f .

Si F est une primitive de f , on écrit alors :

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \forall c \in \mathbb{R}$$

Exemple :

- a) Montrer que $F(x) = 3\sqrt[3]{2x+7}$ est une primitive de $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{(2x+7)^2}}$.

- b) Déterminer $\int f(x) dx$.

ex. 3.1 à 3.9

Intégrales de fonctions élémentaires

$f(x)$	$\int f(x) dx$
0	$c, \forall c \in \mathbb{R}$
λ avec $\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda x + c, \forall c \in \mathbb{R}$
x^q avec $q \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{q+1}}{q+1} + c, \forall c \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c, \forall c \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c, \forall c \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c, \forall c \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c, \forall c \in \mathbb{R}$
e^x	$e^x + c, \forall c \in \mathbb{R}$

Preuve :

- $c' = 0$
- $[\lambda x]' = \lambda$
- $\left[\frac{x^{q+1}}{q+1} \right]' = \frac{(q+1)x^q}{q+1} = x^q$
- $[\ln(|x|)]' = \frac{1}{x}$
- $[\sin(x)]' = \cos(x)$
- $[-\cos(x)]' = -(-\sin(x)) = \sin(x)$
- $[\tan(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $[e^x]' = e^x$

Exemples :

a) $\int 3 dx =$

b) $\int x dx =$

c) $\int x^7 dx =$

d) $\int \frac{1}{x^6} dx =$

e) $\int \sqrt{x} dx =$

f) $\int \sqrt[3]{x} \, dx =$

g) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx =$

Propriétés des intégrales indéfinies

Soit f et g deux fonctions admettant une primitive sur un intervalle I .

$$\int \lambda f(x) \, dx = \lambda \int f(x) \, dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

Preuve : Soit F une primitive de f et G une primitive de g .

- $[\lambda F(x)]' = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$ donc $\int \lambda f(x) \, dx = \lambda F(x) + c = \lambda \left(F(x) + \frac{c}{\lambda} \right) = \lambda \int f(x) \, dx.$

- $[F(x) \pm G(x)]' = [F(x)]' \pm [G(x)]' = f(x) \pm g(x)$
 donc $\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = F(x) \pm G(x) + c = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx.$

#

Exemples : Calculer :

a) $\int (7x^2 + 5x - 1) \, dx =$

b) $\int 2\sqrt[3]{x^2} \, dx =$

c) $\int \frac{3 + x^4 + 2x^3 - x^5}{x^4} \, dx =$

ex. 3.10 à 3.14

Propriété des intégrales avec dérivée interne

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I avec $g \circ f$ continue sur I . On a $\forall x \in I$:

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) \, dx = G(f(x)) + c \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ et avec } G \text{ une primitive de } g$$

Preuve :

$$[G(f(x))] = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x) \quad \text{donc} \quad \int g(f(x)) \cdot f'(x) \, dx = G(f(x)) + c. \quad \#$$

Exemples : Calculer :

a) $\int x^5 \, dx =$

b) $\int (4x+7)^5 \, dx =$

c) $\int \sqrt[5]{5x-6} \, dx =$

d) $\int \frac{3}{(6x+7)^4} \, dx =$

e) $\int (\cos(2x) - \sin(3x)) \, dx =$

f) $\int e^{7x+1} \, dx =$

ex. 3.15

Exemples : Calculer :

a) $\int (x^3 - 1)^2 dx =$

b) $\int x^2(x^3 - 1)^2 dx =$

c) $\int \frac{x}{(3x^2 - 4)^3} dx =$

d) $\int \frac{x}{3x^2 - 4} dx =$

ex. 3.16 à 3.18

e) $\int \cos(x) \sin^2(x) dx =$

ex. 3.19

f) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx =$

ex. 3.20 à 3.21

Primitives de fractions rationnelles

$$\text{Si } n \neq 1, \quad \int \frac{g'(x)}{g^n(x)} dx =$$

Exemples :

$$\text{a) } \int \frac{7}{(x+3)^5} dx =$$

$$\text{b) } \int \frac{x}{(5x^2+4)^3} dx =$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx =$$

Exemples :

$$\text{a) } \int \frac{1}{x+3} dx =$$

$$\text{b) } \int \frac{7}{x+3} dx =$$

$$\text{c) } \int \frac{10x}{5x^2+4} dx =$$

$$\text{d) } \int \frac{x}{5x^2+4} dx =$$

$$\text{e) } \int \frac{15x^3+5}{3x^4+4x-1} dx =$$

ex. 3.22

On peut remarquer que les fractions rationnelles concernées par les deux dernières formules ont forcément un numérateur de degré inférieur au dénominateur. Que faire si cela n'est pas le cas ?

Prenons l'exemple de la fonction $f(x) = \frac{3x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x}{x^2 - x + 1}$.

- La première chose à faire est d'effectuer la **division euclidienne** pour trouver le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$.

- On écrit ensuite la fonction sous la forme $f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ où $D(x)$ est le dénominateur de $f(x)$.

- On pourra finalement déterminer la primitive cherchée si $\int \frac{R(x)}{D(x)} dx$ est une des deux situations de la page précédente.

Exemple : $\int \frac{3x^3 - 8x^2 + 7x - 1}{x^2 - 2x + 1} dx =$

ex. 3.23 à 3.24

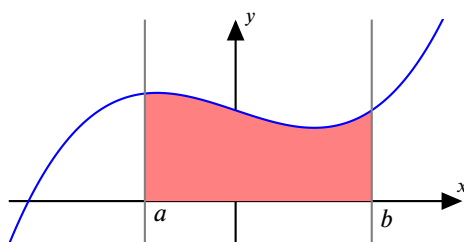
ex. 3.25 à 3.26

3.2 Aire algébrique et intégrale définie

Depuis l'antiquité, les mathématiciens cherchent le moyen de calculer des aires. On doit à *Archimède* les travaux les plus intéressants en la matière. (aires bornées par des paraboles, par des spirales, ...).

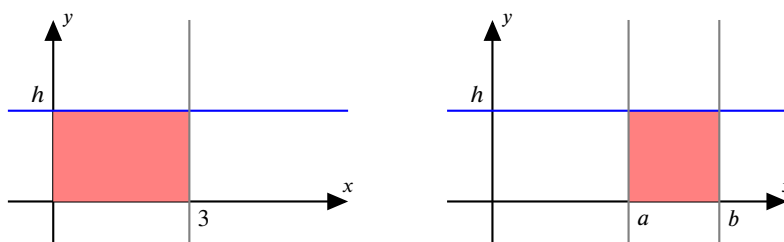
Il faut attendre le XVII^e siècle pour obtenir une avancée significative par *Newton* et *Leibniz*. Ils ont découvert une méthode générale de calcul d'aires bornées par des courbes, en lien avec leur théorie du calcul infinitésimal (dérivées).

Notre but est de calculer l'aire du domaine borné, limité par le graphe $y = f(x)$ et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ et $y = 0$.



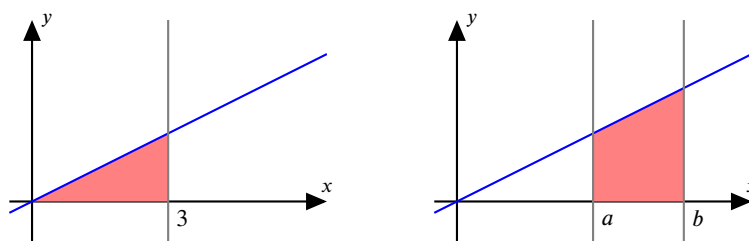
Commençons par observer quelques exemples simples.

Exemple : Soit $h \in \mathbb{R}$ et f la fonction constante définie par $f(x) = h$.



- Quelle est l'aire $A(3)$ du domaine borné, limité par le graphe $y = f(x)$ et les axes et la droite d'équation $x = 3$?
- Quelle est l'aire $A(a; b)$ du domaine borné, limité par le graphe $y = f(x)$ et les axes et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$?

Exemple : Soit $m \in \mathbb{R}$ et f la fonction linéaire définie par $f(x) = mx$.



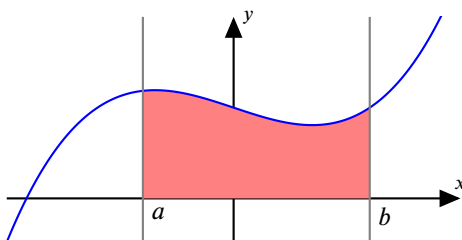
- Quelle est l'aire $A(3)$ du domaine borné par le graphe $y = f(x)$, les axes et la droite d'équation $x = 3$?
- Quelle est l'aire $A(a; b)$ du domaine borné par le graphe $y = f(x)$, les axes et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$?

L'aire que nous avons utilisée jusqu'à présent est appelée **aire géométrique**.

Soit $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.

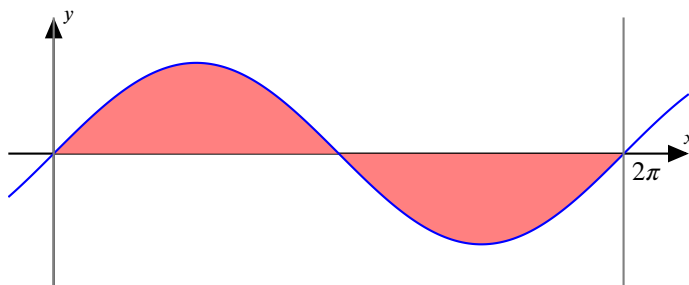
L'aire algébrique du domaine borné, limité par le graphe $y = f(x)$ et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ et $y = 0$ est appelée **l'intégrale définie de $f(x)$ entre a et b** . On la note

$$\int_a^b f(x) \, dx$$



- L'aire algébrique est égale à l'aire géométrique si $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a; b]$.
- L'aire algébrique est l'opposé de l'aire géométrique si $f(x) \leq 0 \, \forall x \in [a; b]$.
- Si $f(x)$ change de signe sur l'intervalle $[a; b]$, on soustrait la somme des aires géométriques des parties où $f(x) \leq 0$ à celle des aires des parties où $f(x) \geq 0$.

Exemple : Quelle est l'aire algébrique du domaine borné, limité par le graphe $y = \sin(x)$ et les droites d'équation $x = 0$, $x = 2\pi$ et $y = 0$.



A ce stade, on peut se demander quel est le lien entre l'intégrale définie et l'intégrale indéfinie. Observons les exemples de la page précédente. Nous avons obtenu :

- Si f est la fonction constante définie par $f(x) = h$, alors $\int_a^b f(x) \, dx = hb - ha$.

Déterminer $\int f(x) \, dx$ et comparer.

- Si f est la fonction linéaire définie par $f(x) = mx$, alors $\int_a^b f(x) \, dx = \frac{mb^2}{2} - \frac{ma^2}{2}$.

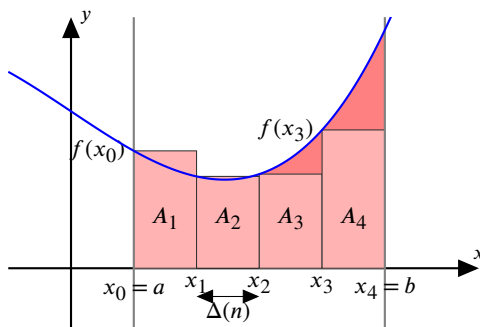
Déterminer $\int f(x) \, dx$ et comparer.

On constate que $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$ avec F une primitive de f . Reste à le prouver...

Commençons par approximer l'aire sous une courbe, $\int_a^b f(x) dx$, en la découpant en rectangles.

On partage l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles $[x_i; x_{i+1}]$ de largeur $\Delta(n) = \frac{b-a}{n}$. On a donc $x_0 = a$ et $x_n = b$.

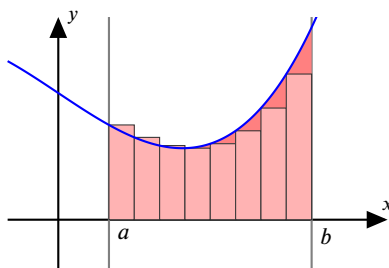
La hauteur du rectangle de l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ correspond $f(x_{i-1})$. L'aire A_i du rectangle est égale à $f(x_{i-1}) \cdot \Delta(n)$. Cette aire est une aire algébrique car elle est négative si $f(x_i)$ est négatif et positive sinon.



En additionnant les aires obtenues, on obtient une approximation de l'aire cherchée.

$$A = A_1 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \Delta(n)$$

Plus n est grand, plus l'approximation est bonne.



L'aire exacte sera obtenue en faisant tendre n vers l'infini.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \Delta(n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

ex. 3.27

Remarques :

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{b-a}{n} = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{a-b}{n}$, on peut définir que $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$ si $b < a$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{a-a}{n} = 0$, on définit $\int_a^a f(x) dx = 0$.

$\int_a^b f(x) dx$ est maintenant défini pour tous nombres réels a et b .

- $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$ si $c \in [a; b]$.

Théorème fondamental du calcul intégral, première forme (Intégrale de Riemann)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.

La fonction $A : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $A(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f .

Preuve :

Pour simplifier, nous allons prouver le théorème pour une fonction f positive sur l'intervalle $[a, b]$. Le cas général est similaire.

$$\begin{aligned} \text{Partons de la définition de la dérivée : } A'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (A(x+h) - A(x)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \Delta(n) \quad \text{où } x_0 = x \text{ et } x_n = x+h \text{ donc } \Delta(n) = \frac{(x+h)-x}{n} = \frac{h}{n} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{h}{n} = \lim_{h \rightarrow 0} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} \cdot f(x_{i-1}) \cdot \frac{h}{n} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1})}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1})}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{f(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{f(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = f(x) \end{aligned}$$

Ce qui démontre que $A(x)$ est une primitive de f .

#

Théorème fondamental du calcul intégral, deuxième forme

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et F une primitive quelconque de f sur cet intervalle. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Preuve : Choisissons $c \in]a; b[$. Par la première forme du théorème fondamental, nous savons que $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en c .

$$\text{Ainsi, } \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = - \int_c^a f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = -F(a) + F(b) = F(b) - F(a)$$

#

Ce théorème va nous permettre de calculer efficacement les intégrales définies. On notera :

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemples : Calculer et représenter l'aire algébrique qui correspond au calcul :

a) $\int_{-2}^2 (4 - x^2) \, dx =$

b) $\int_{-2}^{-1} -\frac{1}{x^2} \, dx =$

c) Quel est le problème avec le calcul de $\int_{-2}^1 -\frac{1}{x^2} \, dx$?

d) $\int_0^{2\pi} \sin(x) \, dx =$

ex. 3.28 à 3.29

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

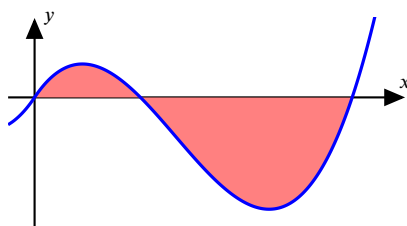
$$\begin{aligned}
 & \bullet \int_a^b \lambda \cdot f(x) \, dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) \, dx, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \\
 & \bullet \int_a^b (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx \\
 & \bullet \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx, \text{ si } f(x) \leq g(x), \text{ pour tout } x \in [a; b] \\
 & \bullet \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx, \text{ si } c \in [a; b] \\
 & \bullet \int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx \\
 & \bullet \int_a^a f(x) \, dx = 0
 \end{aligned}$$

3.3 Calcul d'aires géométriques

Lorsqu'on demande de calculer l'aire d'un domaine, c'est de l'aire géométrique qu'il s'agit. Comment peut-on utiliser le calcul d'aires algébriques pour obtenir l'aire géométrique ?

Aire d'une région limitée par le graphe d'une fonction et l'axe Ox

Soit f une fonction continue et $\mathcal{D}$ le domaine borné, limité par le graphe de f et l'axe Ox .
On veut calculer l'aire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$.



Comme nous l'avons vu, l'aire géométrique et l'aire algébrique sont égales pour les parties où $f(x)$ est positive. Par contre, elles sont opposées pour les parties où $f(x)$ est négative.

Il va donc falloir **délimiter les différentes parties en calculant les zéros de f** . L'aire géométrique se trouve ensuite en additionnant les valeurs absolues des aires algébriques des différentes parties.

Par exemple, si a , b et c sont les zéros de la fonction représentée ci-dessus, avec $a < b < c$, on aura :

$$\mathcal{A} = \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| + \left| \int_b^c f(x) \, dx \right|$$

Exemple : Représenter le domaine borné, limité par le graphe de la fonction $f(x) = -x^3 - x^2 + 2x$ et l'axe Ox , puis calculer son aire.

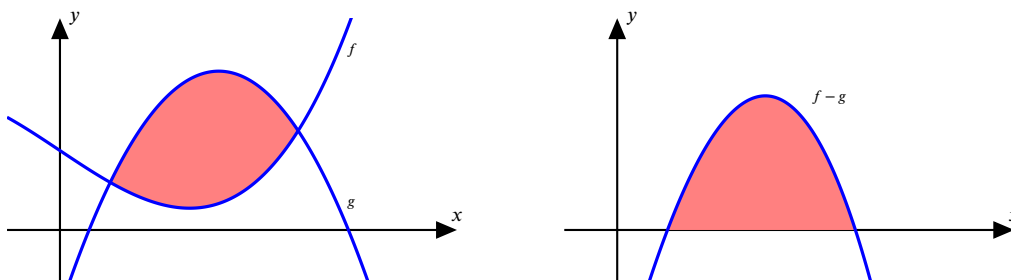
ex. 3.30 à 3.31

Exemple : Représenter le domaine borné, limité par le graphe de la fonction $h(x) = \cos(2x)$, l'axe Ox et les droites $x = 0$ et $x = \pi$, puis calculer son aire.

ex. 3.32 à 3.33

Aire d'une région limitée par le graphe de deux fonctions ou plus

Soit f et g deux fonctions continues et $\mathcal{D}$ le domaine borné, limité par le graphe de f et de g . On veut calculer l'aire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$.



Cette aire est la même que celle du domaine borné, limité par le graphe de $f - g$ et l'axe Ox .

Pour trouver les bornes, il faut **calculer les abscisses des points d'intersection de f et g** , c'est-à-dire **les zéros de $f - g$** . On doit donc résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Ensuite, on **intègre $f - g$** sur chaque intervalle obtenu.

Le résultat sera positif si $f(x) \geq g(x)$ sur l'intervalle utilisé mais négatif si $g(x) \geq f(x)$. On prendra donc la valeur absolue du résultat.

Par exemple, si a et b sont les solutions de $f(x) = g(x)$, avec $a < b$, on aura :

$$\mathcal{A} = \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| - \left| \int_a^b g(x) \, dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \right|$$

Si $f(x) = g(x)$ a 3 solutions a , b et c , avec $a < b < c$, on aura :

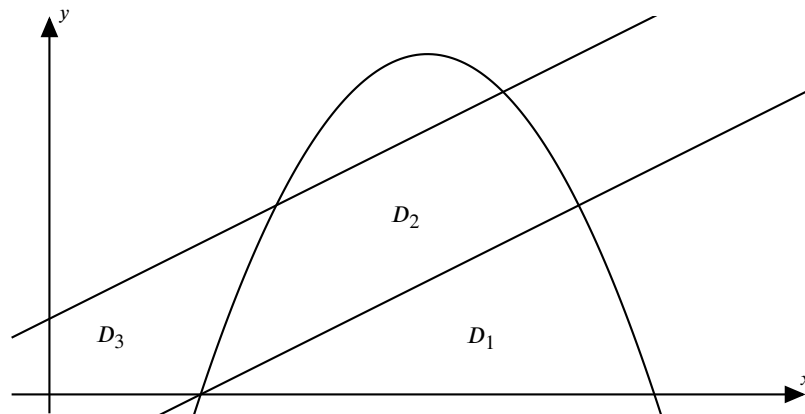
$$\mathcal{A} = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \right| + \left| \int_b^c (f(x) - g(x)) \, dx \right|$$

Exemple : Représenter le domaine borné, limité par les graphes des fonctions $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x^2 - 2x$, puis calculer son aire.

ex. 3.34

Le domaine doit parfois être partagé en plusieurs parties pour pouvoir calculer son aire. C'est le cas pour les domaines D_1 , D_2 et D_3 ci-dessous.

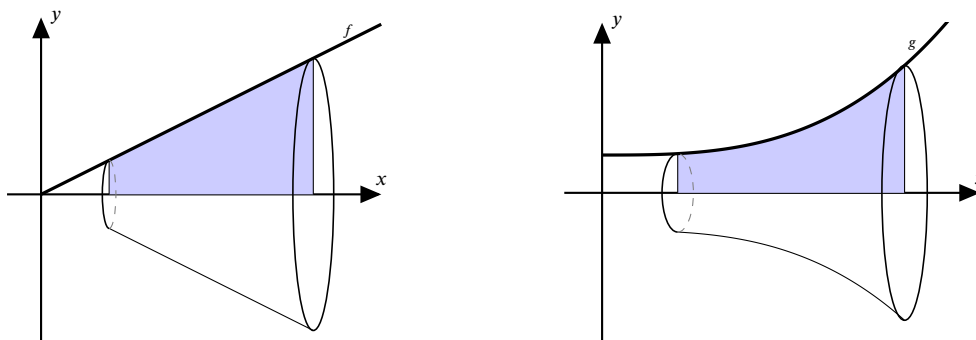
Exemples : Sachant que les graphes représentés sont $y = x + 2$, $y = x - 2$ et $y = -x^2 + 10x - 16$, exprimer l'aire des domaines bornés D_1 , D_2 et D_3 à l'aide d'intégrales en ne calculant que les bornes.



ex. 3.35 à 3.44

3.4 Calcul du volume d'un solide de révolution

Un **solide de révolution**, ou **corps de révolution**, est un solide obtenu en faisant tourner un domaine borné autour d'un **axe de révolution**. Nous nous limiterons aux solides dont l'axe de révolution est l'axe Ox .



Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$. On considère $\mathcal{D}$ le domaine borné, limité par le graphe de la fonction, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$.

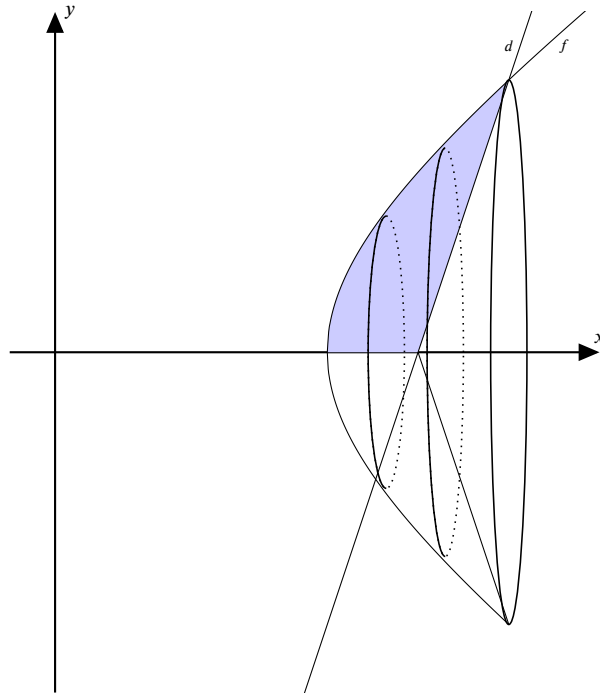
Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe Ox est :

$$\mathcal{V} = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Exemples : Calculer les volumes des solides représentés ci-dessus, sachant que :

- pour le premier $f(x) = \frac{1}{2}x$, $a = 1$ et $b = 2$,
- pour le deuxième $g(x) = \frac{x^3}{2} + 1$, $a = 1$ et $b = 2$.

ex. 3.45 à 3.49

Exemple :

Calculer le volume du solide représenté ci-dessus, sachant que les courbes représentées sont :

$$f : y = \sqrt{x^2 - 9} \quad \text{et} \quad d : 4x - y - 16 = 0$$

ex. 3.50 à 3.51

Exemple : Déterminer l'équation du demi-cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon R avec $y \geq 0$ puis prouver la formule du volume de la sphère grâce à une intégrale.

4 Fonctions exponentielles

4.1 Rappels

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La **fonction exponentielle de base a** est la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $\exp_a(x) = a^x$.

Ensemble de définition :

Ordonnée à l'origine :

Zéros :

Représentation graphique :

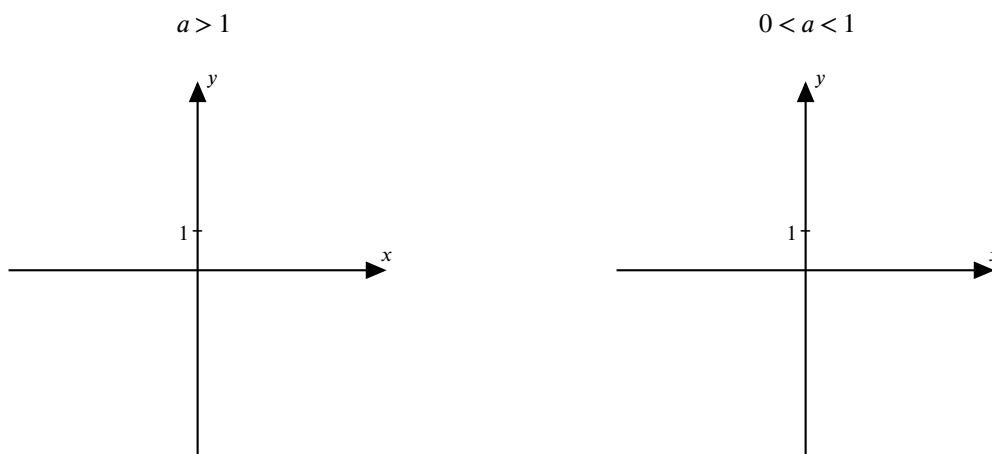


Tableau de signes :

Nous étudierons essentiellement des fonctions qui contiennent des exponentielles en base e.

$e \cong 2,71828183$ est le nombre d'Euler. C'est un nombre irrationnel, qui a été défini lors de la découverte du logarithme naturel. Nous verrons de quelle manière dans le chapitre sur les fonctions logarithmiques.

Depuis, on le définit aussi par :

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad \text{ou} \quad e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

En observant le graphique ci-dessus, on voit que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x =$$

Asymptotes :

ex. 4.1 à 4.2

La fonction $f(x) = e^x$ est sa propre dérivée.

$$[e^x]' = e^x$$

$$[e^{g(x)}]' = g'(x) \cdot e^{g(x)}$$

Comme $(e^x)' = e^x > 0$, la fonction exponentielle est strictement croissante.

Exemples : Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{3x}$

b) $g(x) = e^{\frac{x}{x+2}}$

Exemples :

a) $\int e^{x+2} dx =$

b) $\int e^{3x+5} dx =$

c) $\int x e^{3x^2+5} dx =$

d) $\int \sin(x) e^{\cos(x)} dx =$

ex. 4.3 à 4.8

Exemple : Étudier la fonction $f(x) = \frac{1}{3 - e^x}$. (à l'exception de $\delta(x)$)

ex. 4.9 à 4.10

4.2 Limites de fonctions exponentielles dont l'exposant est une fonction

Si l'exposant est une fonction, on a pour tout $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} e^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Exemples :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+2x+3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2+2x+3}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{8-x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{8-x}$

Une étude du signe de $g(x)$ autour de ses valeurs interdites est souvent indispensable.

Exemples :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{3-x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{3-x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} e^{\frac{1}{3-x}}$
<

d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} e^{\frac{1}{3-x}}$
>

ex. 4.11 à 4.12

Exemple : Étudier la fonction $f(x) = e^{\frac{x}{x+2}}$ (à l'exception de $\delta(x)$).

ex. 4.13 à 4.15

4.3 Calcul de limite de fonctions exponentielles à l'aide du théorème de Bernoulli-L'Hospital

On utilisera le théorème de Bernoulli-L'Hospital chaque fois que l'on obtient des calculs de limite du type :

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$
---------------	-------------------------	------------------

Exemples :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} =$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+4)e^{2x} =$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{2 - 3e^x} =$

4.4 Calcul de limite de fonctions exponentielles à l'aide de la règle du plus fort.

Pour calculer des limites indéterminées de produit ou quotient d'un polynôme avec une fonction exponentielle, la règle suivante s'applique :

Soit $P(x)$ un polynôme et $f(x)$ une fonction.

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{f(x)}}{P(x)} = \infty.$ |
| <ul style="list-style-type: none"> • Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{e^{f(x)}} = 0.$ |
| <ul style="list-style-type: none"> • Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, | $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) \cdot e^{f(x)} = 0.$ |
| <ul style="list-style-type: none"> • Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et $P(a) = 0$, | $\lim_{x \rightarrow a} P(x) \cdot e^{f(x)} = \infty.$ |

Cette règle est appelée « règle du plus fort » ou « règle du podium ». On peut la résumer en affirmant que les limites des fonctions exponentielles gagnent face à celles des polynômes. Elle se prouve en utilisant Bernoulli-L'Hospital.

Exemples :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2+3x-5}}{3x^7-2x^2-1} =$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^7 - 2x^2) \cdot e^{\frac{1}{x}} =$
 $<$

ex. 4.16 à 4.20

Exemple : Étudier la fonction $f(x) = x \cdot e^x$.

ex. 4.21 à 4.22

Exemple : Étudier la fonction $f(x) = \frac{e^{2x-1}}{2x+1}$.

ex. 4.23 à 4.24

ex. 4.25 à 4.31

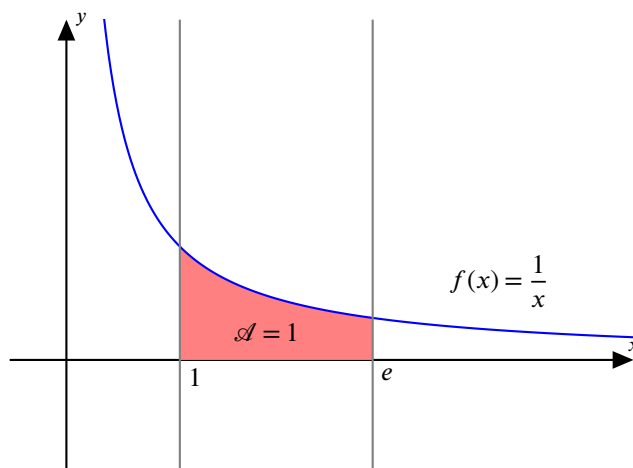
5 Fonctions logarithmiques

L'histoire de la naissance des logarithmes et des exponentielles traverse le XVII^e siècle. Elle commence par la création de tables de logarithmes facilitant les calculs astronomiques. En effet, ces tables permettent de faire des calculs de produits et de quotients compliqués en les ramenant à des additions et des soustractions.

Même si l'idée de combler les trous entre plusieurs puissances d'un même nombre est très ancienne, la naissance de la fonction exponentielle est le fruit d'un long murissement qui n'aboutit qu'à la fin du XVII^e siècle faute d'une bonne notation. Les exposants commencent à être perçus comme des logarithmes.

Un autre problème intrigue les mathématiciens de cette époque : la quadrature de l'hyperbole. Ils cherchent à calculer l'aire sous la courbe $xy = 1$.

Finalement le lien entre les deux est fait. L'aire algébrique bornée, limitée par le graphe de $y = \frac{1}{t}$, l'axe Ox et les droites $t = 1$ et $t = x$, autrement dit $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, a les propriétés des logarithmes. On l'appelle logarithme naturel, noté $\ln$, et il permet de définir le nombre e comme étant le nombre tel que $\ln(e) = 1$.



5.1 Rappels

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction exponentielle de base a est bijective pour les ensemble de départ et d'arrivée ci-dessous :

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

Elle a donc une fonction réciproque, appelée **logarithme en base a** :

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \log_a(y) \end{aligned}$$

$$x = \log_a(y) \iff a^x = y$$

On a donc :

$$x \xrightarrow[\log_a]{\exp_a} a^x$$

et

$$y \xrightarrow[\exp_a]{\log_a} \log_a(y)$$

On note Log ou $\log$ au lieu de $\log_{10}$. C'est le **logarithme en base dix** ou **logarithme décimal**.

On note $\ln$ au lieu de $\log_e$. C'est le **logarithme naturel**. Nous étudierons essentiellement des fonctions qui contiennent des logarithmes naturels.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x)$.

Ensemble de définition :

ordonnée à l'origine :

Zéros :

Représentation graphique :

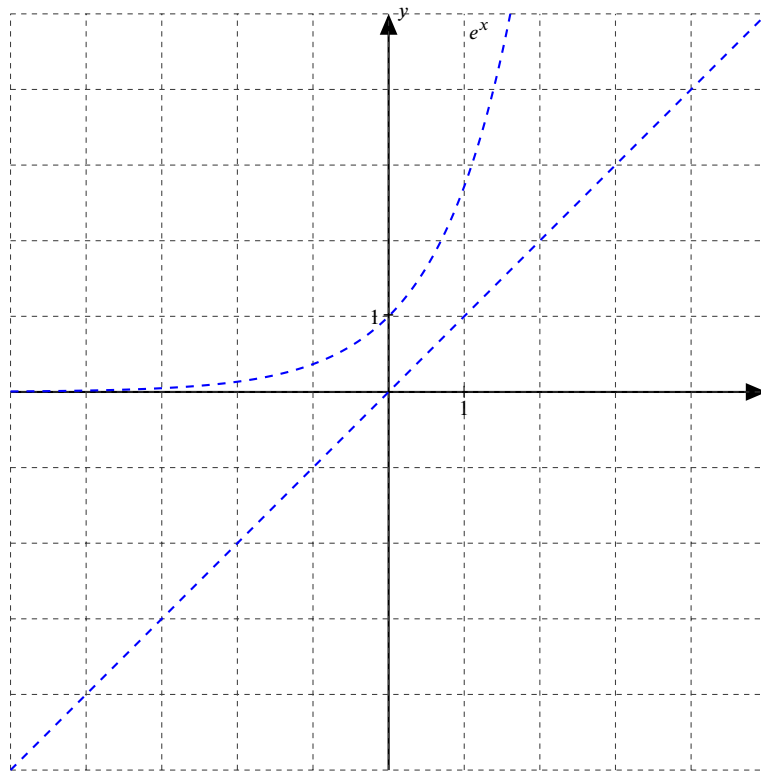


Tableau de signes :

En observant le graphique ci-dessus, on voit que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) =$$

Asymptotes :

Pour trouver l'ensemble de définition d'une fonction logarithmique, il faut souvent faire un tableau de signes, qui n'est pas celui de la fonction elle-même. Il sert aussi pour le calcul des limites.

Exemples : Étudier les fonctions ci-dessous (à l'exception de la dérivée et $\delta(x)$).

a) $f(x) = \ln\left(\frac{4-3x}{2x-1}\right)$

b) $f(x) = \ln\left(\left|\frac{4-3x}{2x-1}\right|\right)$

ex. 5.1 à 5.7

La fonction logarithme naturel est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée vaut $\boxed{[\ln(x)]' = \frac{1}{x}}$.

$$\boxed{[\ln(g(x))]' = \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ si } g(x) > 0}$$

$$\boxed{[\ln(|g(x)|)]' = \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ si } g(x) \neq 0}$$

Exemples : Déterminer l'ensemble de définition, calculer la dérivée et étudier la croissance des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = \ln(7x)$

b) $f(x) = \ln(|x^2 - 2x|)$

c) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

5.2 Calcul de limites de fonctions logarithmiques à l'aide du théorème de Bernoulli-L'Hospital

Exemples : Calculer les limites ci-dessous.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x) + 1}{\ln(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x) + 1}{\ln(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(|x^2 - 9|)}{x - 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(|x^2 - 9|)}{x - 3}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cdot \ln(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x)}$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\ln(x)}$

ex. 5.12 à 5.13

5.3 Calcul de limites de fonctions logarithmiques à l'aide de la règle du plus fort

Pour calculer des limites indéterminées de produit ou quotient d'un polynôme ou fonction exponentielle avec une fonction logarithmiques, la règle suivante s'applique :

Soit $P(x)$ un polynôme et $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions.

- | | |
|---|--|
| • Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(f(x))}{P(x)} = 0.$ |
| • Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{\ln(f(x))} = \infty.$ |
| • Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ et $P(a) = 0$, | $\lim_{x \rightarrow a} P(x) \cdot \ln(f(x)) = 0.$ |
| • Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$, | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(f(x))}{e^{g(x)}} = 0.$ |
| • Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$, | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{g(x)}}{\ln(f(x))} = \infty.$ |

On peut résumer en affirmant que les limites des fonctions exponentielles gagnent face à celles des polynômes, qui gagnent face à celle des fonctions logarithmiques.

Exemples :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x - 5)}{3x^7 - 2x^2 - 1} =$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^7 - 2x^2 - 1}{\ln(x^2 + 3x - 5)} =$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{10} \cdot \ln(x^2) =$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x - 5)}{e^{3x}} =$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln(2x)} =$
>

Remarque : En cas de doute, on calculera la limite avec Bernoulli-L'Hospital.

ex. 5.14 à 5.15

5.4 Étude de fonctions logarithmiques

Exemples :

- a) Étudier la fonction $f(x) = \frac{\ln(1-x^2)+1}{\ln(1-x^2)}$.

ex. 5.16 à 5.18

b) $f(x) = \frac{x}{\ln(x) - 2}$

ex. 5.19 à 5.21

ex. 5.22 à 5.24

5.5 Primitive de logarithmes

$$\int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - x + c \quad \forall x > 0, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Preuve : $[x \ln(x) - x]' = [x]' \ln(x) + x[\ln(x)]' - [x]' = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

#

5.6 Fonctions exponentielles et logarithmes de base a

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a :

$$a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$$

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x)$$

À l'aide de ces deux écritures, il est ainsi possible de ramener l'étude des fonctions exponentielles et logarithmes de base a à celle des fonctions exponentielle et logarithme naturel vues précédemment.

Exemples : Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions ci-dessous :

a) $f(x) = 2^{5x}$

b) $f(x) = \log_3(4 - x^2)$

Calculer :

c) $\int 8^{2x} \, dx =$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_7(x)}{x - 1} =$

ex. 5.25

6 Exercices

6.1 Révision sur les fonctions

Résolution d'équations polynomiales et factorisation de polynômes

Exercice 1.1 Factoriser.

a) $x^3 - 19x + 30$

e) $x^2 + 5x + 6$

i) $6x^2 + 13x + 5$

b) $7x^3 - 35x$

f) $-x^2 + 5x + 6$

j) $x^4 - 8x^2 - 9$

c) $x^3 + 125$

g) $4x^2 - 4x + 1$

k) $63x^3 + 27x^2 - 7x - 3$

d) $11x^4 + 12x^2 + 1$

h) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

l) $x^3 - 125$

Résolution d'équations exponentielles et logarithmiques

Exercice 1.2 Résoudre en donnant les solutions sous forme de valeurs exactes.

a) $e^{(x^2)} + 1 = 8$

c) $7 \cdot 2^x = 4^{x-1}$

e) $7 - 8 \cdot 7^{-x} + 7^{-2x} = 0$

b) $5^{x-3} = 625$

d) $10^{2x} + 10^{x+1} = 200$

f) $11^{3x} = 5^{x+4}$

Exercice 1.3 À la naissance de ma fille, j'ai placé CHF 10'000.– sur un compte qu'elle pourra retirer à sa majorité. Le taux d'intérêt est de 0,5%.

- a) De quel montant disposera-t-elle alors ?
- b) En combien d'années ce montant dépassera-t-il CHF 11'000.– ?
- c) Quel taux d'intérêt aurait permis d'avoir CHF 11'000.– pour ses 18 ans ?

Exercice 1.4 Si l'effectif de la population en Suisse augmente de 1% chaque année, en combien d'années aura-t-il doublé ?

Exercice 1.5 Calculer sans calculatrice.

a) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

d) $\ln(-e)$

g) $\log_5\left(\frac{1}{625}\right)$

j) $\log_8(2)$

b) $\ln(e^4)$

e) $\ln(0)$

h) $\text{Log}(0,001)$

k) $\text{Log}(4) + 2\text{Log}(5)$

c) $\ln(\sqrt{e})$

f) $\ln(1)$

i) $\text{Log}\left(\sqrt[4]{1000}\right)$

l) $\text{Log}(70) - \text{Log}(7)$

Exercice 1.6 Résoudre et donner les solutions sous forme de valeurs exactes.

a) $\ln(2x - 5) = 0$

d) $2\ln(x) - 5 = 0$

b) $6 \cdot \log_7(x) + 1 = 11$

e) $\text{Log}(x + 2) + \text{Log}(x - 2) = \text{Log}(7x - 16)$

c) $\ln(x) + 1 = \ln(x + 1)$

f) $2\text{Log}(10 - x) - \text{Log}(x + 1) = 2$

Résolution d'équations trigonométriques**Exercice 1.7** Résoudre.

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

e) $\tan(2x + \pi) = \sqrt{3}$

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

d) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1$

Exercice 1.8 Résoudre.

a) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $4\cos^2(x) - 4\cos(x) - 3 = 0$

b) $\sin^2(x) = 1$

d) $3\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2 = 0$

Ensemble de définition**Exercice 1.9** Quel est l'ensemble de définition des fonctions définies par les expressions algébriques suivantes ?

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

h) $f(x) = \ln(-x^3 + 5x^2)$

b) $f(x) = \frac{2x - 9}{x^3 + 4x^2 - 9x - 36}$

i) $f(x) = \ln|-x^3 + 5x^2|$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

j) $f(x) = \cos(3x)$

d) $f(x) = x\sqrt{7x+2}$

k) $f(x) = \frac{1}{\cos(x) - \frac{1}{2}}$

e) $f(x) = e^{\sqrt{x^3-9x}}$

l) $f(x) = \tan(3x)$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{4-x}}$

m) $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

g) $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}$

n) $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

Zéros et étude du signe de la fonction**Exercice 1.10** Étudier le signe des fonctions définies par les expressions algébriques suivantes.

a) $f(x) = \frac{-3x(x^2-5)}{4x^2+12x+9}$

d) $f(x) = \frac{2x^2+7x+3}{x-4}$

g) $f(x) = 2\sin^2(x) - 1$

b) $f(x) = x^2(x+4)^3(x-1)^4e^{3-x}$

e) $f(x) = \sqrt{10-x}$

h) $f(x) = 5\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $f(x) = \frac{-x^2+2x-9}{x^3+4x^2-x-4}$

f) $f(x) = 10 - \sqrt{x}$

i) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

Exercice 1.11 Étudier le signe des fonctions définies par les expressions algébriques suivantes.

a) $f(x) = \cos(x) + 1$

c) $f(x) = \tan(2x)$

e) $f(x) = 1 - \ln(2x)$

b) $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $f(x) = \frac{1 - 2e^x}{1 - e^{3x+1}}$

f) $f(x) = \ln(1 - 2x)$

Dérivées

Exercice 1.12 Montrer à l'aide de la définition de la dérivée que $f'(x) = 2x$ si $f(x) = x^2$.

Exercice 1.13 Montrer à l'aide de la définition de la dérivée que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ si $f(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 1.14 Montrer à l'aide de la définition de la dérivée que $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ si $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 1.15 Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous. Répondre sous forme utilisable dans un tableau de croissance.

a) $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - x + 7$

g) $l(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

m) $f(x) = (3x + 5)^7$

b) $g(x) = \frac{1}{x^4}$

h) $m(x) = \cos(x) + \sin(x) + \tan(x)$

n) $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

c) $h(x) = \frac{5}{x^4}$

i) $f(x) = (x - 1)(x^2 - 8x - 29)$

o) $h(x) = \cos(4x + \pi)$

d) $i(x) = \frac{x^4}{5}$

j) $g(x) = \frac{7 - x}{3x^2 + 4}$

p) $i(x) = (2x - 1)^4(5 - x)^3$

e) $j(x) = \sqrt{x^3}$

k) $h(x) = \sin(x)\cos(x)$

q) $j(x) = \frac{(x^2 + 7)^4}{x + 5}$

f) $k(x) = \sqrt[3]{x^2}$

l) $i(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

r) $k(x) = \sin^4(3x)$

Exercice 1.16 Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = e^{\sin(x)}$

d) $i(x) = 5e^{\sqrt{x}}$

g) $l(x) = 7\ln(5x + 1)$

b) $g(x) = xe^x$

e) $j(x) = \ln(x^3 + x)$

h) $m(x) = \ln((5x + 1)^7)$

c) $h(x) = \frac{2 + e^x}{e^{x+2}}$

f) $k(x) = x\ln(x) - x$

i) $n(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Croissance**Exercice 1.17**

Étudier la croissance de $g(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$ et faire une esquisse du graphe de la fonction.

Exercice 1.18

Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = 3x^2 + 5x + 4$ au point d'abscisse -1 .

Exercice 1.19

Quels sont les extremums globaux de $f(x) = (x-1)(x-3)^3$ sur l'intervalle $[1; 4]$?

Asymptotes verticales, trous et points limites

Exercice 1.20 Déterminer les asymptotes verticales, les trous et les points limites des fonctions définies par les expressions algébriques suivantes.

a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 3x - 10}$

d) $f(x) = \frac{x^{13} - 1}{x^7 - 1}$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{9 - x}$

b) $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 + x - 6}$

e) $f(x) = \frac{x^{13} - 1}{x^8 - 1}$

h) $f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{9 - x^2}}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$

f) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

i) $f(x) = \frac{\tan(5x)}{x}$

Asymptotes horizontales et obliques

Exercice 1.21 Déterminer les asymptotes horizontales et obliques des fonctions définies par les expressions algébriques suivantes.

a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{5x^2 - 3x - 10}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$

e) $f(x) = \frac{(2x+2)^2}{(x-3)(x+1)}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

f) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{x^2 + 4x + 4}$

Exercice 1.22 Déterminer les équations de toutes asymptotes des fonctions définies par les expressions algébriques ci-dessous. Étudier la position relative du graphe par rapport aux AH ou AO.

a) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{(3x-2)^2}$

6.2 Optimisation

Problèmes concrets

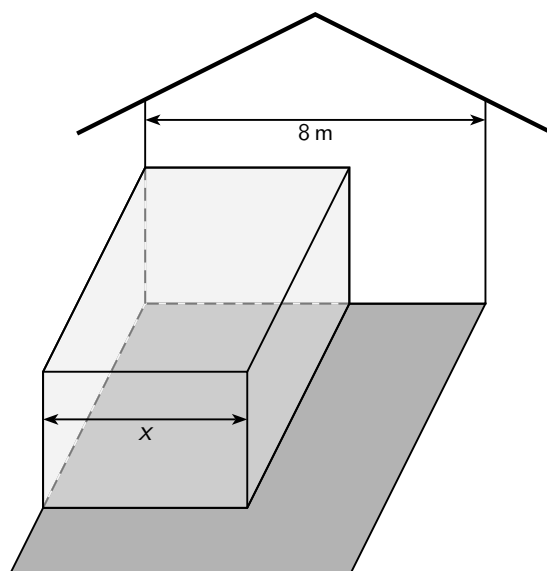
Exercice 2.1 Un petit enclos rectangulaire doit être construit devant un bâtiment qui constituera le quatrième côté de cet enclos. La construction revient à Frs 20.– par mètre sur les deux côtés latéraux et à Frs 30.– par mètre sur le côté faisant face au bâtiment.

Quelles doivent être les dimensions de cet enclos s'il doit contenir une surface intérieure de 108 m^2 et que l'on cherche à minimiser les coûts de construction ?

Exercice 2.2 On veut construire un abri formé de deux parois verticales et d'un toit plat. L'abri a une profondeur de 4 m. Le toit est en tôle qui coûte Frs 10.– par m^2 . Les parois verticales sont en contreplaqué qui coûte Frs 8.– par m^2 . Le volume disponible sous l'abri doit être de 250 m^3 .

Déterminer le coût de construction minimal.

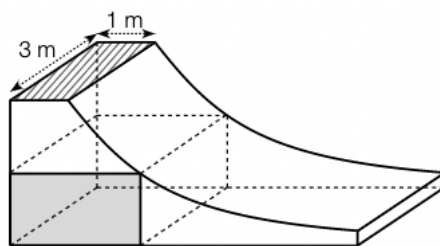
Exercice 2.3 Monsieur Bellivert souhaite construire une véranda. Celle-ci aura la forme d'un parallélépipède rectangle. Elle sera directement posée sur le sol de sa terrasse et appuyée contre la façade de sa maison.



- La longueur de la véranda devra être le double de sa largeur.
- Cette largeur x ne devra pas dépasser celle de la maison, à savoir 8 mètres.
- Enfin, le volume de la véranda vaudra 96 m^3 .
- Les matériaux utilisés sur les trois côtés coûtent 240 frs/m^2 .
- Ceux du toit sont plus légers et ne coûtent que 225 frs/m^2 .

Pour quelle largeur x le prix est-il minimal ? Quelles sont alors les dimensions de la véranda ?

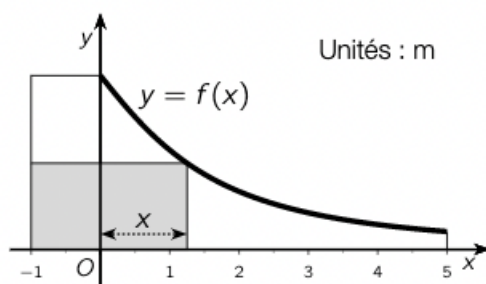
Exercice 2.4 Une rampe de prise d'élan de roller est représentée ci-dessous.



La largeur de la rampe est de 3 mètres. Le plateau de départ (partie hachurée sur le dessin ci-dessus) forme un rectangle de 1 mètre par 3 mètres.

On veut construire sous cette rampe un local de rangement ayant la forme d'un parallélépipède rectangle dont l'une des faces a été grisées sur le dessin.

Le profil de la rampe a été représenté dans un système d'axe ci-dessous.



La courbe en gras est le graphe de la fonction :

$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 2x + 4} \quad \text{où } 0 \leq x \leq 5 \text{ et } x \text{ est en mètres}$$

- À quelle hauteur du sol se trouve le plateau de départ ?
- Déterminer les dimensions, arrondies au centième, du local de volume maximal et calculer ce volume maximal.
- Quel est le volume minimal ? Arrondir au centième.

Exercice 2.5 Un camion effectue un trajet de 1'200 km à la vitesse moyenne v donnée en km/h.

Le nombre de litres d'essence consommés en 100 km est donné par la fonction :

$$f(v) = \frac{625}{v} + \frac{v}{3}$$

Le salaire du chauffeur est de 30 frs l'heure et le litre d'essence coûte 2 frs.

A quelle vitesse le camion doit-il effectuer le trajet de 1'200 km pour que le coût du trajet soit minimal ?

Exercice 2.6 Un institut propose un modèle qui permettrait de calculer la hauteur H en mètres de la vague principale d'un tsunami en fonction du temps en minutes :

$$H(t) = a \cdot e^{-t^2 + bt}$$

- a) Afin de vérifier son modèle, l'institut utilise deux mesures prises lors du tsunami de décembre 1992, en Indonésie :

- La mesure initiale de la vague ($t = 0$) était de 5 centimètres.
- Après 1 minute, la vague mesurait 2,70 mètres.

A l'aide de ces informations, déterminer les paramètres a et b .

b sera arrondi à l'unité pour la suite de l'exercice.

- b) Au bout de combien de temps la vague atteindra sa hauteur maximale ?
- c) Quelle sera la hauteur maximale atteinte par la vague ?

Exercice 2.7 Les experts du GIEC ont modélisé deux scénarios afin de prévoir l'augmentation de la température moyenne annuelle de notre planète lors des prochaines années.

- a) Le premier prévoit un contrôle des naissances qui permet de diminuer chaque année à partir de 2030 de 0,5% la population mondiale. Dans ce cas, l'augmentation de la température de la température s'exprimera par la fonction ci-dessous, où t est le nombre d'année après 2030 :

$$h_1(t) = 4 - \frac{(t - 80)^2}{1600}$$

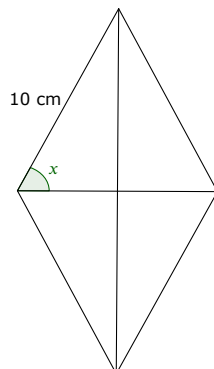
- A) Quelle serait alors la population en 2050 si la population en 2030 est de 9 milliards d'habitants ?
- B) Quelle sera l'augmentation de la température moyenne en 2050 ?
- C) En quelle année la température moyenne sera-t-elle la plus élevée ?
- D) Quelle sera l'augmentation maximale atteinte ?
- b) Le deuxième prévoit la suppression de toutes les centrales à charbon dès 2030. Dans ce cas, l'augmentation de la température de la température s'exprimera par la fonction ci-dessous, où t est le nombre d'année après 2030 :

$$h_2(t) = \frac{t \cdot e^{-\frac{t}{40}}}{5}$$

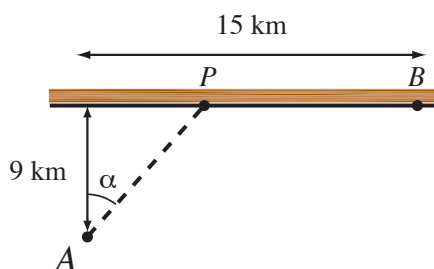
- A) Quelle sera l'augmentation de la température moyenne en 2050 ?
- B) En quelle année la température moyenne sera-t-elle la plus élevée ?
- C) Quelle sera l'augmentation maximale atteinte ?

Problèmes trigonométriques**Exercice 2.8**

Quel angle x faut-il choisir pour que l'aire de ce losange soit maximale ? Quelle est cette aire maximale ?

**Exercice 2.9**

Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 3 km/h et à pieds à la vitesse de 6 km/h. La côte est supposée rectiligne.



Quel doit être l'angle α pour que le temps de parcours soit minimal ?

Exercice 2.10

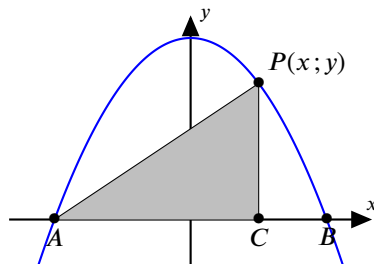
Une gouttière est obtenue en repliant de chaque côté un tiers d'une plaque métallique de 30 cm de large, de manière symétrique.

Comment faut-il choisir l'angle α pour que la gouttière puisse retenir la plus grande quantité d'eau possible ?



Problèmes mathématiques

Exercice 2.11



La parabole d'équation $y = -\frac{2}{9}x^2 + 8$ coupe l'axe des abscisses en A et B . Soit P un point d'ordonnée positive se trouvant sur la parabole.

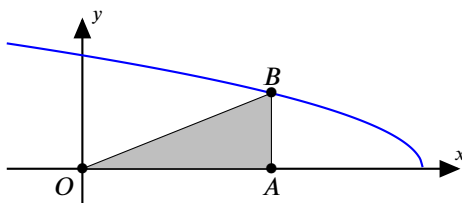
On considère le triangle ACP rectangle en C où P est sur la parabole et C sur le segment AB .

Calculer les coordonnées du point P pour que l'aire du triangle ACP soit maximale.

Exercice 2.12

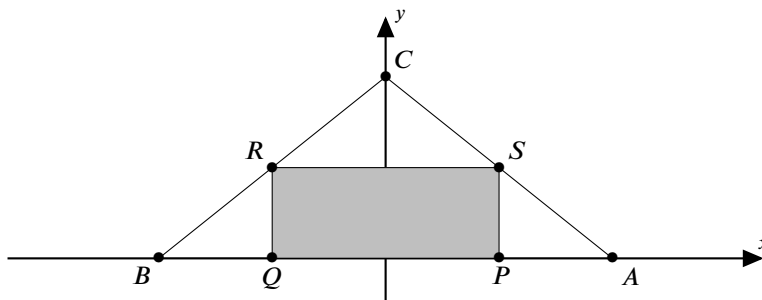
On considère le triangle OAB rectangle en A situé dans le premier quadrant dont le point B parcourt la courbe Γ d'équation $y = \sqrt{9-x}$ et A est sur l'axe des abscisses.

Pour quelle position du point B l'aire du triangle OAB est-elle maximale ?



Exercice 2.13 On considère le triangle $A(3;0)$, $B(-3;0)$, $C(0;6)$. On inscrit dans ce triangle un rectangle $PQRS$ dont le côté PQ s'appuie sur AB .

Déterminer pour quelle abscisse de P le rectangle ainsi construit a une aire maximale.



Exercice 2.14 Trouver les points de la courbe d'équation $y = x^2 - 9$ dont la distance à l'origine est minimale.

Exercice 2.15

- Déterminer deux nombres entre -100 et 50 dont la somme vaut 60 et dont le produit est maximal. Quelle est la valeur du produit maximal ?
- Et pour un produit minimal ?

Exercice 2.16

Déterminer deux nombres entre -20 et 40 dont la somme vaut 30 et tels que $a \cdot b^2$ est maximal.

6.3 Intégration

Primitives et intégrale indéfinie

Exercice 3.1

- a) Montrer que $F(x) = \cos(3x^2) + 5x + 7$ est une primitive de $f(x) = -6x \sin(3x^2) + 5$.
- b) Déterminer $\int (-6x \sin(3x^2) + 5) \, dx$.

Exercice 3.2

- a) Vérifier que $F(x) = \frac{x}{x+1}$ et $G(x) = -\frac{1}{x+1}$ sont des primitives de $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.
- b) Déterminer le nombre $c \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = G(x) + c$.

Exercice 3.3 Que doit valoir k pour que $F(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ soit une primitive de $f(x) = \frac{k}{(2x-1)^2}$?

Exercice 3.4 Déterminer $f(x)$ telle que :

- a) $\int f(x) \, dx = 5x^2 - 3x + c$ b) $\int f(x) \, dx = x - \frac{1}{x} + c$ c) $\int f(x) \, dx = \sqrt{x} + c$

Exercice 3.5 Les deux fonctions suivantes sont-elles deux primitives de la même fonction ?

$$F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^2$$

$$G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x$$

Exercice 3.6 Que doit valoir k pour que $F(x) = kx^7$ soit une primitive de $f(x) = 5x^6$?

Exercice 3.7 Trouver les primitives pour les fonctions définies par les expressions algébriques suivantes.

- a) $f(x) = x^7$ b) $f(x) = 5x^4$ c) $f(x) = 12x^3$ d) $f(x) = 3x^3$

Exercice 3.8 Que doit valoir k pour que $F(x) = \frac{k}{x^5}$ soit une primitive de ... ?

- a) $f(x) = \frac{1}{x^6}$ b) $f(x) = \frac{11}{x^6}$ c) $f(x) = \frac{5}{x^6}$ d) $f(x) = -\frac{1}{3x^6}$

Exercice 3.9 Que doit valoir k pour que $F(x) = kx^{7/5}$ soit une primitive de $f(x) = x^{2/5}$?

Exercice 3.10 Déterminer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\int 4 \, dx$

e) $\int -\frac{8}{x^3} \, dx$

i) $\int \frac{5}{\sqrt{x}} \, dx$

b) $\int 7x \, dx$

f) $\int \frac{1}{x^3} \, dx$

j) $\int \frac{5}{\sqrt[3]{x}} \, dx$

c) $\int x^9 \, dx$

g) $\int \sqrt[3]{x} \, dx$

k) $\int 8 \sin(x) \, dx$

d) $\int \frac{1}{x^2} \, dx$

h) $\int 5\sqrt[3]{x} \, dx$

l) $\int 4 \cos(x) \, dx$

Exercice 3.11 Trouver les primitives des fonctions définies par les expressions algébriques suivantes.

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = x^2 + x$

c) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2$

Exercice 3.12 Trouver les primitives des fonctions définies par les expressions algébriques suivantes.

a) $f(x) = 9 + x$

h) $f(x) = 3x^5 - 4x^4 + x^3 - 2$

b) $f(t) = 5t - 1$

i) $f(x) = \frac{9x^2 - 2x + 5}{7}$

c) $f(t) = 1 - \frac{1}{t}$

j) $f(x) = \frac{x^4}{5} + \frac{3x^3}{2}$

d) $f(t) = \frac{3t-7}{t}$

k) $f(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{5} - \frac{1}{4}$

e) $f(t) = -3t^4 + 2t$

l) $f(x) = 7 \sin(x) + 3$

f) $f(t) = 3t^5 + 2t^4 - 1$

m) $f(x) = \frac{7 \cos(x) + 1}{5}$

g) $f(t) = 3 + e^t$

n) $f(x) = \frac{1}{8}e^x$

Exercice 3.13 Trouver les primitives des fonctions définies par les expressions algébriques suivantes.

a) $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

d) $f(t) = \sqrt[3]{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$

b) $f(t) = \frac{2}{t^3} + 5$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sin(x)$

c) $f(x) = -\frac{7}{x^5} - \sqrt{x}$

f) $f(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 5 \cos(x)$

Exercice 3.14 Trouver les primitives des fonctions définies par les expressions algébriques suivantes.

a) $f(x) = \tan^2(x) + 1$

b) $f(x) = \tan^2(x)$

Propriété des intégrales avec dérivée interne**Exercice 3.15** Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\int (7x-2)^4 dx$

f) $\int \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) dx$

b) $\int \frac{2}{(5-x)^3} dx$

g) $\int e^{3x} dx$

c) $\int \sqrt{11x-9} dx$

h) $\int \frac{1}{e^{3x}} dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{11x-9}} dx$

i) $\int \frac{5}{x} dx$

e) $\int \cos\left(\frac{2}{3}x\right) dx$

j) $\int \frac{5}{x+2} dx$

Exercice 3.16 Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\int (3x^2+5x-1)^3(6x+5) dx$

d) $\int \frac{x}{(x^2+4)^3} dx$

b) $\int (x^3+3x^2+1)(x^2+2x) dx$

e) $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x)^5} dx$

c) $\int 2x \cdot \sqrt{x^2+4} dx$

f) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$

Exercice 3.17 Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\int (x^4+7)^2 dx$

b) $\int x^3(x^4+7)^2 dx$

c) $\int \frac{x^4}{(x^5-6)^2} dx$

d) $\int \frac{(x^5-6)^2}{x^4} dx$

Exercice 3.18 Trouver les primitives des fonctions définies par les expressions algébriques suivantes.

a) $f(x) = (x+3)^3$

i) $f(x) = \sqrt{x+3}$

b) $f(x) = (2x-1)^2$

j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$

c) $f(x) = (2x^2-1)^2$

k) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

d) $f(x) = (7x-2)^5$

e) $f(x) = x(7x^2-2)^5$

l) $f(x) = \frac{1}{(x+4)^5}$

f) $f(x) = (3x^2+x)^3 \cdot (6x+1)$

m) $f(x) = \frac{3x}{(x^2+4)^5}$

g) $f(x) = (x+1)(4x^2+8x+3)^4$

n) $f(x) = \frac{5x^3-x^2+4}{x^2}$

h) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^2-5)$

Exercice 3.19 Calculer :

a) $\int \cos(3x) \, dx$

f) $\int (2 \sin(x) - 3 \cos(x)) \, dx$

b) $\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \, dx$

g) $\int \frac{5}{\cos^2(x)} + 5 \cos(x) \, dx$

c) $\int \sin^2(x) \cos(x) \, dx$

h) $\int \left(8 \sin(x) + \frac{4}{\sqrt{2x}}\right) \, dx$

d) $\int \sin(x) \cos^2(x) \, dx$

i) $\int \frac{6 \sin(3x)}{\cos^2(3x)} \, dx$

e) $\int \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)} \, dx$

j) $\int \frac{6}{\cos^2(3x)} \, dx$

Exercice 3.20 Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\int x e^{x^2+7} \, dx$

b) $\int \sin(x) e^{\cos(x)} \, dx$

c) $\int \frac{e^{7x}+2}{5} \, dx$

Exercice 3.21 Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\int \frac{11}{x} \, dx$

c) $\int \frac{x}{x^2+1} \, dx$

e) $\int \frac{3}{2x} \, dx$

g) $\int \frac{1}{1-2x} \, dx$

b) $\int \frac{1}{1-3x} \, dx$

d) $\int \frac{9x^3+3}{3x^4+4x-1} \, dx$

f) $\int \frac{1}{3x+1} \, dx$

h) $\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+1} \, dx$

Primitives de fractions rationnelles

Exercice 3.22 Pour chaque fonction, calculer ses primitives.

a) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$

e) $f(x) = \frac{2}{x^2-2x+1}$

i) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$

f) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+1}$

j) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+4}$

c) $f(x) = \frac{3}{x+1}$

g) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

k) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+4}$

d) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2}$

h) $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1}$

l) $f(x) = \frac{2x-6}{(x-3)^2}$

Exercice 3.23 Calculer les primitives suivantes.

a) $\int \frac{4x^4+2x^3+3}{x+2} \, dx$

b) $\int \frac{x^6-2x^5+x^4+1}{x^2-2x+1} \, dx$

Exercice 3.24 Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{3x^2 + 4x + 5}{3x + 1} dx$

d) $\int \frac{x^2 - 4x}{x^3 - 6x^2 + 2} dx$

b) $\int \frac{2x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 5x^2 + x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx$

e) $\int \frac{2x^4 - x^2 + x}{x^2 - 1} dx$

c) $\int \frac{12x^5 + x^3 + 6x^2 - x + 2}{4x^3 - x + 2} dx$

f) $\int \frac{2x^4 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} dx$

Exercice 3.25 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ par $f(x) = \frac{2x-7}{(x+1)(x-3)}$.

a) Préciser pourquoi la primitive de f n'est pas directement calculable.

b) Déterminer a et b vérifiant que :

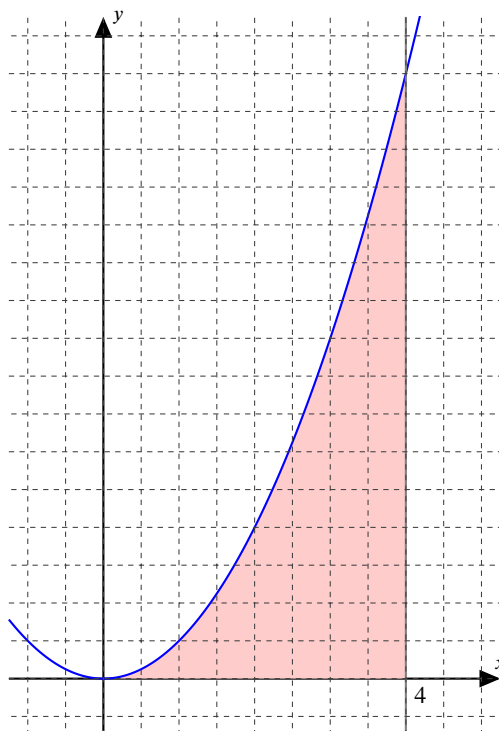
$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$$

c) En déduire une primitive de f

Exercice 3.26 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; -2\}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$.
Calculer une primitive de f en s'inspirant de l'exercice précédent.

Aire algébrique et intégrale définie

Exercice 3.27 On considère le domaine borné, limité par le graphe d'équation $y = \frac{x^2}{2}$, les axes Ox et Oy et la droite d'équation $x = 4$.



A l'aide de la méthode des rectangles, calculer approximativement l'aire du domaine en subdivisant $[0;4]$ en 8 parties égales.

Exercice 3.28 Calculer, lorsque cela a un sens, les intégrales définies suivantes.

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\int_1^4 x^2 \, dx$ | f) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x^2+1}{x^2} \, dx$ | k) $\int_{-1}^0 2x(1+x^2)^2 \, dx$ |
| b) $\int_1^5 \frac{x^2}{31} \, dx$ | g) $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+1)^2} \, dx$ | l) $\int_0^1 x^2(2x+1)^2 \, dx$ |
| c) $\int_0^2 (2x^3 - 3x^2 + x - 3) \, dx$ | h) $\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) \, dx$ | m) $\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \, dx$ |
| d) $\int_{-2}^0 \left(\frac{2x^2 - 2x + 7}{x-1} \right) \, dx$ | i) $\int_0^1 e^x \, dx$ | n) $\int_0^1 x \cdot \sqrt{1-x^2} \, dx$ |
| e) $\int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx$ | j) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \, dx$ | o) $\int_0^2 (1-x)^3 \, dx$ |

Exercice 3.29 Calculer, lorsque cela a un sens, les intégrales définies suivantes.

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin(x) \, dx$ | c) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx$ | e) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \, dx$ |
| b) $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \, dx$ | d) $\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx$ | f) $\int_{-\pi/3}^{\pi/6} \tan^2(x) \, dx$ |

Aire d'une région limitée par le graphe d'une fonction et l'axe Ox

Exercice 3.30 Représenter et calculer l'aire du domaine borné, limité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox :

- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ | c) $f(x) = x \cdot \sqrt{4-x^2}$ |
| b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ | d) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ |

Exercice 3.31 Représenter et calculer l'aire du domaine borné, limité par la courbe d'équation $y = \frac{x^2-1}{x-2}$ et l'axe Ox .

Exercice 3.32

- Représenter le domaine borné, limité par la courbe $y = x^2 - 2x$, l'axe Ox et les droites $x = 0$ et $x = 4$, puis calculer son aire.
- Représenter le domaine borné, limité par la courbe $y = -x^2 + x + 6$, l'axe Ox et les droites $x = -5$ et $x = 5$, puis calculer son aire.

Exercice 3.33

- Calculer l'aire du domaine borné, limité par la courbe $y = \frac{1}{2x+4}$, l'axe Ox et les droites $x = 0$ et $x = 1$.
- Calculer l'aire du domaine borné, limité par la courbe $y = \frac{1}{(2x+4)^3}$, l'axe Ox et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

Aire d'une région limitée par le graphe de deux fonctions ou plus

Exercice 3.34 Après l'avoir représenté, calculer l'aire du domaine borné, limité par les courbes d'équations :

a) $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$

c) $y = x^3 - x^4$ et $y = x - x^2$

b) $y = x^2 - 4x + 5$ et $y = 5 + 2x - x^2$

d) $4x + 5y = -10$, $-3x + y + 2 = 0$ et $x = 7 - 6y$

Exercice 3.35 Calculer l'aire du domaine borné, limité par les droites d'équations :

$$y = 2x - 3, \quad y = -x, \quad x = -1 \quad \text{et} \quad x = 2$$

Exercice 3.36 Calculer l'aire du domaine borné, limité par les courbes d'équations :

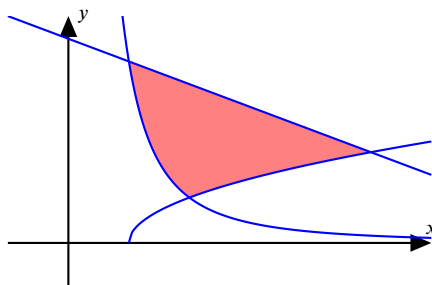
$$y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}, \quad y = 3x, \quad x = -1 \quad \text{et} \quad x = 2$$

Exercice 3.37 Calculer l'aire du domaine borné, limité par les courbes d'équations :

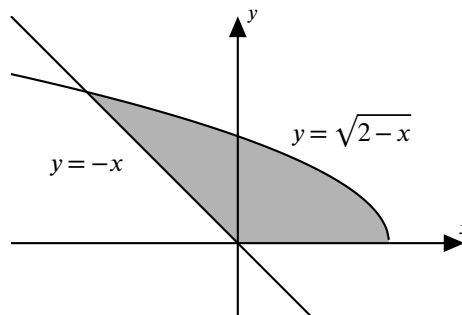
$$y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}, \quad y = 3x, \quad x = 1 \quad \text{et} \quad x = 2$$

Exercice 3.38 Calculer l'aire du domaine grisé ci-dessous, sachant que les courbes représentées sont :

$$y = \frac{4}{x^2}, \quad y = \sqrt{x-1} \quad \text{et} \quad x + 2y - 9 = 0$$

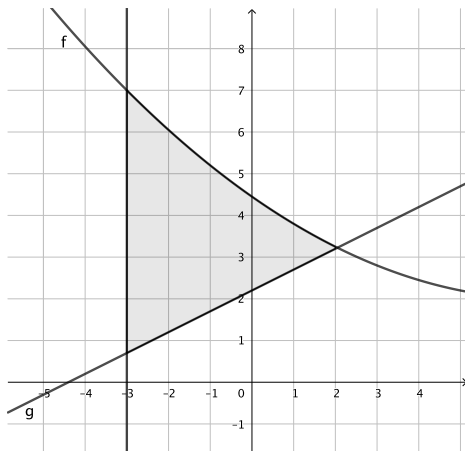
**Exercice 3.39**

Calculer l'aire du domaine grisé ci-contre.

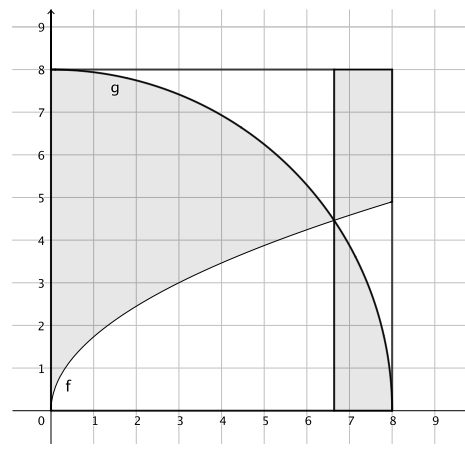


Exercice 3.40 Écrire chacune des aires grisées ci-dessous à l'aide d'intégrales. Les bornes seront estimées au mieux d'après les graphiques.

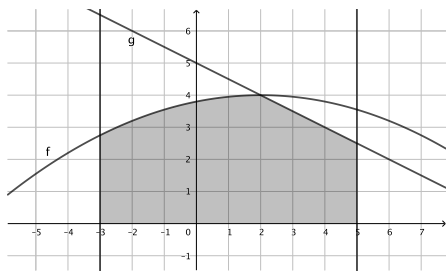
a)



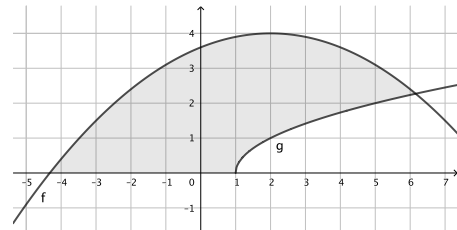
d)



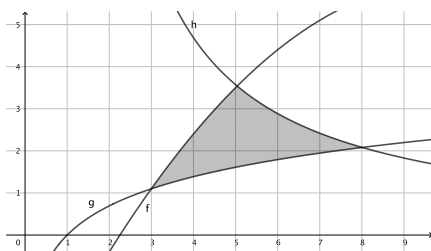
b)



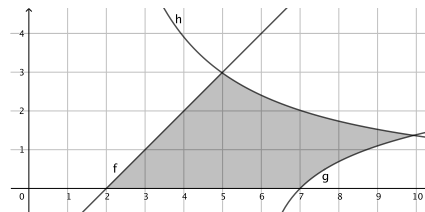
e)



c)



f)



Exercice 3.41 Calculer les valeurs du paramètre $k > 0$ pour lesquelles on a

a) $\int_4^k x + 9 \, dx = 28$

c) $\int_0^k \cos(2x) \, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\int_4^k x^2 - 3x + 7 \, dx = \frac{129}{2}$

d) $\int_0^k x^2 + x + 1 \, dx = \int_0^k x^2 + 3 \, dx$

Exercice 3.42 Calculer la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'aire du domaine borné, limité par les graphes des fonctions f et g soit égale à 9.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

$$g(x) = mx$$

Exercice 3.43 Calculer la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'aire du domaine borné, limité par la courbe d'équation $y = a^2 - \frac{x^2}{4}$ et l'axe des abscisses soit égale à 8.

Exercice 3.44 Les courbes d'équations $y = 1/x^2$, $y = 0$, $x = 1$ et $x = c$ ($c > 1$) délimitent un domaine borné. Montrer que son aire vaut $A(c) = \frac{c-1}{c}$, puis calculer $\lim_{c \rightarrow +\infty} A(c)$.

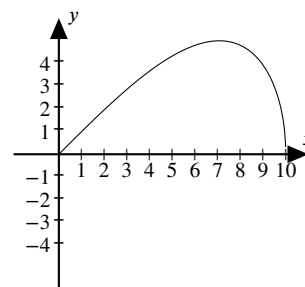
Calcul du volume d'un solide de révolution

Exercice 3.45 Soit D le domaine borné, limité par les droites d'équations $x = 1$, $y = 0$ et le graphe de $f(x) = \sqrt{4-x}$. Esquisser le solide de révolution obtenu en faisant tourner D autour de l'axe Ox et calculer son volume.

Exercice 3.46 Soit D le domaine borné, limité par l'axe Ox et le graphe de $f(x) = 3x - x^2$. Esquisser le solide de révolution obtenu en faisant tourner D autour de l'axe Ox et calculer son volume.

Exercice 3.47

Un vase a été fabriqué par modélisation. On a utilisé le D le domaine borné, limité par les droites d'équations $x = 2$, $x = 9$, l'axe Ox et le graphe de $f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{100}x^4}$. Esquisser, sur le graphique ci-contre, le solide de révolution obtenu en faisant tourner D autour de l'axe Ox et calculer le volume de ce vase.



Exercice 3.48 Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du trapèze de sommets $(2;0)$, $(4;0)$, $(4;6)$ et $(2;2)$.

Exercice 3.49 Une jante de voiture a été fabriquée par modélisation. On a utilisé le D le domaine borné, limité par les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$ et le graphe de $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

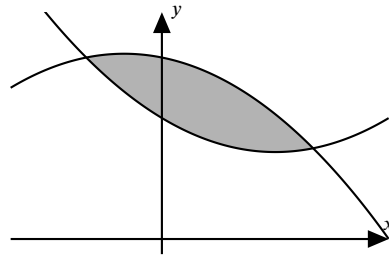
Esquisser le solide de révolution obtenu en faisant tourner D autour de l'axe Ox et calculer son volume.

Exercice 3.50 Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine borné par les graphes

a)

$$y = x^2 - 3x + 8$$

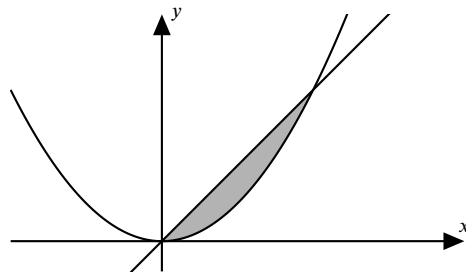
$$y = -x^2 - x + 12$$



b)

$$y = x$$

$$y = x^2$$

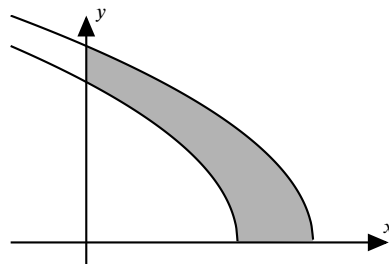


c)

$$y = \sqrt{3-x}$$

$$y = \sqrt{2-x}$$

pour $x \geq 0$

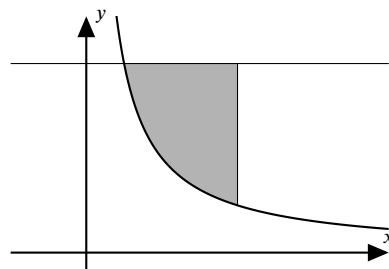


d)

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = 2$$

pour $x \in [\frac{1}{2}; 2]$



Exercice 3.51 Soit D le domaine borné, limité par les axes ainsi que les graphes de $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ et $g(x) = -2x+10$. Esquisser le solide de révolution obtenu en faisant tourner D autour de l'axe Ox et calculer son volume.

6.4 Fonctions exponentielles

Exercice 4.1 Pour la fonction exponentielle de base a , notée $\exp_a$:

- | | |
|---|---|
| a) Quelle est l'expression de la fonction ? | j) Quelle est l'image de $\frac{3}{4}$? |
| b) Quelle est la différence entre $\exp_2$ et la fonction puissance 2 ? | k) Que peut-on dire sur l'image d'une somme ? |
| c) Quelles sont les conditions que doit remplir a ? | l) Que peut-on dire sur l'image d'une différence ? |
| d) Quel est son ensemble de définition ? | m) Que peut-on dire sur $\exp_{ab}$? |
| e) Quelle est son image ? | n) Que peut-on dire sur $\exp_{a/b}$? |
| f) Quelle est sa fonction réciproque ? | o) Que peut-on dire sur $\exp_{a^n}$? |
| g) Quelle est l'image de 0 ? | p) Lorsqu'on parle simplement de la fonction exponentielle, dans quelle base est-on ? Quelle est sa fonction réciproque ? |
| h) Quelle est l'image de 1 ? | q) Pour quel y , $\exp_a(x) = \exp(y)$? |
| i) Quelle est l'image de -2 ? | |

Exercice 4.2 Calculer l'ensemble de définition, l'ordonnée à l'origine et le signe des fonctions suivantes.

- | | | | |
|---------------------------------|--------------------------------|---|-------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x}$ | b) $f(x) = e^{\sqrt{x^2 + x}}$ | c) $f(x) = (x + 3) \cdot e^{\frac{1}{x}}$ | d) $f(x) = e^{\frac{1}{x+3}}$ |
|---------------------------------|--------------------------------|---|-------------------------------|

Exercice 4.3 Calculer les dérivées suivantes.

- | | | | |
|----------------|----------------------|-------------------|---------------------------|
| a) $(e^{2x})'$ | b) $(e^{\sqrt{x}})'$ | c) $(e^{x^3+1})'$ | d) $(e^{x^4} \cdot e^x)'$ |
|----------------|----------------------|-------------------|---------------------------|

Exercice 4.4 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

- | | | | |
|---------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x}$ | b) $f(x) = e^{\sqrt{x^2 + x}}$ | c) $f(x) = (x + 3)e^{\frac{1}{x}}$ | d) $f(x) = e^{\frac{1}{x+3}}$ |
|---------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|

Exercice 4.5 Calculer l'ensemble de définition, les zéros et la dérivée des fonctions suivantes.

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $f(x) = e^{5x}$ | d) $f(x) = (3x + 1) \cdot e^x$ | g) $f(x) = \frac{x+5}{e^x - 1}$ |
| b) $f(x) = e^{x^2}$ | e) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ | h) $f(x) = \sin(x)e^{\sin(x)}$ |
| c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ | f) $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$ | i) $f(x) = e^{x \cos(5x)}$ |

Exercice 4.6 Calculer les primitives de ces fonctions.

- | | | |
|----------------------|---------------------------------------|--------------------------|
| a) $f(x) = e^{5x}$ | c) $f(x) = e^{-3x}$ | e) $f(x) = e^x(e^x + 1)$ |
| b) $f(x) = e^{2x+1}$ | d) $f(x) = (2x - 3)e^{2x^2 - 6x + 1}$ | f) $f(x) = (e^x + 1)^2$ |

Exercice 4.7 Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

$$\text{a) } \int \frac{e^x + 1}{3} dx \quad \text{b) } \int e^{(4x^5 - 2x^2 + 3)} \cdot (5x^4 - x) dx \quad \text{c) } \int e^{x^3} \cdot e^{2x^2} \cdot (3x^2 + 4x) dx$$

Exercice 4.8 Calculer les intégrales définies suivantes :

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{1}{e^x} dx \quad \text{b) } \int_1^2 e^{3x-7} dx \quad \text{c) } \int_0^2 x \cdot e^{x^2} dx \quad \text{d) } \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}} dx$$

Exercice 4.9 Étudier la fonction $f(x) = \frac{8}{e^x - 2}$ (à l'exception de $\delta(x)$).

Exercice 4.10 Étudier la fonction donnée par l'expression $f(x) = 6e^x - e^{2x}$ (à l'exception de $\delta(x)$).

Limites de fonctions exponentielles dont l'exposant est une fonction

Exercice 4.11 Calculer les limites suivantes.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-x^2} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-e^x} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x-1}} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-x^2} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} e^x \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-e^x} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x)e^x \end{array}$$

Exercice 4.12 Calculer les limites suivantes.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x+1}{x-5}} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{2x-11}{x-5}} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1-x}{x^2-9}} & \text{m) } \lim_{x \rightarrow 3} e^{\frac{1-x}{x^2-9}} < \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x+1}{x-5}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x-11}{x-5}} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-x}{x^2-9}} & \text{n) } \lim_{x \rightarrow 3} e^{\frac{1-x}{x^2-9}} > \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 5} e^{\frac{x+1}{x-5}} < & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 5} e^{\frac{2x-11}{x-5}} < & \text{k) } \lim_{x \rightarrow -3} e^{\frac{1-x}{x^2-9}} < & \text{o) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2-9}{1-x}} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 5} e^{\frac{x+1}{x-5}} > & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 5} e^{\frac{2x-11}{x-5}} > & \text{l) } \lim_{x \rightarrow -3} e^{\frac{1-x}{x^2-9}} > & \text{p) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2-9}{1-x}} \end{array}$$

Exercice 4.13 Étudier la fonction $f(x) = \frac{8}{e^x - 2}$ (à l'exception de $\delta(x)$).

Exercice 4.14 Étudier la fonction $f(x) = e^{\frac{8}{x-2}}$ (à l'exception de $\delta(x)$).

Exercice 4.15 Étudier la fonction donnée par l'expression $f(x) = e^{-x^2}$ (à l'exception de $\delta(x)$).

Calcul de limite de fonctions exponentielles**Exercice 4.16** Calculer les limites suivantes à l'aide du théorème de Bernoulli-L'Hospital.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$	d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$	g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x$	j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x}}{5 - 3e^x}$
b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$	e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x + 2}$	h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2 + 7}$	k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 5e^x}{5 - 3e^x}$
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{1 - e^x}$	f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$	i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{5 - 3e^x}$	l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 5e^x}{5 - 3e^x}$

Exercice 4.17 Calculer les limites suivantes à l'aide du théorème de Bernoulli-L'Hospital.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$	c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$	d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$
---	---	---	---

Exercice 4.18 Calculer les limites suivantes en utilisant la « règle du plus fort » lorsque c'est nécessaire.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1}$	c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x}$	e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x^2)e^x$
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 - x^2}$	d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^x$	f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^x$

Exercice 4.19 Calculer les limites suivantes en utilisant la « règle du plus fort » lorsque c'est nécessaire.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$	g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1}$	k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^x$	h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2}{e^x}$	l) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \cdot x^2$
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-x}$	i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^x}$	m) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \cdot x^2$
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot e^{3x-5}$	j) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$	n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-x}$		
f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1}$		

Exercice 4.20 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3 + 1}$	c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + 1}{e^x}$	e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x^7)e^x$
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 - x^4}$	d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^x$	f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^8 + 1)e^x$

Exercice 4.21 Étudier la fonction donnée par l'expression $f(x) = \frac{x^2}{e^{2x}}$ (à l'exception de $\delta(x)$).**Exercice 4.22** Étudier la fonction donnée par l'expression $f(x) = (x^2 - 6) \cdot e^{2x}$ (à l'exception de $\delta(x)$).**Exercice 4.23** Étudier la fonction donnée par l'expression $f(x) = \frac{e^x}{2 - e^x}$ (à l'exception de $\delta(x)$).**Exercice 4.24** Étudier la fonction donnée par l'expression $f(x) = x e^{\frac{1}{x+1}}$ (à l'exception de $\delta(x)$).

Problèmes

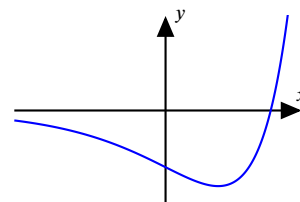
Exercice 4.25 Selon un professeur de mathématiques farfelu, le nombre de faits dont se souviennent ses élèves t jours après un examen se calcule avec la fonction :

$$N(t) = \frac{2000}{1 + e^t}$$

- Calculer et interpréter $N(0)$.
- Calculer et interpréter $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$.
- Démontrer que cette fonction est décroissante.
- A partir de combien de jours après l'examen, les élèves se souviendront-ils de moins du quart des connaissances de départ ?

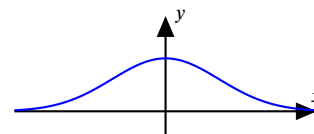
Exercice 4.26

Déterminer l'équation de la tangente au graphe de $f(x) = e^{2x} - 4e^x$ en son point d'intersection avec l'axe Oy .



Exercice 4.27

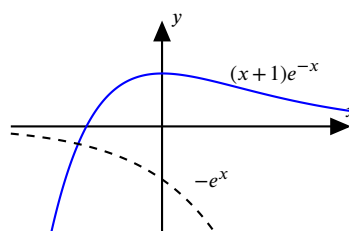
Un rectangle $ABCD$ est tel que A et B sont sur Ox , alors que C et D sont sur la courbe $y = e^{-x^2}$. Calculer les coordonnées de ses sommets pour que son aire soit maximum.



Exercice 4.28 Soit la fonction $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$. Déterminer a et b afin que le graphe de f soit tangent à l'axe Ox en $x = 1$.

Exercice 4.29

Soit les fonctions $f(x) = (x+1)e^{-x}$ et $g(x) = -e^x + a$. Déterminer a de sorte que les graphes de f et g se coupent en l'extremum de f .



Exercice 4.30 Soit f la fonction donnée par l'expression $f(x) = e^x + x$.

- Cette fonction a-t-elle un zéro dans $[0; 2]$?
- Calculer l'aire du domaine D borné, limité par les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et le graphe de f .
- Calculer le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner D autour de l'axe Ox .

Exercice 4.31 Soit $k \in \mathbb{R}$. On fait tourner autour de l'axe Ox la surface située sous la courbe d'équation $y = ke^x$ et entre les droites $x = 0$ et $x = 1$. Pour quelle valeur de k le volume du solide obtenu vaut-il π ?

6.5 Fonctions logarithmiques

Exercice 5.1 Calculer l'ensemble de définition des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = (x+5)\ln(x+2)$

e) $f(x) = x \cdot \ln(x^3 + x^2 - x)$

h) $f(x) = \frac{(x-7)\ln(x+2)}{\ln(x+1)}$

b) $f(x) = (x+5)\ln(|x+2|)$

f) $f(x) = \frac{2+\ln(x)}{1-\ln(x)}$

i) $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{x}\right)$

c) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

g) $f(x) = \frac{x\ln(2+x)}{\ln(1-x)}$

j) $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{3+\ln(2+x)}$

d) $f(x) = \ln(|x^2 - 9|)$

Exercice 5.2 Déterminer les zéros des fonctions de l'exercice précédent.

Exercice 5.3 Étudier le signe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \ln(2-4x)$

b) $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right)$

d) $f(x) = \frac{\ln(x)+3}{\ln(x)-2}$

Exercice 5.4 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
<

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
>

Que peut-on dire sur la fonction donnée par $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ grâce à ces limites ?

Exercice 5.5 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 10x + 25)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 10x + 25)$

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \ln(x^2 - 10x + 25)$
<

d) $\lim_{x \rightarrow 5} \ln(x^2 - 10x + 25)$
>

Que peut-on dire sur la fonction donnée par $f(x) = \ln(x^2 - 10x + 25)$ grâce à ces limites ?

Exercice 5.6 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{4+2x}{3+x}\right)$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \ln\left(\frac{4+2x}{3+x}\right)$
<

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \ln\left(\frac{4+2x}{3+x}\right)$
<

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{4+2x}{3+x}\right)$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \ln\left(\frac{4+2x}{3+x}\right)$
>

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \ln\left(\frac{4+2x}{3+x}\right)$
>

Que peut-on dire sur la fonction donnée par $f(x) = \ln\left(\frac{4+2x}{3+x}\right)$ grâce à ces limites ?

Exercice 5.7 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\left|\frac{4+2x}{3+x}\right|\right)$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \ln\left(\left|\frac{4+2x}{3+x}\right|\right)$
<

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \ln\left(\left|\frac{4+2x}{3+x}\right|\right)$
<

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\left|\frac{4+2x}{3+x}\right|\right)$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \ln\left(\left|\frac{4+2x}{3+x}\right|\right)$
>

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \ln\left(\left|\frac{4+2x}{3+x}\right|\right)$
>

Que peut-on dire sur la fonction donnée par $f(x) = \ln\left(\left|\frac{4+2x}{3+x}\right|\right)$ grâce à ces limites ?

Exercice 5.8 Calculer les dérivées.

$$\text{a) } (\ln(5x))' \quad \text{b) } (\ln(2x^2))' \quad \text{c) } (\ln(x^3 + 1))' \quad \text{d) } \left(\frac{\ln(x) - 1}{\ln(x) + 2} \right)'$$

Exercice 5.9 Calculer l'ensemble de définition, les zéros et la dérivée des fonctions suivantes.

$$\text{a) } f(x) = \ln(-4x + 5) \quad \text{b) } f(x) = \ln(x^2 - x) \quad \text{c) } f(x) = x(\ln(x) - 1) \quad \text{d) } f(x) = \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1}$$

Exercice 5.10 La capacité pulmonaire C , en litres, d'une personne en fonction de son âge se calcule avec la fonction

$$C(t) = \frac{110(\ln(t) - 2)}{t}$$

où t est l'âge exprimée en années et $t > e^2$.

- Calculer la capacité pulmonaire d'une personne âgée de 10, 20, 30 et 70 ans.
- Calculer l'âge auquel la capacité pulmonaire d'une personne est maximale.

Exercice 5.11 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = \ln(x)$ au point d'abscisse e .

Calcul de limites de fonctions logarithmiques

Exercice 5.12 Calculer les limites suivantes à l'aide du théorème de Bernoulli-L'Hospital.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^x & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cdot \ln(x^3) \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cdot \ln(x) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^{2x}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \ln(-x) \end{array}$$

Exercice 5.13 Calculer les limites suivantes à l'aide du théorème de Bernoulli-L'Hospital.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(4-x)}{x-3} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\ln(x^2-4)} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-3}{\ln(x^5)} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} (x-x^2) \cdot \ln(2x) \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x)-1}{e-x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\ln(x^2-3)} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2+1)} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2+3} \cdot \ln(2x) \end{array}$$

Exercice 5.14 Calculer les limites suivantes en utilisant la « règle du plus fort » lorsque c'est nécessaire.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{\ln(2x)} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x^5) \cdot e^x & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} \cdot \ln(x^3+1) \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0_+} (x^3+x) \cdot \ln(x) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+2x-3)}{e^{2x}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \ln(-2x) \end{array}$$

Exercice 5.15 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(2+x)}{x+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2-8)}{x-3}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+3}{x \cdot \ln(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x)-1}{x^2-e^2}$

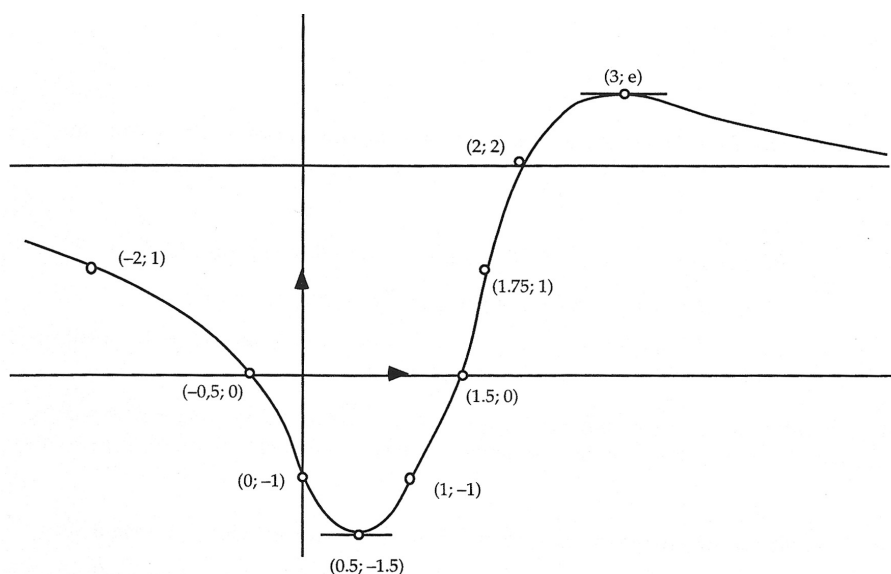
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x \cdot \ln(x)}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Étude de fonctions logarithmiques

Exercice 5.16 On donne le graphe d'une fonction f :



On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(|f(x)|)$. Sans chercher de formule algébrique donnant $f(x)$, mais à l'aide d'observations faites sur le graphique ci-dessus,

- déterminer les zéros de $g(x)$,
- déterminer le signe de $g(x)$,
- déterminer les équations des asymptotes de $g(x)$,
- exprimer la dérivée de g à l'aide de $f(x)$ et de $f'(x)$; en déduire la croissance de g ,

Exercice 5.17 Étudier la fonction donnée par l'expression $f(x) = \ln\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right)$

Exercice 5.18 Étudier la fonction donnée par l'expression $g(x) = \ln(|2x+3|)$

Exercice 5.19 Étudier la fonction donnée par l'expression $h(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{x}\right)$

Exercice 5.20 Étudier la fonction donnée par l'expression $f(x) = \ln^2(x) \cdot (1 + \ln(x))$

Exercice 5.21 Étudier la fonction donnée par l'expression $g(x) = \frac{\ln(x^2)}{2\ln(x)-1}$

Exercice 5.22 Déterminer les fonctions f et g sachant que :

a) $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f(-1) = 5$

b) $g'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(e) = -g(e^2)$

Exercice 5.23 Soit la fonction $f(x) = \frac{(1 + \ln(x))^2}{x}$. Déterminer le réel $k > 1$ de sorte que l'aire de la région du plan comprise entre la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = k$ et $y = 0$ soit égale à $\frac{8}{3}$.

Exercice 5.24 On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 1}$ sur $]1; +\infty[$.

- Déterminer les zéros de f et son extremum.
- Donner l'équation de l'asymptote oblique de f .
- Esquisser le graphe de f à l'aide de ces éléments.
- Calculer l'aire du domaine borné, limité par le graphe de f et l'axe Ox .
- Calculer l'aire du domaine borné, limité par le graphe f , l'asymptote oblique et les droites $x = 2$ et $x = 1 + e$.
- Calculer l'aire du domaine borné, limité par le graphe f , l'asymptote oblique et les droites $x = 2$ et $y = 0$.
- Calculer l'aire du domaine borné, limité par le graphe f les droites $x = 2$, $x = 4$ et $x + 2y - 2 = 0$.

Fonctions exponentielles et logarithmes de base a

Exercice 5.25 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \log_2(2x + 3)$

b) $f(x) = \log_3(x^2 - 2x + 1)$

c) $f(x) = 3^{2x-4}$

d) $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$

Calculer les intégrales suivantes :

e) $\int_1^3 4^x dx$

f) $\int_{-1}^1 2^{x^2} x dx$

Calculer les limites suivantes :

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 2^x}{4x}$

h) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log_5(x+2)}{x+1}$

7 Solutions

7.1 Réponses - Révision sur les fonctions

1.1	a) $(x-2)(x-3)(x+5)$	e) $(x+3)(x+2)$	i) $(2x+1)(3x+5)$
	b) $7x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$	f) $-(x-6)(x+1)$	j) $(x^2+1)(x+3)(x-3)$
	c) $(x+5)(x^2-5x+25)$	g) $(2x-1)^2$	k) $(3x+1)(3x-1)(7x+3)$
	d) $(11x^2+1)(x^2+1)$	h) $(2x-1)^3$	l) $(x-5)(x^2+5x+25)$
1.2	a) $S = \left\{ \sqrt{\ln(7)} ; -\sqrt{\ln(7)} \right\}$	d) $S = \{1\}$	
	b) $S = \{7\}$	e) $S = \{0 ; -1\}$	
	c) $S = \{\log_2(7)+2\}$	f) $S = \left\{ \frac{4 \cdot \log_{11}(5)}{3 - \log_{11}(5)} \right\} = \left\{ \frac{4 \cdot \text{Log}(5)}{3 \text{Log}(11) - \text{Log}(5)} \right\}$	
1.3	a) CHF 10'939,30	b) 20 ans	c) 0,53%
1.4	En 70 ans		
1.5	a) -2	d) indéfini	g) -4
	b) 4	e) indéfini	h) -3
	c) $\frac{1}{2}$	f) 0	i) $\frac{3}{4}$
			j) $\frac{1}{3}$
1.6	a) $S = \{3\}$	d) $S = \left\{ \sqrt{e^5} \right\} = \{e^2 \sqrt{e}\}$	
	b) $S = \left\{ \sqrt[3]{7^5} \right\} = \left\{ 7 \sqrt[3]{49} \right\}$	e) $S = \{3 ; 4\}$	
	c) $S = \left\{ \frac{1}{e-1} \right\}$	f) $S = \{0\}$	La solution 120 est éliminée.
1.7	$\forall k \in \mathbb{Z}$		
	a) $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$	ou $x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$	$S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \right\}$
	b) $x - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$	$S = \left\{ 2k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$	
	c) $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$	ou $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$	$S = \left\{ -\frac{5\pi}{12} + k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$
	d) $4x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$	$S = \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$	
	e) $2x + \pi = \frac{\pi}{3} + k\pi$	$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$	
	f) $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	$S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$	

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{a) } 2x + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad S = \left\{ -\frac{5\pi}{12} + k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{12} + k\pi \right\}$$

1.8

$$\text{b) } \sin(x) = \pm 1 \quad x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad S = \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$\text{c) } \cos(x) = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad \cos(x) = -\frac{1}{2} \quad S = \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

$$\text{d) } \cos^2(x) = \frac{1}{2} \quad \cos(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad S = \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\text{a) } D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{h) } D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 5[$$

$$\text{b) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4; -3; 3\}$$

$$\text{i) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$$

$$\text{c) } D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{j) } D_f = \mathbb{R}$$

1.9

$$\text{d) } D_f = \left[-\frac{2}{7}; +\infty[\right.$$

$$\text{k) } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{e) } D_f = [-3; 0] \cup [3; +\infty[$$

$$\text{l) } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{f) } D_f =]4; 5]$$

$$\text{m) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{g) } D_f = \mathbb{R}_+ \setminus \{9\}$$

$$\text{n) } D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

a)

	$-\sqrt{5}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\sqrt{5}$					
$f(x)$	+	0	-		-	0	+	0	-

f)

	0	100
$f(x)$	//// 10	+ 0 -

b)

	-4	0	1				
$f(x)$	-	0	+	0	+	0	+

g) périodique sur 2π (et même sur π)

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π					
$f(x)$	-1	-	0	+	0	-	0	+	0	-	-1

1.10

c)

	-4	-1	1				
$f(x)$	+		-		+		-

h) période 2π

	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π			
$f(x)$	5	+	0	-	0	+	5

d)

	-3	$-\frac{1}{2}$	4
$f(x)$	$-$	0	$+$

i) période 6π

	0	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$	6π			
$f(x)$	1	+	0	-	0	+	1

e)

	10
$f(x)$	+ 0 ////

a) période 2π

	0	π	2π
$f(x)$	2	+	2

b) période π

	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$		-	

c) période $\frac{\pi}{2}$

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	+	0

d)

	$-\ln(2)$	$-\frac{1}{3}$
$f(x)$	+	

e)

	0	$\frac{e}{2}$
$f(x)$		+

f)

	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	+	

1.11

$$1.12 \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - (x^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

$$1.13 \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$1.14 \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{x(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

a) $f'(x) = 15x^2 + 8x - 1$

b) $g'(x) = -\frac{4}{x^5}$

c) $h'(x) = -\frac{20}{x^5}$

d) $i'(x) = \frac{4x^3}{5}$

1.15 e) $j'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

f) $k'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

g) $l'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

h) $m'(x) = -\sin(x) + \cos(x) + 1 + \tan^2(x)$

i) $f'(x) = 3x^2 - 18x - 21 = 3(x-7)(x+1)$

j) $g'(x) = \frac{3x^2 - 42x - 4}{(3x^2 + 4)^2}$

k) $h'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

l) $i'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

m) $f'(x) = 21(3x+5)^6$

n) $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

o) $h'(x) = -4\sin(4x+\pi) = 4\sin(4x)$

p) $i'(x) = (2x-1)^3(5-x)^2(-14x+43)$

q) $j'(x) = \frac{(x^2+7)^3(7x^2+40x-7)}{(x+5)^2}$

r) $k(x) = 12\sin^3(3x)\cos(3x)$

a) $f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$

b) $g'(x) = (1+x)e^x$

1.16

c) $h'(x) = \frac{-2}{e^{x+2}}$

d) $i'(x) = \frac{5e\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

e) $j'(x) = \frac{3x^2+1}{x^3+x}$

f) $k'(x) = \ln(x)$

g) $l'(x) = \frac{35}{5x+1}$

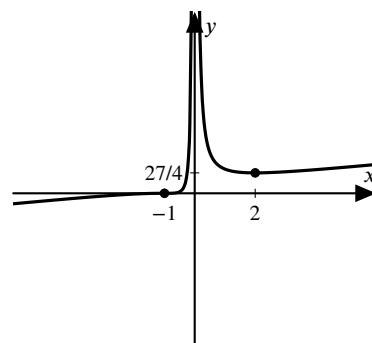
h) $m'(x) = \frac{35}{5x+1}$

i) $n'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

$$g'(x) = \frac{(x-2)(x+1)^2}{x^3}$$

1.17

	-1		0		2	
+	0	+		-	0	+
↗	plat (-1;0)	↗		↘	MIN (2;27/4)	↗



1.18 $y = -x + 1$

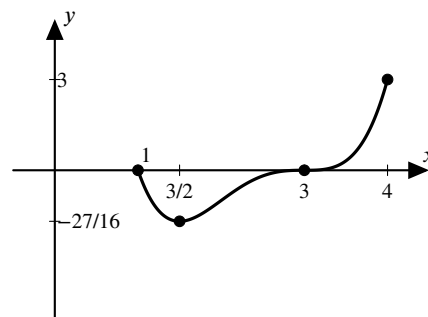
$$f'(x) = 2(x-3)^2(2x-3)$$

1.19

	3/2		3	
-	0	+	0	+
↘	MIN (3/2; -27/16)	↗	plat (3;0)	↗

Le minimum global est $\left(\frac{3}{2}; -\frac{27}{16}\right)$.

Le maximum global est (4;3).



a) $f(x) = \frac{(x+4)(x-3)}{(x-5)(x-2)}$
AV : $x = -2$ et $x = 5$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1$
Trou : (0;1)

b) $f(x) = \frac{(x+2)^2(x-2)^2}{(x+3)(x-2)}$
AV : $x = -3$ et trou : (2;0)

g) Trou : $\left(9; -\frac{1}{6}\right)$ Point limite : $\left(0; -\frac{1}{3}\right)$

1.20

c) $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x^2+3)}$
Trou : $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$

h) $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{9-x^2}}$

AV au bord de l'ensemble de définition : $x = -3$
et point limite trou (3;0)

d) Trou : $\left(1; \frac{13}{7}\right)$

i) Trous : (0;5)

e) Trou : $\left(1; \frac{13}{8}\right)$ AV : $x = -1$

AV en $x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

1.21

a) AH : $y = \frac{1}{5}$

c) AH : $y = 0$

e) AH : $y = 4$

b) AO : $y = x - 1$

d) AO : $y = x$

f) AO : $y = x - 2$

a) AV : $x = 1$; AO : $y = x + 5$

	$\frac{1}{3}$		1	
$12x - 4$	-	0	+	+
$(x - 1)^2$	+		+	0
$\delta(x)$	-	0	+	

$f(x)$ est sous AO sur AO sur AO

Le graphe coupe l'AO au point $(\frac{1}{3}; \frac{16}{3})$

1.22

b) AV : $x = \frac{2}{3}$; AH : $y = \frac{1}{9}$

	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	
$12x - 4$	-	0	+	+
$9(3x - 2)^2$	+		+	0
$\delta(x)$	-	0	+	

$f(x)$ est sous AH sur AH sur AH

Le graphe coupe l'AH au point $(\frac{1}{3}; \frac{1}{9})$

7.2 Réponses - Optimisation

x : longueur des côtés latéraux, y : longueur du côté face au bâtiment

coût de construction : $C = 20 \cdot 2 \cdot x + 30 \cdot y = 40x + 30y$ $x \cdot y = 108 \implies y = \frac{108}{x}$

$$C(x) = 40x + \frac{3240}{x} = 40 \frac{x^2 + 81}{x} \quad E_V = \mathbb{R}_+^* \quad C'(x) = 40 \frac{2x \cdot x - (x^2 + 81)}{x^2} = 40 \frac{x^2 - 81}{x^2}$$

2.1

	0		9	
$C'(x)$	///		-	0
$C(x)$	\searrow MIN \nearrow			

MIN : (9; 720)

Le coût de construction est minimal pour un enclos mesurant 9 m (côtés latéraux) sur 12 m.

h : hauteur en mètres x : largeur en mètres

$$C = 40x + 64h \quad h = \frac{125}{2x} \quad C(x) = \frac{40x^2 + 4000}{x} \quad E_V = \mathbb{R}_+^* \quad C'(x) = \frac{40(x^2 - 100)}{x^2}$$

2.2

	0		10	
$C'(x)$	///		-	0
$C(x)$	\searrow MIN \nearrow			

MIN : (10; 800)

Le coût de construction minimal est de 800 Frs. (10 m de large et 6,25 m de haut)

$$xyh = 96 \quad y = 2x \quad 2x^2h = 96 \quad h = \frac{48}{x^2}$$

$$\text{aire des 3 côtés : } (x+2y)z = (x+4x)\frac{48}{x^2} = \frac{240}{x} \quad \text{aire du toit : } xy = x2x = 2x^2$$

$$P(x) = 240 \cdot \frac{240}{x} + 225 \cdot 2x^2 = \frac{57'600 + 450x^3}{x} \quad E_V =]0; 8]$$

$$P'(x) = \frac{1350x^3 - (57'600 + 450x^3)}{x^2} = \frac{900x^3 - 57'600}{x^2}$$

$$900x^3 - 57'600 = 0 \quad x^3 = 64 \quad x = 4$$

2.3

	0	4	8
$P'(x)$	///		- 0 +
$P(x)$	↘ MIN ↗		

MIN : (4; 21'600)

Pour une largeur de 4 m.

$$y = 2 \cdot 4 = 8 \quad h = \frac{48}{16} = 3 \quad 8 \text{ m sur } 4 \text{ m sur } 3 \text{ m}$$

a) $f(0) = \frac{10}{4} = 2,5$ mètres

b) largeur : $x+1$ hauteur : $\frac{10}{x^2+2x+4}$ profondeur : 3 $V(x) = \frac{10 \cdot 3 \cdot (x+1)}{x^2+2x+4} = \frac{30x+30}{x^2+2x+4}$

$$E_V =]0; 5[\quad V'(x) = \frac{30(x^2+2x+4) - (30x+30)(2x+2)}{(x^2+2x+4)^2} =$$

$$\frac{30x^2+60x+120-60x^2-60x-60x-60}{(x^2+2x+4)^2} = \frac{-30x^2-60x+60}{(x^2+2x+4)^2} = \frac{-30(x^2+2x-2)}{(x^2+2x+4)^2}$$

2.4

	$-1-\sqrt{3}$	0	$-1+\sqrt{3}$	5
-30	-	-	-	-
x^2+2x-2	+ 0 -	-	0 +	+
$(x^2+2x+4)^2$	+	+	+	+
$V'(x)$	///	///	+ 0 -	///
$V(x)$	↗ MAX ↘			

Les dimensions du local de volume maximal sont : 1,73 m × 1,67 m × 3 m.

Le volume maximal est 8,66 m³.

c) $V(0) = \frac{30}{4} = 7,5$ $V(5) = \frac{180}{39} = 4,62$ Le volume minimal est 4,62 m³.

Le nombre d'heures pour parcourir 1'200 km à la vitesse moyenne v est de $t = \frac{1200}{v}$.

Le salaire du chauffeur pour le trajet de 1'200 km est de $s(v) = 30t = \frac{36'000}{v}$

Le coût total du trajet comprend le salaire du chauffeur et le coût de l'essence utilisée.

Le coût de l'essence pour le trajet de 1'200 km est de $C(v) \cdot 12 \cdot 2 = \left(\frac{625}{v} + \frac{v}{3}\right) 24$.

$$P(v) = \frac{36'000}{v} + 24 \left(\frac{625}{v} + \frac{v}{3} \right) = \frac{36'000}{v} + \frac{15'000}{v} + \frac{8v^2}{v} = \frac{51'000 + 8v^2}{v} \quad E_V = \mathbb{R}_+^*$$

2.5 $P'(v) = \frac{16v \cdot v - (51'000 + 8v^2)}{v^2} = \frac{8v^2 - 51'000}{v^2}$

	$-\sqrt{6375}$			0	$\sqrt{6375}$		
$8v^2 - 51'000$	+	0	-	0	-	0	+
v^2	+		+	0	+		+
$P'(v)$	///		///		-	0	+
$P(v)$							↘ MIN ↗

Le coût de trajet est minimal pour une vitesse moyenne de 79,84 km/h.

a) $a = 0,05$ $b = 1 + \ln(54) \simeq 4,99$ $b = 5$ pour la suite de l'ex.

2.6 b) $H'(t) = 0,05(-2t + 5) \cdot e^{-t^2 + bt}$ $E_V = \mathbb{R}$ Après 2 minutes et 30 secondes

c) 25,9 mètres

a) A) $9 \cdot (1 - 0,005)^{20} \simeq 8,14$ milliards d'habitants

B) $h_1(20) \simeq 1,8^\circ\text{C}$

C) $h'_1(t) = \frac{80-t}{800}$ MAX en $t = 80$ MAX en 2110

2.7 D) $h_1(80) \simeq 4^\circ\text{C}$

b) A) $h_2(20) \simeq 2,4^\circ\text{C}$

B) $h'_2(t) = \frac{(40-t) \cdot e^{-t/40}}{200}$ MAX en $t = 40$ MAX en 2070

C) $h_2(40) \simeq 2,9^\circ\text{C}$

Aire = petite diagonale · grande diagonale : 2 petite diagonale = $20\cos(x)$ grande diagonale = $20\sin(x)$

$$A(x) = 200\cos(x)\sin(x) \quad E_V = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad A'(x) = 200(-1 + 2\cos^2(x))$$

2.8

	0			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		
$A'(v)$	///		+	0	-		///
$A(v)$	$\nearrow$			MAX	$\searrow$		

L'angle cherché est de $\frac{\pi}{4}$ et l'aire de 100 cm^2 . (C'est le carré.)

$$AP = \frac{9}{\cos(\alpha)} \quad CP = 9\tan(\alpha) \quad PB = 15 - 9\tan(\alpha) \quad t = \frac{d}{v} \quad t_{AP} = \frac{3}{\cos(\alpha)} \quad t_{PB} = \frac{5 - 3\tan(\alpha)}{2}$$

$$T(\alpha) = \frac{3}{\cos(\alpha)} + \frac{5 - 3\tan(\alpha)}{2} \quad \tan^{-1}\left(\frac{15}{9}\right) \simeq 1,03 \text{ rad} \quad E_V =]0; 1,03[\quad T'(\alpha) = \frac{3(2\sin(\alpha) - 1)}{2\cos^2(\alpha)}$$

2.9

	0 $\frac{\pi}{6}$ 1,03							
$T'(v)$	///		−	0	+		///	
$T(v)$	↘ MIN ↗							

MIN : $\left(\frac{\pi}{6}; 4,6\right)$

L'angle cherché est de 30° .

2.10

Aire = (petite base + grande base) · hauteur : 2 petite base = 10 grande base = $10 + 20\cos(\alpha)$
 hauteur = $10\sin(\alpha)$ $A(\alpha) = 100(1 + \cos(\alpha))\sin(\alpha)$ $E_V = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ L'angle cherché est de $\frac{\pi}{3}$.

$$\mathcal{A} = \frac{(6+x) \cdot y}{2} \quad y = -\frac{2}{9}x^2 + 8 \quad \mathcal{A}(x) = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 4x + 24 \quad E_V =]0; 6[\quad \mathcal{A}'(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 4$$

2.11

MAX en $x = 2$ $\mathcal{A}(2) = \frac{256}{9}$
 L'aire du triangle est maximale pour $P\left(2; \frac{64}{9}\right)$.

2.12

$\mathcal{A}(x) = \frac{x \cdot \sqrt{9-x}}{2}$ L'aire du rectangle OAB est maximale pour $B(6; \sqrt{3})$.

2.13

$\mathcal{A}(x) = -4x^2 + 12x$ L'aire du rectangle $PQRS$ est maximale pour $P\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

$$\delta(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 9)^2}$$

2.14

La distance d'un point de la courbe $y = x^2 - 9$ à l'origine est minimale aux points de coordonnées $\left(-\frac{2\sqrt{17}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{2\sqrt{17}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

$$f(x) = -x^2 + 60x$$

2.15

Le produit maximal est atteint lorsque $x = 30$ et $y = 30$. Il vaut 900.
 Le produit minimal est atteint lorsque $x = 10$ et $y = 50$. Il vaut 500.

2.16 $f(b) = 30b^2 - b^3$ Le maximum de 4000 est atteint lorsque $a = 10$ et $b = 20$ ou que $a = 40$ et $b = -10$.

7.3 Réponses - Intégration

3.1 a) $f(x)$ est bien la dérivée de $F(x)$. b) $\cos(3x^2) + 5x + c$ $\forall c \in \mathbb{R}$

3.2 a) $F'(x) = G'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$
b) $c = F(x) - G(x) = 1$

3.3 $k = -3$.

3.4 a) $f(x) = 10x - 3$ b) $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3.5 Les fonctions F et G sont toutes deux des primitives de la fonction $f(x) = 3x + 4$.

3.6 $k = \frac{5}{7}$.

3.7 a) $F(x) = \frac{1}{8}x^8 + c$ b) $F(x) = x^5 + c$ c) $F(x) = 3x^4 + c$ d) $F(x) = \frac{3}{4}x^4 + c$

3.8 a) $k = -\frac{1}{5}$ b) $k = -\frac{11}{5}$ c) $k = -1$ d) $k = \frac{1}{15}$

3.9 $k = \frac{5}{7}$.

3.10 a) $4x + c$ d) $-\frac{1}{x} + c$ g) $\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + c$ j) $\frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$
b) $\frac{7}{2}x^2 + c$ e) $\frac{4}{x^2} + c$ h) $\frac{15x\sqrt[3]{x}}{4} + c$ k) $-8\cos(x) + c$
c) $\frac{1}{10}x^{10} + c$ f) $\frac{-1}{2x^2} + c$ i) $10\sqrt{x} + c$ l) $4\sin(x) + c$

3.11 a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$ b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$ c) $F(x) = x^4 + x^3 + 2x + c$

3.12

a) $F(x) = 9x + \frac{1}{2}x^2 + c$

h) $F(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 2x + c$

b) $F(t) = \frac{5}{2}t^2 - t + c$

i) $F(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 5x}{7} + c$

c) $F(t) = t - \ln(|t|) + c$

j) $F(x) = \frac{1}{25}x^5 + \frac{3}{8}x^4 + c$

d) $F(t) = 3t - 7\ln(|t|) + c$

k) $F(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{4}x + c$

e) $F(t) = -\frac{3}{5}t^5 + t^2 + c$

l) $F(x) = -7\cos(x) + 3x + c$

f) $F(t) = \frac{1}{2}t^6 + \frac{2}{5}t^5 - t + c$

m) $F(x) = \frac{7\sin(x) + x}{5} + c$

g) $F(t) = 3t + e^t + c$

n) $F(x) = \frac{1}{8}e^x + c$

3.13

a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln(|x|) - \frac{1}{x} + c$

c) $F(x) = \frac{7}{4x^4} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

e) $F(x) = 3\sqrt[3]{x} - \cos(x) + c$

b) $F(t) = -\frac{1}{t^2} + 5t + c$

d) $F(t) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{t^4} + 2\sqrt{t} + c$

f) $F(x) = -3\sqrt[3]{x^2} - 5\sin(x) + c$

3.14

a) $F(x) = \tan(x) + c$

b) $F(x) = \tan(x) - x + c$

3.15

a) $\frac{1}{35}(7x-2)^5 + c$

d) $\frac{2}{11}\sqrt{11x-9} + c$

g) $\frac{1}{3}e^{3x} + c$

b) $\frac{1}{(5-x)^2} + c$

e) $\frac{3}{2}\sin\left(\frac{2}{3}x\right) + c$

h) $-\frac{1}{3e^{3x}} + c$

c) $\frac{2}{33}\sqrt{(11x-9)^3} + c$

f) $-\frac{1}{5}\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + c$

i) $5\ln(|x|) + c$

j) $5\ln(|x+2|) + c$

3.16

a) $\frac{1}{4}(3x^2+5x-1)^4 + c$

c) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+4)^3} + c$

e) $\frac{-1}{12x^4(x^2+3)^4} + c$

b) $\frac{1}{6}(x^3+3x^2+1)^2 + c$

d) $-\frac{1}{4(x^2+4)^2} + c$

f) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + c$

3.17

a) $\frac{1}{9}x^9 + \frac{14}{5}x^5 + 49x + c$

b) $\frac{1}{12}(x^4+7)^3 + c$

c) $\frac{1}{30-5x^5} + c$

d) $\frac{1}{7}x^7 - 6x^2 - \frac{12}{x^3} + c$

3.18

a) $F(x) = \frac{1}{4}(x+3)^4 + c$

f) $F(x) = \frac{1}{4}(3x^2+x)^4 + c$

k) $F(x) = \sqrt{x^2+2x} + c$

b) $F(x) = \frac{1}{6}(2x-1)^3 + c$

g) $F(x) = \frac{1}{40}(4x^2+8x+3)^5 + c$

l) $F(x) = -\frac{1}{4(x+4)^4} + c$

c) $F(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + x + c$

h) $F(x) = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} - \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + c$

m) $F(x) = -\frac{3}{8(x^2+4)^4} + c$

d) $F(x) = \frac{1}{42}(7x-2)^6 + c$

i) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} + c$

n) $F(x) = \frac{5}{2}x^2 - x - \frac{4}{x} + c$

e) $F(x) = \frac{1}{84}(7x^2-2)^6 + c$

j) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + c$

3.19

a) $\frac{1}{3}\sin(3x) + c$

d) $-\frac{1}{3}\cos^3(x) + c$

g) $5\tan(x) + 5\sin(x) + c$

b) $-\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + c$

e) $\frac{1}{3}\tan^3(x) + c$

h) $-8\cos(x) + 4\sqrt{2x} + c$

c) $\frac{1}{3}\sin^3(x) + c$

f) $-2\cos(x) - 3\sin(x) + c$

i) $\frac{2}{\cos(3x)} + c$

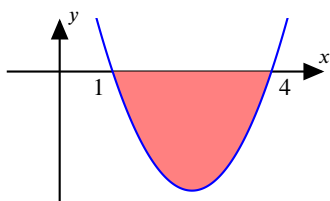
j) $2\tan(3x) + c$

3.20	a) $\frac{1}{2}e^{x^2+7} + c$	b) $-e^{\cos(x)} + c$	c) $\frac{\frac{1}{7}e^{7x+2x}}{5} + c$
3.21	a) $11 \ln(x) + c$ b) $-\frac{1}{3} \ln(1-3x) + c$	c) $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$ d) $\frac{3}{4} \ln(3x^4+4x-1) + c$	e) $\frac{3}{2} \ln(x) + c$ f) $\frac{1}{3} \ln(3x+1) + c$ g) $-\frac{1}{2} \ln(1-2x) + c$ h) $\frac{1}{3} \ln(x^3-3x+1) + c$
3.22	a) $F(x) = \frac{3}{2} \ln(x^2+1) + c$ b) $F(x) = -\frac{3}{x+1} + c$ c) $F(x) = 3 \ln(x+1) + c$ d) $F(x) = \ln(x^2-x-2) + c$	e) $F(x) = -\frac{2}{x-1} + c$ f) $F(x) = \ln(x-1) + c$ g) $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2-4) + c$ h) $F(x) = 2 \ln(x^2+x+1) + c$	i) $F(x) = \sqrt{x^2+1} + c$ j) $F(x) = -\frac{1}{x+2} + c$ k) $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+4) + c$ l) $F(x) = 2 \ln(x-3) + c$
3.23	a) $\int 4x^3 - 6x^2 + 12x - 24 + \frac{51}{x+2} dx = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 24x + 51 \ln(x+2) + c$ b) $\int \left(x^4 + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{x-1} + c$		
3.24	a) $\int \left(x+1 + \frac{4}{3x+1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{4}{3} \ln(3x+1) + c$ b) $\int \left(2x^2 - x + \frac{2}{x^3-3x^2+3x-1} \right) dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{(x-1)^2} + c$ c) $\int 3x^2 + 1 dx = x^3 + x + c$ d) $\frac{1}{3} \ln(x^3-6x^2+2) + c$ e) $\int \left(2x^2 + 1 + \frac{x+1}{x^2-1} \right) dx = \frac{2}{3}x^3 + x + \ln(x-1) + c$ f) $\int 2x^2 + 1 + \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{2}{3}x^3 + x + \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + c$		
3.25	a) $[(x+1)(x-3)]' = (x^2-2x-3)' = 2x-2 = 2(x-1)$ ce n'est pas un multiple de $2x-7$. b) $\frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} = \frac{a(x-3)+b(x+1)}{x^2-2x-3} = \frac{(a+b)x+(-3a+b)}{x^2-2x-3}$ $\begin{cases} a+b=2 \\ -3a+b=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{9}{4} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases}$ c) $F(x) = \frac{9}{4} \ln(x+1) - \frac{1}{4} \ln(x-3)$		
3.26	$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$	$F(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2)$	
3.27	1er rectangle : $A_1 = f(0) \cdot \frac{1}{2} = 0$ 3e rectangle : $A_3 = f(1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$ 5e rectangle : $A_5 = f(2) \cdot \frac{1}{2} = 1 = \frac{16}{16}$ 7e rectangle : $A_7 = f(3) \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4} = \frac{36}{16}$	2e rectangle : $A_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ 4e rectangle : $A_4 = f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$ 6e rectangle : $A_6 = f\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{16}$ 8e rectangle : $A_8 = f\left(\frac{7}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{16}$	
	Aire totale = $\frac{140}{16} = \frac{35}{4}$		

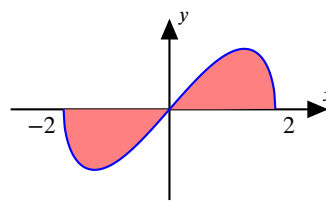
- a) 21 d) $-4 - 7\ln(3)$ g) $\frac{1}{6}$ j) $\frac{\ln(2)}{2}$ m) – car 0 n'est pas dans D_f
3.28 b) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{14}{3}$ h) $2\sqrt{2} - \frac{5}{2}$ k) $-\frac{7}{3}$ n) $\frac{1}{3}$
 c) -4 f) 3 i) $e - 1$ l) $\frac{32}{15}$ o) 0

- 3.29** a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ c) 2 e) $\sqrt{2}-1$
 b) 2 d) – car $\frac{\pi}{2}$ n'est pas dans D_f f) $-\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2}$

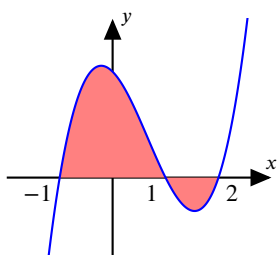
a) $\left| \int_1^4 (x^2 - 5x + 4) dx \right| = \frac{9}{2}$



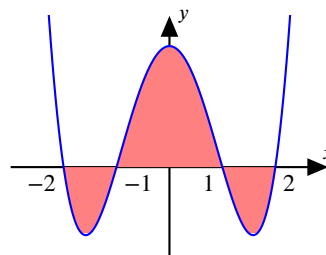
c) $\left| \int_{-2}^0 x\sqrt{4-x^2} dx \right| + \left| \int_0^2 x\sqrt{4-x^2} dx \right| = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$



3.30 b) $\left| \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \right|$
 $= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$

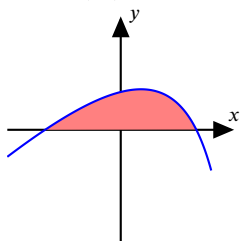


d) $\left| \int_{-2}^{-1} (x^4 - 5x^2 + 4) dx \right| + \left| \int_{-1}^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx \right|$
 $+ \left| \int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4) dx \right| = \frac{22}{15} + \frac{76}{15} + \frac{22}{15} = 8$



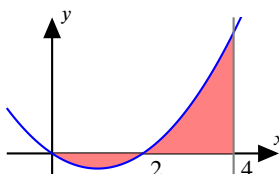
$\left| \int_{-1}^1 \left(\frac{x^2-1}{x-2} \right) dx \right| = \left| \int_{-1}^1 \left(x+2 + \frac{3}{x-2} \right) dx \right|$
 $= 4 - \ln(27)$

3.31

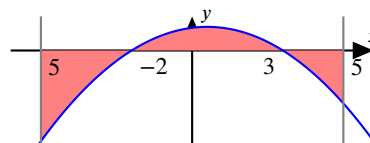


a) $\left| \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_2^4 (x^2 - 2x) dx \right| = \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = 8$

3.32



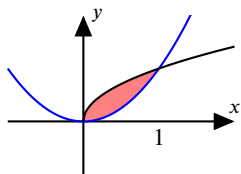
b) $\left| \int_{-5}^{-2} (-x^2 + x + 6) dx \right| + \left| \int_{-2}^3 (-x^2 + x + 6) dx \right| +$
 $\left| \int_3^5 (-x^2 + x + 6) dx \right| = \frac{63}{2} + \frac{125}{6} + \frac{38}{3} = 65$



3.33 a) $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

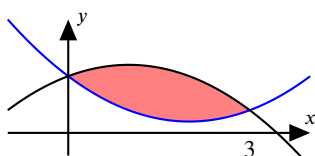
b) $\frac{5}{576}$

a) $\left| \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx \right| = \frac{1}{3}$

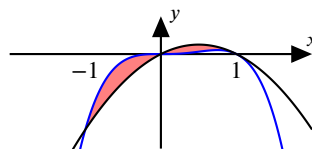


3.34

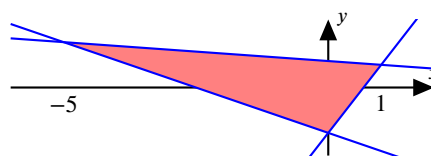
b) $\left| \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx \right| = 9$



c) $\left| \int_{-1}^0 (x^4 - x^3 - x^2 + x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^4 - x^3 - x^2 + x) dx \right| = \frac{23}{60} + \frac{7}{60} = \frac{1}{2}$



d) $\left| \frac{19}{6} \int_{-5}^0 \left(\frac{1}{5}x + 1\right) dx \right| + \left| \frac{19}{6} \int_0^1 (-x + 1) dx \right| = \frac{95}{12} + \frac{19}{12} = \frac{19}{2}$



3.35 $\left| \int_{-1}^1 (-3x + 3) dx \right| + \left| \int_1^2 (3x - 3) dx \right| = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$

3.36 impossible car 0 n'est pas dans D_f

3.37 $\left| \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx \right| = \frac{3}{8}$

3.38 $\left| \int_1^2 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} - \frac{4}{x^2}\right) dx \right| + \left| \int_2^5 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} - \sqrt{x-1}\right) dx \right| = \frac{7}{4} + \frac{43}{12} = \frac{16}{3}$

3.39 $\mathcal{A} = \frac{10}{3}$

$$\text{a) } \int_{-3}^2 (f(x) - g(x)) \, dx \quad \text{ou} \quad \int_{-3}^2 f(x) \, dx - \int_{-3}^2 g(x) \, dx$$

$$\text{b) } \int_{-3}^2 f(x) \, dx + \int_2^5 g(x) \, dx$$

$$\text{c) } \int_3^5 (f(x) - g(x)) \, dx + \int_5^8 (h(x) - g(x)) \, dx \quad \text{ou} \quad \int_3^5 f(x) \, dx + \int_5^8 h(x) \, dx - \int_3^8 g(x) \, dx$$

3.40

$$\text{d) } 16\pi - \int_0^{6,6} f(x) \, dx + \int_{6,6}^8 (8 - f(x)) \, dx \quad \text{ou} \quad 64 - \int_0^{6,6} f(x) \, dx - \int_0^{6,6} (8 - g(x)) \, dx - \int_{6,6}^8 (f(x) - g(x)) \, dx$$

$$\text{ou } 16\pi + 1,4 \cdot 8 - \int_0^8 f(x) \, dx \text{ ou } \dots$$

$$\text{e) } \int_{-4,3}^6 f(x) \, dx - \int_1^6 g(x) \, dx \quad \text{ou} \quad \int_{-4,3}^1 f(x) \, dx + \int_1^6 (f(x) - g(x)) \, dx$$

$$\text{f) } \int_2^5 f(x) \, dx + \int_5^{9,9} h(x) \, dx - \int_7^{9,9} g(x) \, dx \quad \text{ou} \quad \int_2^5 f(x) \, dx + \int_5^7 h(x) \, dx + \int_7^{9,9} (h(x) - g(x)) \, dx$$

3.41

$$\text{a) } S = \left\{ 6 \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

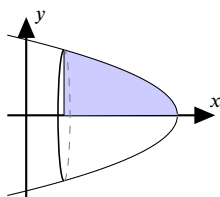
$$\text{b) } S = \left\{ 7 \right\}$$

$$\text{c) } S = \left\{ 0; 4 \right\}$$

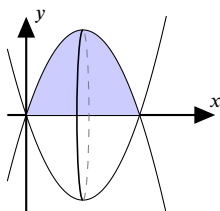
$$\text{3.42 } m = \frac{3}{2}$$

$$\text{3.43 } a = \sqrt[3]{3}$$

$$\text{3.44 } \lim_{c \rightarrow +\infty} A(c) = 1$$

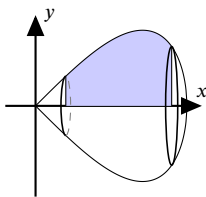
3.45

$$\pi \int_1^4 (4 - x) \, dx = \frac{9\pi}{2}$$

3.46

$$\pi \int_1^3 (3x - x^2)^2 \, dx = \frac{81\pi}{10}$$

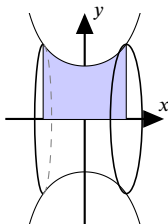
3.47



$$\pi \int_2^9 \left(x^2 - \frac{1}{100}x^4\right) dx = \frac{183'449\pi}{1500} \approx 384,2$$

$$3.48 \quad \pi \int_2^4 (2x-2)^2 dx = \frac{104\pi}{3}$$

3.49

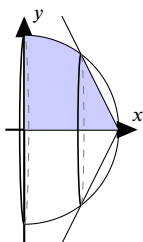


$$\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)} dx = 2\pi$$

3.50

a) 162π b) $\frac{2\pi}{15}$ c) $\frac{5\pi}{2}$ d) $\frac{9\pi}{2}$

3.51



$$\pi \int_0^3 (25-x^2) dx + \pi \int_3^5 (-2x+10)^2 dx = \frac{230\pi}{3}$$

7.4 Réponses - Fonctions exponentielles

4.1

a) $\exp_a(x) = a^x$

b) $\exp_2 = 2^x$, c'est l'exposant qui varie.
 x^2 , c'est la base qui varie.

c) $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

d) $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{R}_+^*$

f) $\log_a$

g) 1

h) a

i) $\frac{1}{a^2}$

j) $\sqrt[4]{a^3}$

k) $\exp_a(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

L'image d'une somme = produit des images.

l) $\exp_a(x-y) = a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

L'image d'une diff. = quotient des images.

m) $\exp_{ab}(x) = (ab)^x = a^x \cdot b^x$

$$\exp_{ab} = \exp_a \cdot \exp_b$$

n) $\exp_{a/b}(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

$$\exp_{ab} = \frac{\exp_a}{\exp_b}$$

o) $\exp_{a^n}(x) = (a^n)^x = a^{nx}$

$$\exp_{a^n} = \exp_a \circ f(x) \text{ où } f(x) = nx$$

p) $\exp(x) = \exp_e(x) = e^x$ La base est $e \approx 2,71$.

La réciproque de exp est ln.

q) $\exp_a(x) = a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x \ln(a)}$ donc $y = x \ln(a)$

4.2

a) $D_f = \mathbb{R}$ $f(0) = -1$

	-1	1
$f(x)$	+ 0 - 0 +	

c) $D_f = \mathbb{R}^*$ $f(0)$ non défini

	-3	0
$f(x)$	- 0 + +	

b) $D_f =]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$ $f(0) = 1$

	-1	0
$f(x)$	+ 1  +	

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ $f(0) = \sqrt[3]{e}$

	-3
$f(x)$	+ +

4.3

a) $2e^{2x}$

b) $\frac{e\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

c) $3x^2e^{x^3+1}$

d) $(4x^3+1)e^{x^4+x}$

4.4

a) $f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{e^x}$

c) $f'(x) = \frac{x^2-x-3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

b) $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}e^{\sqrt{x^2+x}}$

d) $f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}e^{\frac{1}{x+3}}$

4.5

a) $D_f = \mathbb{R}$ zéros : -
 $f'(x) = 5e^{5x}$

f) $D_f = \mathbb{R}$ zéros : 0 et $\ln(2)$
 $f'(x) = e^x(2e^x - 3)$

b) $D_f = \mathbb{R}$ zéros : -
 $f'(x) = 2xe^{x^2}$

g) $D_f = \mathbb{R}^*$ zéros : -5
 $f'(x) = \frac{(-x-4)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$

c) $D_f = \mathbb{R}^*$ zéros : -
 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

h) $D_f = \mathbb{R}$ zéros : $k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$
période = 2π

d) $D_f = \mathbb{R}$ zéros : $-\frac{1}{3}$
 $f'(x) = (3x+4)e^x$

$f'(x) = \cos(x)(1 + \sin(x))e^{\sin(x)}$

e) $D_f = \mathbb{R}^*$ zéros : 0
 $f'(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$

i) $D_f = \mathbb{R}$ zéros : -
 $f'(x) = (\cos(5x) - 5x \sin(5x))e^{x \cos(5x)}$

4.6

a) $F(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + c$

d) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x^2-6x+1} + c$

b) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + c$

e) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + c$ ou $F(x) = \frac{1}{2}(e^x + 1)^2 + c$

c) $F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c$

f) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + c$

4.7

a) $\frac{e^x+x}{3} + c$

b) $\frac{1}{4}e^{4x^5-2x^2+3} + c$

c) $e^{x^3+2x^2} + c$

4.8

a) $\frac{e-1}{e^2}$

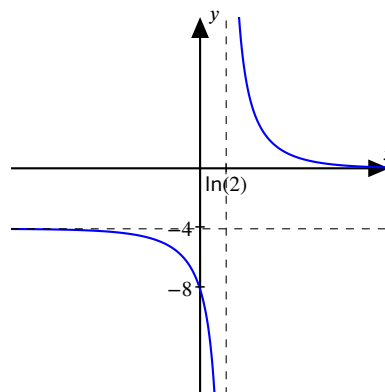
b) $\frac{e^3-1}{3e^4}$

c) $\frac{e^4-1}{2}$

d) $2(e^{-1} - e^{-\sqrt{2}})$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\} \quad f(0) = -8$$

	$\ln(2)$
$f(x)$	- +



4.9 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 AH à gauche : $y = -4$ AH à droite : $y = 0$

$\lim_{x \rightarrow \ln(2)} f(x) = \infty$ AV : $x = \ln(2)$

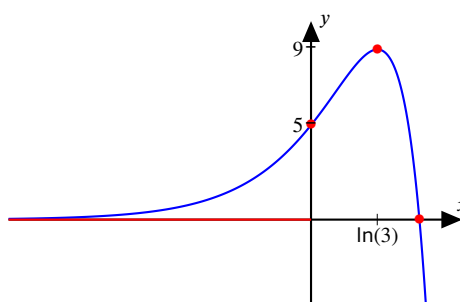
$f'(x) = \frac{-8e^x}{(e^x - 2)^2}$ toujours négatif donc f toujours strictement décroissante

$$D_f = \mathbb{R} \quad f(0) = 5 \quad \text{AH à gauche : } y = 0 \quad f'(x) = 2(3 - e^x) \cdot e^x \quad \text{MAX}(\ln(3); 9)$$

	$\ln(6)$
$f(x)$	+ 0 -

4.10

	$\ln(3)$
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	↗ ↘



- 4.11**
- | | | | |
|--------------|--------------|------|--------------|
| a) 0 | d) 0 | g) 0 | j) 0 |
| b) $+\infty$ | e) $+\infty$ | h) 0 | k) 0 |
| c) $+\infty$ | f) 0 | i) 1 | l) $-\infty$ |

- 4.12**
- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| a) e | e) e^2 | i) 1 | m) $+\infty$ |
| b) e | f) e^2 | j) 1 | n) 0 |
| c) 0 | g) $+\infty$ | k) $+\infty$ | o) $+\infty$ |
| d) $+\infty$ | h) 0 | l) 0 | p) 0 |

$$D_f = \mathbb{R} \quad f(0) = 8e^2$$

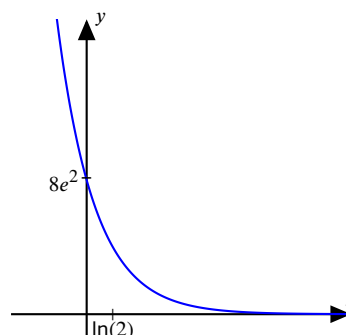
$f(x)$	+

4.13 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 pas d'AH à gauche AH à droite : $y = 0$

pas d'AV

$$f'(x) = \frac{-8}{e^{x-2}}$$

f est toujours strictement décroissante



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad f(0) = \frac{1}{e^4}$$

	2
$f(x)$	+ +

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

AH à gauche et à droite : $y = 1$

4.14

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \quad \text{trou à gauche en } (2; 0)$$

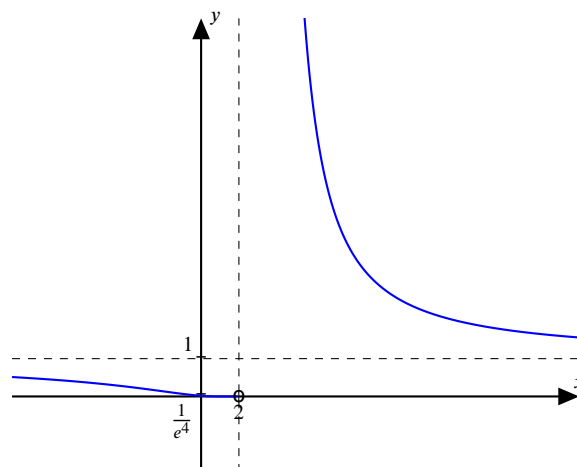
<

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \quad \text{AV à droite en } x = 2$$

>

$$f'(x) = \frac{-8e^{\frac{8}{x-2}}}{(x-2)^2}$$

f est toujours strictement décroissante

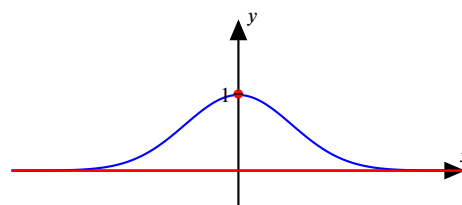


$$D_f = \mathbb{R} \quad f(0) = 1 \quad \text{AH : } y = 0 \quad f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \quad \text{MAX}(0; 1)$$

4.15

$f(x)$	+

	0
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	↗ ↘



4.16

- | | | | | | |
|----------|-------|------|--------------|--------------|------------------|
| a) 1 | c) -1 | e) 0 | g) $+\infty$ | i) $-\infty$ | k) $\frac{5}{3}$ |
| b) e^2 | d) 2 | f) 0 | h) $+\infty$ | j) 0 | l) $\frac{3}{5}$ |

4.17

- | | | | |
|------|--------------|--------------|--------------|
| a) 0 | b) $+\infty$ | c) $+\infty$ | d) $-\infty$ |
|------|--------------|--------------|--------------|

4.18

- | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|----------|----------|--------------|
| a) $+\infty$ | b) $-\infty$ | c) $+\infty$ | d) 0_+ | e) 0_- | f) $+\infty$ |
|--------------|--------------|--------------|----------|----------|--------------|

4.19

- | | | | | |
|--------------|--------------|----------|--------------|----------|
| a) 0_+ | d) 0_- | g) 0_+ | j) $+\infty$ | m) 0_+ |
| b) $+\infty$ | e) 0_+ | h) 0_- | k) $+\infty$ | |
| c) $-\infty$ | f) $+\infty$ | i) 0 | l) $+\infty$ | n) 0_+ |

4.20

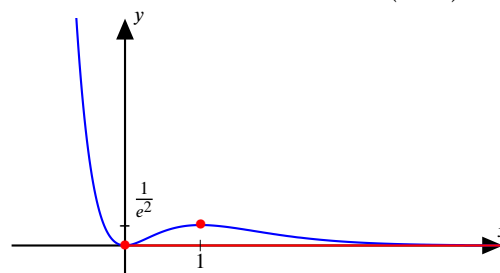
- | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|------|------|--------------|
| a) $+\infty$ | b) $-\infty$ | c) $-\infty$ | d) 0 | e) 0 | f) $+\infty$ |
|--------------|--------------|--------------|------|------|--------------|

4.21

$$D_f = \mathbb{R} \quad f(0) = 0 \quad \text{AH à droite : } y = 0 \quad f'(x) = \frac{2x(1-x)}{e^{2x}} \quad \text{MIN}(0; 0) \quad \text{MAX}\left(1; \frac{1}{e^2}\right)$$

	0
$f(x)$	+ 0 +

	0	1
$f'(x)$	- 0 + 0 -	
$f(x)$		

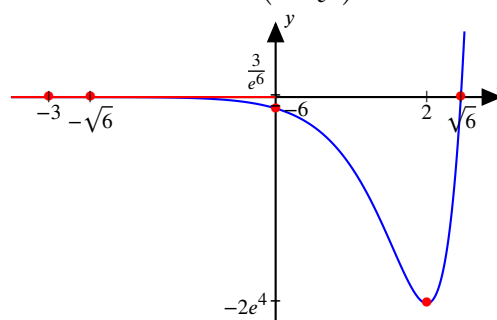


4.22

$$D_f = \mathbb{R} \quad f(0) = -6 \quad \text{AH à gauche : } y = 0 \quad f'(x) = 2(x+3)(x-2) \cdot e^{2x} \quad \text{MAX}\left(-3; \frac{3}{e^6}\right) \quad \text{MIN}(2; -2e^4)$$

	$-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$
$f(x)$	+ 0 - 0 +	

	-3	2
$f'(x)$	+ 0 - 0 +	
$f(x)$		

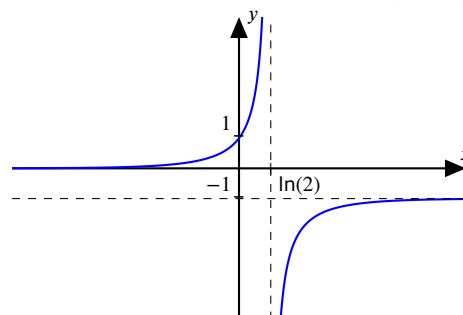


4.23

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\} \quad f(0) = 1 \quad \text{AV : } x = \ln(2) \quad \text{AH à gauche : } y = 0 \quad \text{AH à droite : } y = -1 \quad f'(x) = \frac{2e^x}{(2-e^x)^2}$$

	$\ln(2)$
$f(x)$	+ + - -

	$\ln(2)$
$f'(x)$	+ +
$f(x)$	↗ ↗

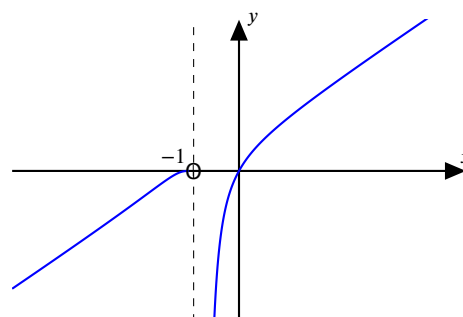


4.24

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f(0) = 0 \quad f'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} \quad \text{valeur limite à gauche trou : } (-1; 0) \quad \text{AV à droite : } x = -1$$

	-1	0
$f(x)$	- - 0 + +	

	-1
$f'(x)$	+ +
$f(x)$	↗ ↗



a) $N(0) = 1000$: Le jour de l'examen, les élèves se souviennent de 1000 faits.

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{2000}{\infty} = 0$: Les élèves finiront par tout oublier.

4.25

c) $N'(t) = -\frac{2000 \cdot e^t}{(1+e^t)^2}$ est toujours négative.

d) $\frac{2000}{1+e^t} = 250 \quad t = \ln(7) \simeq 1,9 \quad 2 \text{ jours}$

4.26 $T(0; -3) \quad f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x \quad f'(0) = -2 \quad \text{tg} : y = -2x - 3.$

$A(x; 0) \quad B(-x; 0) \quad C(-x; e^{-x^2}) \quad D(x; e^{-x^2}) \quad f(x) = 2xe^{-x^2} \quad f'(x) = (2-4x^2)e^{-x^2}$

4.27

$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \quad B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \quad C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{e}}{e}\right) \quad D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{e}}{e}\right).$

$T(1; (a+b+1)e)$ est sur $Ox \implies a+b+1=0$

4.28 tg horizontale donc pente nulle : $f'(x) = (x^2 + (a+2)x + a+b)e^x \quad f'(1) = (2a+b+3)e \implies 2a+b+3=0$
 $a = -2, b = 1.$

4.29 $f'(x) = (-x)e^{-x} \quad \text{MAX}_{f(0;1)} \quad g(0) = a \quad a = 1$

a) Non car $e^x > 0$ et on ajoute x qui est positif dans cet intervalle.

4.30

b) $e^2 + 1$

c) $\frac{3e^4 + 12e^2 + 25}{6}\pi$

4.31 $\pm \sqrt{\frac{2}{e^2 - 1}}$

7.5 Réponses - Fonctions logarithmiques

5.1

a) $D_f =]-2; +\infty[$

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

c) $D_f =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

e) $D_f = \left] \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 0 \right[\cup \left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right[$

f) $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$

g) $D_f =]-2; 1[\setminus \{0\}$

h) $D_f =]-1; +\infty[\setminus \{0\}$

i) $D_f =]-\infty; -2[\cup \mathbb{R}_+^*$

j) $D_f =]-2; 1[\setminus \left\{ \frac{1-2e^3}{e^3} \right\}$

5.2

a) -1

c) $\pm\sqrt{10}$

e) ± 1

g) -1

i) il n'y en a pas

b) $-1, -3 \text{ et } -5$

d) $\pm 2\sqrt{2} \text{ et } \pm\sqrt{10}$

f) $\frac{1}{e^2}$

h) 7

j) 0

a) $D_f =]-\infty; \frac{1}{2}[$

	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$			
$f(x)$	$+$	0	$-$	$ $	

5.3

b) $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

	0	1
$f(x)$		$-$
	$ $	$+$

c) $D_f =]-2; 1[$

	-2	$-\frac{1}{2}$	1		
$f(x)$	$ $	$-$	0	$+$	$ $

d) $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{e^2\}$

	0	$\frac{1}{e^3}$	e^2			
$\ln(x) + 3$	$ $	$-$	0	$+$	$+$	
$\ln(x) - 2$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$f(x)$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$+$

5.4

a) $-\infty$

b) impossible

c) impossible

d) $+\infty$

Elle est définie sur $]0; +\infty[$. Il y a une AV à droite en $x=0$. Pas d'AH.

5.5

a) $+\infty$

b) $+\infty$

c) $-\infty$

d) $-\infty$

Elle est définie partout sauf pour $x=5$. Il y a une AV des deux côtés en $x=5$. Pas d'AH.

5.6

Cette fonction est définie partout sauf sur $[-3; -2]$. Il y a des AV en $x=-3$ (à gauche) et en $x=-2$ (à droite). Il y a un AH des deux côtés en $y=\ln(2)$.

a) $\ln(2)$

b) $\ln(2)$

c) $+\infty$

d) $+\infty$

e) $-\infty$

f) $-\infty$

5.7

Cette fonction est définie partout sauf pour $x=-3$ et $x=-2$. Il y a des AV des deux côtés en $x=-3$ et en $x=-2$. Il y a un AH des deux côtés en $y=\ln(2)$.

5.8

a) $\frac{1}{x}$

b) $\frac{2}{x}$

c) $\frac{3x^2}{x^3+1}$

d) $\frac{3}{x(\ln(x)+2)^2}$

5.9

a) $D_f =]-\infty; \frac{5}{4}[$ zéro en $x=1$ $f'(x) = \frac{-4}{-4x+5} = \frac{4}{4x-5}$

b) $D_f =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ zéros en $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$

c) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ zéro en $x=e$ $f'(x) = \ln(x)$

d) $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$ zéros en $x=e^2$ $f'(x) = \frac{1}{x(\ln(x)-1)^2}$

5.10

a) $C(10) = 11(\ln(10)-2) \approx 3,33$ | $C(20) = \frac{11(\ln(20)-2)}{2} \approx 5,48$ | $C(30) = \frac{11(\ln(30)-2)}{3} \approx 5,14$ |
 $C(70) = \frac{11(\ln(70)-2)}{7} \approx 3,53$ |

b) $C'(t) = 110 \frac{3-\ln(t)}{t^2}$ Max pour $x=e^3 \approx 20,1$

La capacité pulmonaire est maximum à l'âge de 20 ans.

5.11 $x - ey = 0$

5.12

a) $+\infty$

b) 0

c) 0

d) 0

e) 0

f) 0

5.13

- a) -1 e) $+\infty$
 b) $\frac{-1}{e}$ f) $+\infty$
 c) 0 (la limite n'est définie qu'à droite) g) 0
 d) $\frac{1}{4}$ h) $-\infty$

5.14

- a) $+\infty$ b) 0_+ c) 0_- d) 0_+ e) 0_+ f) 0_+

5.15

- a) 1 c) 1 e) 6 g) $-\infty$
 b) $\frac{1}{2e^2}$ d) $-\infty$ f) 0 h) 0

5.16

- c) AV : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{3}{2}$ AH : $y = \ln(2)$ d) $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ MAX (0,5; $\ln(1,5)$) MAX (3; 1)

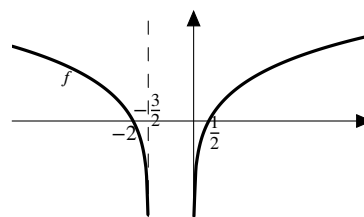
x	-0,5			0,5			1,5			3		
g(x)	↘		↗	MAX	↘		↗	MAX	↘			

- $D_f =]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]0; +\infty[$ $f(0)$ non défini $f'(x) = \frac{4x+3}{2x^2+3x}$
 AV à gauche : $x = -\frac{3}{2}$ AV à droite : $x = 0$ pas d'AH

5.17

	-2	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$				
$f(x)$	+	0	-			-	0	+

	$-\frac{3}{2}$	0		
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	↘			↗

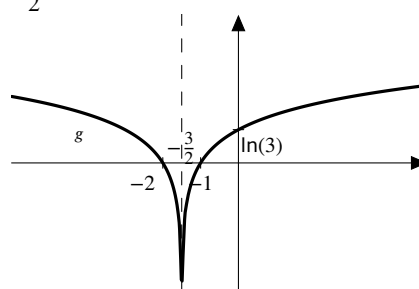


5.18

- $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ $g(0) = \ln(3)$ $g'(x) = \frac{2}{2x+3}$ AV : $x = -\frac{3}{2}$ pas d'AH

	-2	$-\frac{3}{2}$	-1
$g(x)$	+	0	-

	$-\frac{3}{2}$		
$g'(x)$	-	$\parallel$	+
$g(x)$	$\searrow$	$\parallel$	$\nearrow$



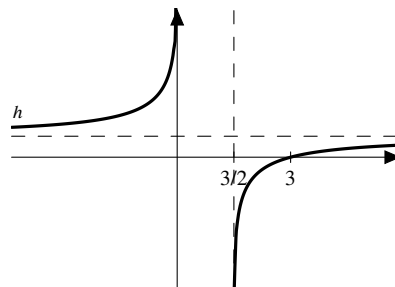
$$D_h =]-\infty; 0[\cup \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[\quad h(0) \text{ non défini} \quad h'(x) = \frac{3}{x(2x-3)}$$

AV à gauche : $x=0$ AV à droite : $x=\frac{3}{2}$ AH : $y=\ln(2)$

5.19

	0	$\frac{3}{2}$	3				
$h(x)$	+				-	0	+

		0		$\frac{3}{2}$		
$h'(x)$		+		//////		+
$h(x)$		↗		//////		↗



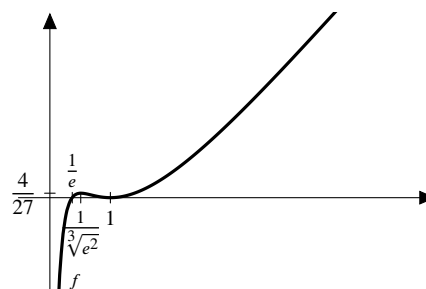
$$D_f = \mathbb{R}_+^* \quad f(0) \text{ non défini} \quad f'(x) = \frac{\ln(x)(3\ln(x)+2)}{x} \quad \text{Max} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}; \frac{4}{27} \right) \quad \text{Min} (1; 0) \quad \text{AV à droite : } x=0$$

pas d'AH

5.20

	0	$\frac{1}{e}$	1
$f(x)$	////// - 0 + 0 +		

		0	$\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$	1	
$f(x)$	/////	+	0	-	0
$f'(x)$	/////	↗	MAX	↘	MIN



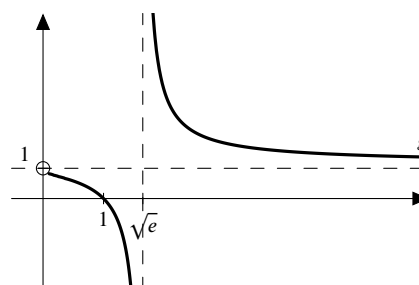
$$D_g = \mathbb{R}_+^* \setminus \{\sqrt{e}\} \quad g(0) \text{ non défini} \quad g'(x) = -\frac{2}{x(2\ln(x)-1)^2} \quad \text{trou : } (0; 1) \quad \text{AV : } x = \sqrt{e}$$

AH : $y=1$

5.21

	0	1	$\sqrt{e}$
$g(x)$	////// + 0 - +		

		0		$\sqrt{e}$		
$g(x)$		//////		-		-
$g'(x)$		//////		↘		↘



5.22 a) $f(x) = \ln(|x|) + 5$

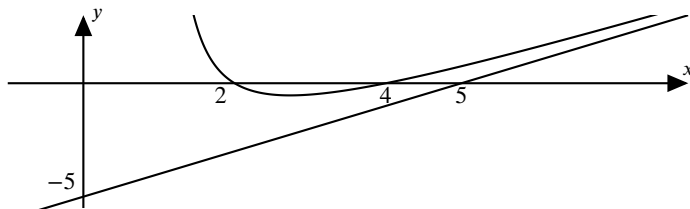
b) $f(x) = \ln(|x|) - \frac{3}{2}$

5.23 $k=e$.

a) zéros : 2 et 4 MIN : $(1 + \sqrt{3}; 2\sqrt{3} - 4)$

b) $y = x - 5$

c)



5.24

d) $\left| \int_2^4 \left(x - 5 + \frac{3}{x-1} \right) dx \right| = 4 - \ln(27)$

e) $\left| \int_2^{1+e} \frac{3}{x-1} dx \right| = 3$

f) $\left| \int_2^5 (x-5) dx \right| - (4 - \ln(27)) = \frac{9}{2} - 4 + \ln(27) = \frac{1}{2} + \ln(27)$

g) $\left| \int_2^3 \left(-\frac{1}{2}x + 1 - \left(x - 5 + \frac{3}{x-1} \right) \right) dx \right| + \left| \int_3^4 \left(\left(x - 5 + \frac{3}{x-1} \right) - \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right) \right) dx \right| = \frac{9}{4} - \ln(8) + \ln\left(\frac{27}{8}\right) - \frac{3}{4}$
 $= \frac{3}{2} + 3\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

a) $D_f = \left] -\frac{3}{2}; +\infty \right[$ $f'(x) = \frac{2}{(2x+3)\ln(2)}$

e) $\frac{30}{\ln(2)}$

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $f'(x) = \frac{2}{(x-1)\ln(3)}$

f) $\frac{\ln(2)}{2}$

5.25

c) $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = 2\ln(3)e^{(2x-4)\ln(3)}$

g) 0

d) $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{x\ln(2)}{\sqrt{x^2+1}} e^{\ln(2)\sqrt{x^2+1}}$

h) $\frac{1}{\ln(5)}$

Références

- [1] S. Amaudruz : Puissances, racines, exponentielles et logarithmes. CADEV - n° 30'014, 2013.
- [2] H. Bovet : Analyse. CH-1608 Oron-le-Châtel, 1999.
- [3] H. Bovet : Algèbre. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2001.
- [4] H. Bovet : Probabilités. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2005.
- [5] H. Bovet et M. Cherix : Géométrie. CH-1608 Oron-le-Châtel, 1998.
- [6] M. Cherix : Géométrie analytique : le cercle dans le plan. 3m niveau standard. CADEV n°30112, juillet 2016.
- [7] CRM : Fondamentum de mathématique - Géométrie vectorielle et analytique plane. Num. 23 de Monographies de la CRM. CRM, 2400 Le Locle, g d'encre édn, 2013.
- [8] CRM : Fondamentum de mathématique - Analyse. Num. 25 de Monographies de la CRM. CRM, 2400 Le Locle, g d'encre édn, 2014.
- [9] CRM : Géométrie vectorielle et analytique. Num. 29 de Monographies de la CRM. CRM, 2400 Le Locle, g d'encre édn, 2016.
- [10] J.-P. Javet : Analyse combinatoire. <http://www.gymomath.ch/javmath/index.html>, 2012.
- [11] J.-P. Javet : La droite et le cercle dans le plan métrique. <http://www.javmath.ch>, 2016.
- [12] J.-P. Javet : Puissances, racines, exponentielles et logarithmes. <http://www.gymomath.ch>, 2016.
- [13] J.-P. Javet : Analyse I 3MStand. <http://www.javmath.ch>, 2017-2018.
- [14] J.-P. Javet : Analyse II 3MStand. <http://www.javmath.ch>, 2017-2018.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch

sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 22 janvier 2024