

3M standard

Mathématiques

semestre 2

Sarah Delmonico

Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2023-2024

Table des matières

1	Combinatoire	2
1.1	Principes fondamentaux	2
1.1.1	Principe de multiplication	2
1.1.2	Principes d'addition et de soustraction	3
1.2	Les permutations	4
1.2.1	La fonction factorielle	4
1.2.2	Les permutations simples	5
1.2.3	Les permutations avec répétitions	5
1.3	Les arrangements	7
1.3.1	Les arrangements simples	7
1.3.2	Les arrangements avec répétitions	8
1.4	Les combinaisons	9
1.5	Synthèse	10
2	Probabilités	12
2.1	Premières notions	12
2.2	Opérations sur les événements et diagrammes de Venn	14
2.3	Probabilité conditionnelle	17
2.4	Événements indépendants	18
2.5	Diagrammes en arbre	19
2.6	Épreuves successives indépendantes	22
3	Géométrie analytique	24
3.1	Rappels	24
3.2	Bissectrice d'un angle	27
3.3	Équation du cercle	31
3.4	Positions relatives	34
3.4.1	Position relative d'un point et d'un cercle	34
3.4.2	Position relative d'une droite et d'un cercle	34
3.4.3	Position relative de deux cercles	36
3.5	Tangentes à un cercle de direction donnée	38
3.6	Tangentes à un cercle passant par un point P	39
3.6.1	Tangentes à un cercle passant par P : Détermination de la situation	39
3.6.2	Tangentes à un cercle passant par P : 1 ^{er} cas, P est sur le cercle.	40
3.6.3	Tangentes à un cercle passant par P : 2 ^{ème} cas, P est extérieur au cercle.	41
4	Exercices	44
4.1	Combinatoire	44
4.2	Probabilités	52
4.3	Géométrie analytique	60
5	Solutions	68
5.1	Réponses - Combinatoire	68
5.2	Réponses - Probabilités	71
5.3	Réponses - Géométrie analytique	74

1 Combinatoire

1.1 Principes fondamentaux

L'analyse combinatoire est la branche des mathématiques qui étudie le dénombrement.

Cela nous permettra de répondre, par exemple, aux questions suivantes :

- Combien d'équipes de 4 personnes peut-on former à partir des membres de la classe ?
- Combien d'anagrammes peut-on former à partir du mot ANAGRAMME ?
- Combien y a-t-il de grilles possibles à l'EuroMillion ?

Cela nous permettra, ensuite, de calculer la probabilité de gagner...

1.1.1 Principe de multiplication

Exemple : Il y a 3 chemins pour aller de A à B et 2 pour aller de B à C. Combien de chemins différents y a-t-il pour aller de A à B puis à C ?

Supposons qu'un événement E se décompose en k étapes intermédiaires successives. Si la première étape a n_1 réalisations différentes, la deuxième n_2 , etc ..., alors l'événement E admet $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ réalisations différentes.

Exemple : Combien de nombres pairs à trois chiffres existe-t-il ?

1.1.2 Principes d'addition et de soustraction

Exemple : Combien de codes de 5 lettres peut-on écrire s'ils sont composés, soit uniquement de voyelles, soit uniquement de consonnes ?

Supposons qu'un événement E se décompose en 2 événements disjoints E_1 et E_2 , alors le nombre de réalisations de E est égal à la somme du nombre de réalisations de E_1 avec le nombre de réalisations de E_2 .

Exemple : De combien de manières différentes peut-on obtenir une somme comprise entre 6 et 8 en lançant deux dés distincts ?

Ce principe peut s'utiliser sous forme de soustraction, par exemple lorsqu'il y a la formulation « **au moins un** ».

Supposons qu'un événement E_1 soit un événement inclus dans l'événement E , alors le nombre de réalisations de E_1 est égal au nombre de réalisations de E moins celles du complémentaire $\overline{E_1}$ de E_1 .

Exemples : Combien de codes de cadenas à 5 chiffres contiennent au moins un 0 ?

Exemple : Calculer de 2 manières différentes le nombre de paires d'initiales comprenant au moins un X.

ex. 1.1 à 1.5

1.2 Les permutations

1.2.1 La fonction factorielle

Exemples :

- a) Combien de codes de 3 lettres peut-on former avec les lettres A , B et C en n'utilisant qu'une seule fois chaque lettre ?

- b) Combien de codes de cadenas à 10 chiffres peut-on former en n'utilisant qu'une seule fois chaque chiffre ?

On se rend compte que le calcul du deuxième exemple est fastidieux à faire, même à la calculatrice. On a donc inventé une fonction qui donne directement le résultat à partir du premier nombre :

La **fonction factorielle**, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, est définie par :

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \text{ si } n \neq 0$$

Par convention, on définit $0! = 1$.

Comment utiliser cette fonction sur ma calculatrice :

Exemple :

a) $5! =$

c) $70! =$

b) $20! =$

d) $\frac{70!}{67!} =$

Exemple : Combien de plans de classe peut-on faire pour placer les 24 élèves de la classe s'il y a exactement 24 places à disposition ?

1.2.2 Les permutations simples

Une **permutation** à n éléments est une disposition **ordonnée** de n objets .

Une permutation est **permutation simple** si les n objets sont **distincts**.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n le nombre des permutations simples à n éléments.

Les exemples de la page précédente sont des permutations. On peut constater que :

$$P_n = n!$$

Preuve : Représentons chaque emplacement et indiquons le nombre de possibilités en dessous :

---	---	...	---	---	---
n	$n-1$	...	3	2	1

Il y a n possibilités pour la première position. Il ne reste ensuite plus que $n-1$ objets pour la suivante et ainsi de suite.

On conclut grâce au principe de multiplication.

#

Exemple : Combien y a-t-il d'anagrammes du mot GYMNASSE ?

1.2.3 Les permutations avec répétitions

Exemple : Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ELEVE ?

On parle de **permutation avec répétitions** lorsqu'il y a des objets indiscernables parmi la collection.

Prenons une collection de n objets composés de p_1 objets identiques d'une première sorte, p_2 d'une deuxième sorte, etc... avec $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$.

On note $\overline{P}_n(p_1; p_2; \dots; p_k)$ le nombre des permutations avec répétitions de cette collection .

En observant l'exemple précédent, on peut constater que :

$$\overline{P}_n(p_1; p_2; \dots; p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdot p_2! \cdot \dots \cdot p_k!}$$

Preuve : Si les n éléments étaient distincts, on dénombrerait $n!$ manières de les placer.

Pour chacune des permutations que nous cherchons, permuter les p_1 éléments de la première catégorie ne change rien si l'on ne les distingue pas, mais donne $p_1!$ possibilités si on le fait.

Donc diviser par $p_1!$ permet d'éliminer les « doublons » causés par la première catégorie.

En effectuant ceci pour l'ensemble des catégories, on obtient la formule ci-dessus . #

Exemples :

a) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot EXCELLENCE ?

b) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ANAGRAMMES ?

ex. 1.6 à 1.15

1.3 Les arrangements

1.3.1 Les arrangements simples

Exemple : Combien de codes de 5 lettres différentes peut-on former ?

On appelle **arrangement** une disposition **ordonnée** de p éléments choisis parmi une collection de n objets distincts.

On parle **arrangement simple** si les p éléments choisis **doivent être différents les uns des autres**.

Soit p et $n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p \leq n$.

On note A_p^n le nombre d'arrangements simples de p éléments choisis parmi une collection de n objets distincts.

On peut constater que :

$$A_p^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Preuve : Représentons chacun des p emplacements et indiquons le nombre de possibilités en dessous :

1^{er}	2^e	3^e	...	p^e
---	---	---	...	---
n	$n-1$	$n-2$	...	$n-p+1$

Il y a n possibilités pour la première position. Il ne reste ensuite plus que $n-1$ objets pour la suivante et ainsi de suite. Comme il y a p emplacements, le dernier a $n-p+1$ possibilités.

On obtient donc $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1)$ arrangements simples.

On constate que cela donne $n!$ auquel on a "enlevé" les $n-p$ derniers facteurs, c'est-à-dire $\frac{n!}{(n-p)!}$ après simplification. #

Comment utiliser cette fonction sur ma calculatrice :

Remarque : Une permutation simple à n éléments est un arrangement simple de n éléments choisis parmi n objets, donc $P_n = A_n^n$. Cela justifie le choix de $0! = 1$, car ainsi $A_n^n = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$

Exemples :

- Combien y a-t-il de podiums possibles lors de la finale d'une course comprenant 8 participants ?
- Combien de plans de classe peut-on faire s'il y a 24 élèves et 26 places ?

1.3.2 Les arrangements avec répétitions

Exemple : Combien de codes de 5 lettres peut-on former ?

On appelle **arrangement avec répétitions** un arrangement dont les éléments choisis **n'ont pas besoin d'être différents les uns des autres**.

Soit p et $n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p \leq n$.

On note $\overline{A}_p^n$ le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments choisis parmi n objets distincts.

On peut constater que :

$$\overline{A}_p^n = n^p$$

Preuve : Représentons chacun des p emplacements et indiquons le nombre de possibilités en dessous :

1^{er}	2^e	3^e	...	p^e
---	---	---	...	---
n	n	n	...	n

Il y a n possibilités pour chaque position.

On obtient donc $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^p$ arrangements avec répétitions.

#

Exemples : On effectue un tirage au sort parmi les 24 élèves de la classe chaque vendredi durant les 10 premières semaines de cours. On écrit ensuite la liste des numéros de semaines avec le nom de l'élève à côté.

a) Combien y a-t-il de listes possibles si le nom est remis en jeu après chaque tirage ?

b) Combien y a-t-il de listes possibles si le nom n'est pas remis en jeu après chaque tirage ?

ex. 1.15 à 1.26

1.4 Les combinaisons

Exemple : On choisit 3 personnes dans une classe de 24 personnes. Combien de groupes différents puis-je obtenir ?

On appelle **combinaison simple** un choix **non ordonné** de p éléments différents parmi une collection de n objets distincts.

Soit p et $n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p \leq n$.

On note C_p^n le nombre de combinaisons simples de p éléments parmi n objets distincts.

On peut constater que :

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Preuve : Pour chacune des combinaisons que nous cherchons, il y a $p!$ arrangements correspondants obtenus en permutant l'ordre.

On divise donc les $A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements par $p!$. #

Comment utiliser cette fonction sur ma calculatrice :

Exemple : Pour remplir une grille d'*Euromillion*, il faut choisir 5 numéros et 2 étoiles.

a) Les 5 numéros sont choisis entre 1 et 50. Combien cela fait-il de possibilités ?

b) Les 2 étoiles sont choisies parmi 12. Combien cela fait-il de possibilités ?

c) Combien y a-t-il de grilles différentes ?

ex. 1.27 à 1.38

1.5 Synthèse

La difficulté est de reconnaître quelle formule utiliser. La question de base est toujours : « L'ordre est-il important ou non ? »

Les situations ne sont souvent pas aussi simples que les exemples précédents. Il faudra utiliser judicieusement les principes de multiplication et d'addition avec les différentes formules. Seule la pratique de multiples situations vous fera gagner en aisance.

Exemple : Une enseignante de mathématiques prépare un test de combinatoire qui aura 9 exercices.

- a) Elle choisit parmi sa banque de données qui contient 50 exercices. Combien y a-t-il de tests différents possibles si l'on ne tient pas compte de l'ordre des exercices ?

- b) Elle choisit parmi sa banque de données qui contient 16 exercices de permutations, 20 exercices d'arrangements et 14 exercices de combinaisons. Combien y a-t-il de tests différents possibles si l'on ne tient pas compte de l'ordre des exercices et qu'elle choisit 3 exercices de chaque sorte ?

- c) Les 9 exercices ont été choisis. Combien y a-t-il d'ordres possibles ?

- d) Les 9 exercices ont été choisis. Combien y a-t-il d'ordres possibles si les 3 exercices de permutations doivent être l'un après l'autre ?

- e) Les 9 exercices ont été choisis. Combien y a-t-il d'ordres possibles si les 3 exercices de permutations ne doivent pas être tous l'un après l'autre ?

- f) Les 9 exercices ont été choisis. Combien y a-t-il d'ordres possibles si le premier et le dernier exercice doivent être choisis parmi les 3 exercices de permutations ?

Exemple :

Une classe, qui compte 14 filles et 4 garçons, part en voyage d'études.

- a) De combien de manières différentes peut-on choisir les 8 filles qui dormiront dans le premier dortoir et les 6 filles qui dormiront dans le deuxième ?

- b) Je veux choisir un groupe de 5 personnes pour m'aider à l'organisation du voyage d'études. Combien de possibilités y a-t-il pour qu'il compte exactement un garçon ?

- c) Je veux choisir un groupe de 5 personnes pour m'aider à l'organisation du voyage d'études. Combien de possibilités y a-t-il pour qu'il compte au moins un garçon ?

- d) Je veux choisir un groupe de 5 personnes pour m'aider à l'organisation du voyage d'études. Combien de possibilités y a-t-il pour qu'il compte au moins deux garçons ?

- e) Sur place, pour faire la commande des boissons du petit-déjeuner, chacun des élèves devra choisir entre prendre un thé, un café ou un jus d'orange. De combien de manières différentes la classe pourrait-elle faire sa commande ?

ex. 1.39 à 1.55

2 Probabilités

2.1 Premières notions

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont on ne peut pas prédire avec certitude le résultat, mais dont on peut déterminer à l'avance toutes les issues possibles.

L'ensemble U des résultats possibles est appelé **l'univers** de l'expérience aléatoire.

Ses éléments sont les **événements élémentaires**.

Exemple : Jeter un dé est une expérience aléatoire avec $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

On appelle **événement** tout sous-ensemble de U .

$\emptyset$ est **l'événement impossible**.

U est **l'événement certain**.

Exemples : Compléter en écrivant le sous-ensemble ou en exprimant l'événement en français.

- a) $A =$ « Obtenir un numéro supérieur à 4. »
- b) $B =$ « Obtenir un numéro inférieur à 9. »
- c) $C = \{2; 4; 6\}$
- d) $D = \emptyset$

Deux événements qui ont la même chance de se réaliser sont **équiprobables**.

Si les événements élémentaires d'une expérience aléatoire sont équiprobables, on peut calculer la probabilité $P(A)$ d'un événement A par la formule de Laplace :

$$P(A) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } U}$$

On utilisera la notation $\#A$ pour parler du nombre d'éléments de l'ensemble A .

Exemple :

- a) Dans quel cas peut-on appliquer la formule de Laplace au lancer d'un dé ?
- b) Calculer les probabilités des événements A , B , C et D de l'exemple ci-dessus.

Exemple : On lance trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

- a) Quel est l'univers ?
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois « pile » ?
- c) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 1 fois « pile » ?
- d) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 fois « pile » ?

Dans certains cas, nous pourrions utiliser ce que nous avons vu en combinatoire.

Exemple : Un comité de 5 personnes est choisi au hasard parmi les 9 femmes et les 6 hommes d'un groupe. Quelle est la probabilité que le comité soit composé de 2 femmes et 3 hommes ?

Exemple : On tire au sort 4 cartes dans un jeu de 36 cartes.

- a) Combien y a-t-il de cas possibles ?

- b) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 « piques » ?

- c) Quelle est la probabilité d'obtenir l'as de « pique » ?

- d) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 « pique » ?

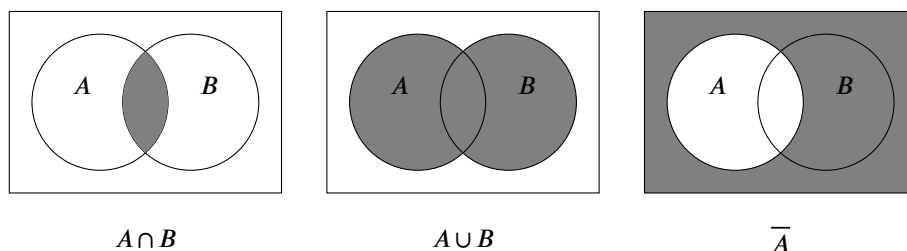
- e) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 « piques » ?

ex. 2.1 à 2.11

2.2 Opérations sur les événements et diagrammes de Venn

Comme les événements sont des ensembles, on va retrouver les notations vues en 1^{ère} année.

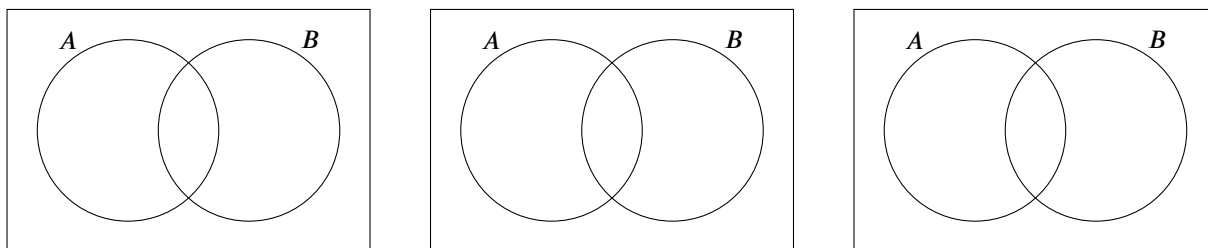
Soit U l'univers d'une expérience aléatoire et $A, B \subset U$ deux événements.



- L'événement $\overline{A} = U \setminus A$ est l'**événement complémentaire de A** , c'est-à-dire la négation de A .
- L'événement $A \cap B$ est l'**événement A et B** .
- L'événement $A \cup B$ est l'**événement A ou B** .

Exemple : On choisit un nombre entre 1 et 10 au hasard.

On définit les événements A = « obtenir un nombre pair » et B = « obtenir un nombre inférieur à 4 ».



Représenter cette situation en notant :

- tous les éléments dans le premier diagramme de Venn ci-dessus ;
- le nombre d'éléments de chaque plage dans le deuxième ;
- les probabilités de chaque plage dans le troisième.

$$P(A) =$$

$$P(B) =$$

$$P(\overline{A}) =$$

$$P(\overline{B}) =$$

$$P(A \cup B) =$$

$$P(A \cap B) =$$

$$P(\overline{A \cup B}) =$$

$$P(\overline{A \cap B}) =$$

$$P(U) =$$

$$P(\emptyset) =$$

Propriétés :

Soit U l'univers d'une expérience aléatoire et $A, B \subset U$ des événements.

- $P(U) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$

On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

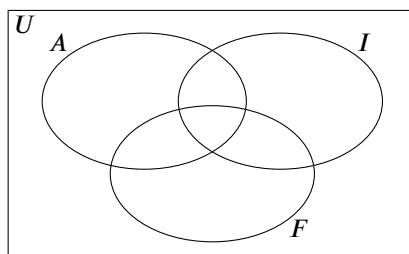
Preuve :

On utilise la formule de Laplace : $P(A) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{\#A}{\#U}$

- $P(U) = \frac{\#U}{\#U} = 1$
- $P(\emptyset) = \frac{0}{\#U} = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$, car $0 \leq \#A \leq \#U$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, car lorsqu'on additionne $\#A$ avec $\#B$, on compte deux fois les éléments de $A \cap B$.
- $P(\overline{A}) = \frac{\#U - \#A}{\#U} = \frac{\#U}{\#U} - \frac{\#A}{\#U} = 1 - P(A)$
- Si $A \subset B$, on a que $\#A \leq \#B$.

#

Exemple : Dans le camping, 60% des vacanciers comprennent au moins le français, 40% au moins l'italien, 18% au moins l'anglais, 32% au moins le français et l'italien, 12% au moins le français et l'anglais, 8% au moins l'italien et l'anglais et 4% comprennent les trois langues.



Compléter le diagramme de Venn de la situation et la probabilité qu'un vacancier comprenne...

- | | |
|-------------------------|----------------------------------|
| a) l'anglais | c) exactement 2 de ces 3 langues |
| b) l'anglais uniquement | d) au moins 2 des 3 langues |

ex. 2.12 à 2.14

Remarques :

Dans l'exemple précédent, l'expérience aléatoire n'est plus aussi visible qu'auparavant. Elle revient en fait à choisir aléatoirement quelqu'un dans le camping.

Les probabilités mentionnées sont obtenues en faisant une statistique. Elles correspondent aux fréquences. Cela généralise notre définition, tout en gardant les mêmes propriétés.

On peut maintenant connaître des probabilités sans connaître le nombre d'éléments de l'univers et sans forcément pouvoir énumérer les cas favorables.

Exemple : Un étudiant se présente à deux examens. Il estime qu'il a 40% de chances de réussir le premier, 80% de chances d'en réussir au moins un et seulement 10% de chances de réussir les deux.

On appelle les événements de la manière suivante :

A : « L'étudiant réussit le premier examen. » B : « L'étudiant réussit le deuxième examen. »

a) Coder de manière ensembliste les trois probabilités de la consigne.

b) Coder de manière ensembliste et calculer la probabilité de C : « L'étudiant réussit le premier examen uniquement. »

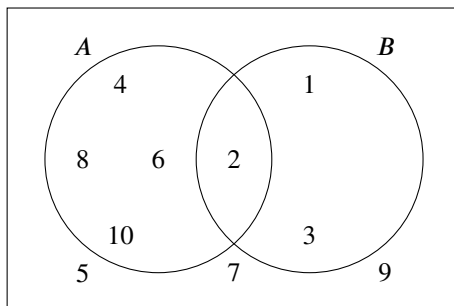
c) Coder de manière ensembliste et calculer la probabilité de D : « L'étudiant ne réussit aucun examen. »

ex. 2.15 à 2.18

2.3 Probabilité conditionnelle

La probabilité d'un événement peut changer si l'on dispose d'informations supplémentaires sur la réalisation de cet événement.

Reprenons l'exemple dans lequel on choisissait un nombre entre 1 et 10 au hasard, avec A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un nombre inférieur à 4 ».



La probabilité d'obtenir un nombre pair est $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Par contre, la probabilité d'obtenir un nombre pair sachant qu'on a obtenu un nombre inférieur à 4 est $P(A|B) = \frac{1}{3}$.

On a changé d'univers pour le restreindre à B .

Soit A et B deux événements d'univers U . Si $P(B) \neq 0$, la **probabilité conditionnelle de A sachant B** est :

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple : Calculer $P(B|A)$ pour l'exemple ci-dessus.

Exemple : On tire deux dés à 6 faces, un rouge et un blanc. Quelle est la probabilité des événements suivants ?

- A : « la somme vaut 8 ».
- B : « le dé rouge donne 5. »
- C : « la somme vaut 8, si le dé rouge donne 5. »
- D : « le dé rouge donne 5, si la somme vaut 8. »

ex. 2.19 à 2.23

2.4 Événements indépendants

Dans certaines circonstances, le fait de savoir qu'un événement B s'est produit ne change pas la probabilité de l'événement A , en d'autres termes $P(A) = P(A|B)$. On peut dire que A est indépendant de B .

Or, si A est indépendant de B , B est aussi indépendant de A et $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Preuve :

$$P(A) = P(A|B) \iff P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\implies P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B) \quad \#$$

Si une des trois conditions ci-dessous est vérifiée, les deux événements A et B sont **indépendants l'un de l'autre** et les deux autres conditions sont vraies aussi.

$$P(A) = P(A|B)$$

$$P(B) = P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemple : On tire au hasard une carte d'un jeu de 36 cartes. Considérons les événements :

A : « La carte est un as. »

R : « La carte est un roi. »

C : « La carte est un coeur. »

F : « La carte est une figure (valet, dame ou roi). »

Montrer que A et C sont indépendants, mais que R et F sont dépendants.

ex. 2.24 à 2.26

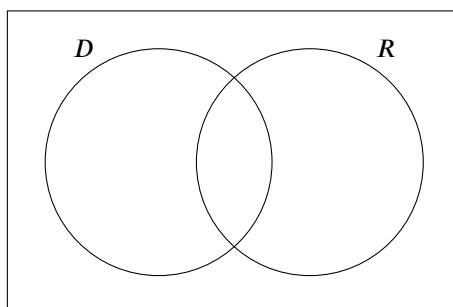
2.5 Diagrammes en arbre

Exemple :

- 60% des élèves ont fait leurs devoirs.
- $\frac{2}{3}$ des élèves qui ont fait leurs devoirs ont réussi le test surprise.
- $\frac{3}{4}$ des élèves qui n'ont pas fait leurs devoirs n'ont pas réussi le test surprise.

a) Si l'on considère les événements D : « L'élève a fait ses devoirs. » et R : « L'élève a réussi le test surprise. », coder les informations de la consigne de manière ensembliste.

b) Représenter cette situation par un diagramme de Venn.



c) Calculer les probabilités :

$$P(D) =$$

$$P(R) =$$

$$P(\overline{D}) =$$

$$P(\overline{R}) =$$

$$P(D \cup R) =$$

$$P(D \cap R) =$$

$$P(D|R) =$$

$$P(R|D) =$$

Représentation de cette situation par un diagramme en arbre :

Lorsque les informations de la consigne sont des probabilités conditionnelles ou que l'expérience se passe en plusieurs étapes successives, on utilise souvent un diagramme en arbre plutôt qu'un diagramme de Venn.

On représente toutes les issues possibles par des chemins définis comme une succession de « branches ». Au bout de chaque « branches », on note la probabilité de la « feuille », c'est-à-dire du chemin complet.

Au-dessus des premières « branches », on note la probabilité de ces « branches ». Au-dessus des suivantes, ce sont des probabilités conditionnelles.

Par le théorème de multiplication, la probabilité d'une « feuille » est le produit des probabilités notées le long des "branches" qui aboutissent à cette « feuille ».

Les « feuille » sont incompatibles entre-elles donc la probabilité d'une réunion de « feuille » est égale à la somme de leurs probabilités.

Exemple : On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules bleues et 3 boules jaunes. On tire 2 boules successivement.

a) Représenter cette situation par un diagramme en arbre.

b) Calculer la probabilité de l'événement A : « Tirer au moins une boule jaune. »

c) Calculer la probabilité de l'événement B : « Tirer une boule bleue puis une boule jaune. »

d) Calculer la probabilité de l'événement C : « Tirer une boule bleue si la première est une boule jaune. »

e) Calculer la probabilité de l'événement D : « La première était une boule jaune si la deuxième est bleue. »

ex. 2.27 à 2.31

Exemple :

Supposons qu'il existe un test rapide permettant de diagnostiquer un certain virus et qu'on observe que :

$$P(T|V) = 95\% = P(\bar{T}|\bar{V})$$

où T : « La personne réagit positivement au test. » et V : « La personne a le virus. »

On observe, de plus, que 0,5% des personnes testées avaient vraiment le virus.

a) Traduire "en français" ce que signifient $P(T|V)$ et $P(\bar{T}|\bar{V})$.

b) Représenter cette situation par un diagramme en arbre.

c) Calculer $P(V|T)$ et $P(\bar{V}|T)$.

d) Que penser de la valeur de ce test ?

2.6 Épreuves successives indépendantes

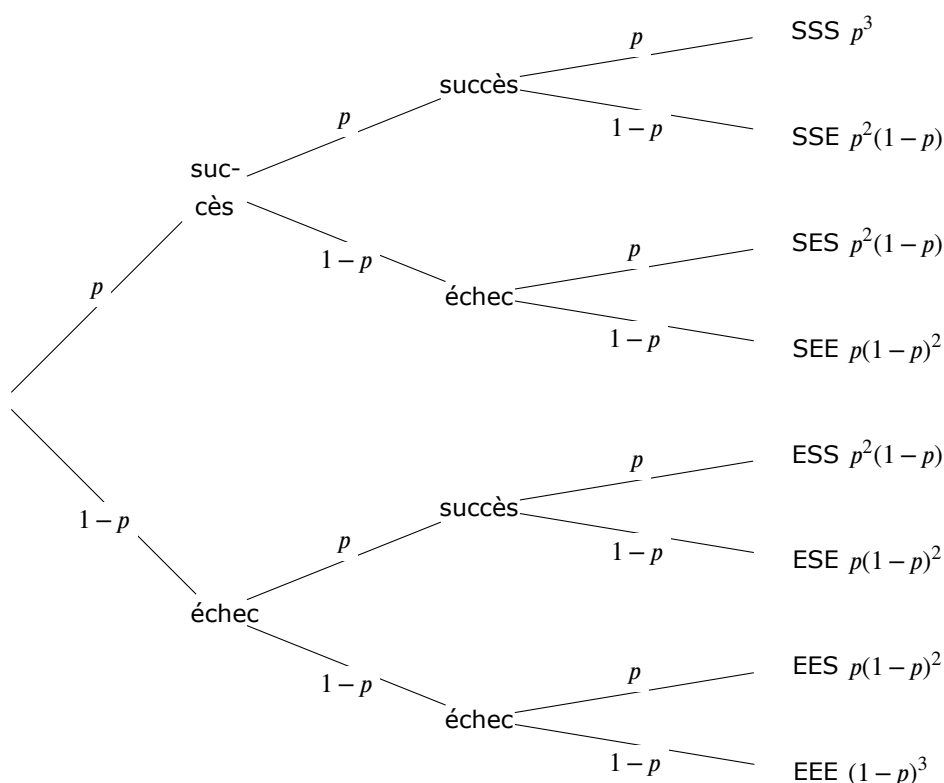
Considérons une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles, que nous appellerons « succès » et « échec ».

Si la probabilité d'obtenir un « succès » est de p , alors celle d'obtenir un « échec » est de $1 - p$, car ces deux événements sont complémentaires.

Exemple : Si je lance un dé et que pour gagner je dois obtenir un 4, j'ai une probabilité de $\frac{1}{6}$ de gagner et de $\frac{5}{6}$ de perdre.

Si la probabilité p ne change pas en répétant l'épreuve plusieurs fois, on parle **d'épreuves successives indépendantes**.

En effectuant n répétitions d'une telle expérience, on obtient un arbre du type : (ici $n = 3$)



En observant cet arbre, on constate que les « feuilles » sont en quelque sorte des mots de n lettres, composés de k succès et $n - k$ échecs. La probabilité d'une telle « feuille » est de $p^k(1 - p)^{n-k}$.

Si je cherche la probabilité d'obtenir k succès, peu m'importe l'ordre dans lequel les succès et les échecs se sont passés. Il y a C_k^n « feuilles » que je devrais additionner. En effet, on cela revient à choisir les k places du S dans notre mot à n lettres. On trouve donc :

$$P(\text{« } k \text{ succès »}) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}$$

On appelle aussi cela un **processus binomial** ou **processus de Bernoulli**.

Exemple : On lance 10 fois de suite un dé équilibré.

- a) Quelle est la probabilité d'obtenir à deux reprises le nombre 6 ?
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir quatre fois des nombres pairs ?
- c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le nombre 6 ?
- d) Combien de fois faut-il lancer un dé pour être sûr à 99% d'avoir obtenu au moins un 6 ?

On demande souvent de déterminer le nombre de répétitions n qui permet d'atteindre une certaine probabilité r d'avoir réussi au moins une fois. On utilise le complémentaire de l'événement demandé :

$$P(\text{« avoir réussi au moins une fois en } n \text{ répétitions »}) = 1 - P(\text{« avoir échoué } n \text{ fois »}) = 1 - (1 - p)^n$$

On doit donc résoudre $1 - (1 - p)^n \geq r$ avec $n \in \mathbb{N}$. On commence par résoudre $1 - (1 - p)^x = r$ avec $x \in \mathbb{R}$. Comme x est l'exposant dans l'équation, on le trouve grâce à un log.

Quand x est trouvé, on en déduit n .

Exemple :

Une machine un peu capricieuse produit des pièces avec une fiabilité de 97%.

Combien de pièces doit-elle produire pour que la probabilité d'obtenir au moins 1 pièce défectueuse, soit supérieure à 40% ?

ex. 2.32 à 2.33

ex. 2.34 à 2.40

3 Géométrie analytique

3.1 Rappels

Soit $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2)$ un repère cartésien et sa base associée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ et $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$.

Soit les vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, les points $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ et $C(c_1; c_2)$.

- $\overrightarrow{AB} =$
- M milieu du segment AB : $M\left(\quad ; \quad \right)$
- G le centre de gravité du triangle ABC : $G\left(\quad ; \quad \right)$
- La norme du vecteur $\vec{v}$: $\|\vec{v}\| =$
- La distance entre deux points A et B : $\delta(A; B) =$
- $\vec{v}_u$ le vecteur unitaire de même direction et sens que $\vec{v}$: $\vec{v} : \vec{v}_u =$
- $\vec{v}_\perp$ et $\vec{v}_\perp'$ les vecteurs perpendiculaires de même norme que $\vec{v}$: $\vec{v} : \vec{v}_\perp =$ et $\vec{v}_\perp' =$
- produit scalaire de $\vec{v}$ avec $\vec{w}$: $\vec{v} \bullet \vec{w} =$
- Critère de perpendicularité : $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{w} \iff$
- α l'angle convexe formé par les deux vecteurs : $\alpha =$
- Critères de colinéarité : $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires si $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{w} = k \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$.

On peut aussi le vérifier en calculant :

- Aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w} =$
- Aire du triangle formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w} =$

- **Équation vectorielle paramétrique** d'une droite :
- **Système d'équations paramétriques** d'une droite :
- **Équation cartésienne explicite** d'une droite :
- **Équation cartésienne canonique** d'une droite :

Exemple : Soit d la droite passant par $A(3; -4)$ et $B(-2; 6)$.

- Quel est son vecteur directeur ?
- Quel est son vecteur normal ?
- Quelle est son équation cartésienne canonique ?
- Quelle est son équation cartésienne explicite ?
- Quelle est sa pente ?
- Quelle est son ordonnée à l'origine ?

- **Position relative de deux droites :**

	pent	o. o.	vect. dir.	vect. norm.	sol. du syst.
confondu					
parallèles					
sécantes					
perpendiculaires					

Exemple : Soit le point $P(5; -1)$ et la droite $d : 2x - 5y + 6 = 0$.

a) P appartient-il à la droite d ?

b) Quelle est l'équation cartésienne canonique de la droite parallèle à d passant par P ?

c) Quelle est l'équation cartésienne canonique de la droite perpendiculaire à d passant par P ?

- **Angle aigu entre 2 sécantes** : $\alpha =$

- **Distance entre un point $P(p_1; p_2)$ et une droite $d : ax + by + c = 0$** : $\delta(P; d) =$

Exemple : Calculer la distance de $P(6; -2)$ à la droite $d : y = \frac{4}{3}x - 1$.

- Pour trouver l'équation de la **médiatrice** m_{AB} du segment AB j'utilise :

- Pour trouver l'équation de la **médiane** g_A issue de A j'utilise :

- Pour trouver l'équation de la **hauteur** h_A issue de A j'utilise :

ex. 3.1 à 3.10

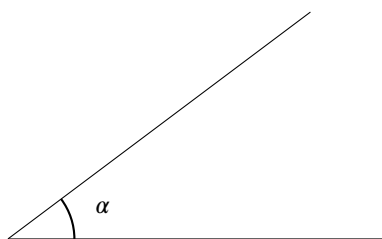
3.2 Bissectrice d'un angle

La **bissectrice d'un angle** α est la droite qui partage l'angle en deux angles isométriques.

Elle a aussi les propriétés suivantes :

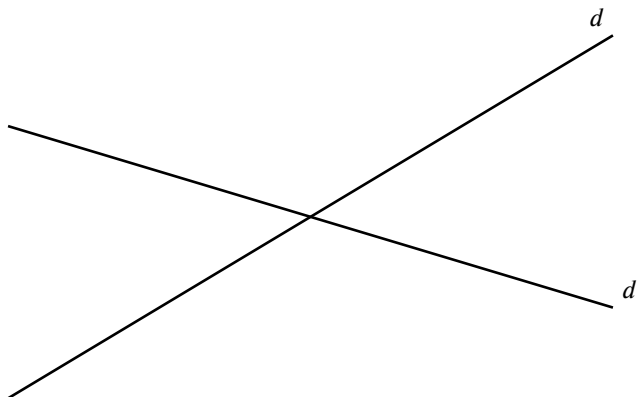
- C'est l'axe de symétrie de l'angle.
- Si a et b sont les côtés de l'angle, $\delta(P; a) = \delta(P; b)$ pour tout point P de la bissectrice.
- C'est le lieu géométrique des centres des **cercles tangents à a et b** .
- L'intersection des bissectrices d'un triangle ABC donne le centre du **cercle inscrit**, c'est-à-dire le cercle tangent à tous les côtés du triangle.

Exemple : Construire la bissectrice de cet angle et mettre en évidence les propriétés de la bissectrice sur le dessin.



On appelle **bissectrices des droites d et d'** les deux bissectrices des angles formés par d et d' .

Exemple : Construire les bissectrices des droites ci-dessous. Que peut-on observer ?



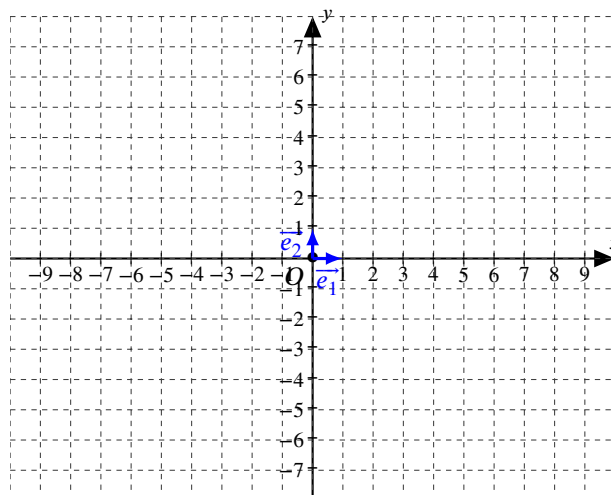
Pour déterminer les équations des bissectrices des droites $d : ax + by + c = 0$ et $d' : a'x + b'y + c' = 0$, on utilise la propriété qui dit que $\delta(P; d) = \delta(P; d')$ si P est sur une des bissectrices de d et d' . On part de l'équation ci-dessous :

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Exemple : Déterminer les équations des bissectrices des droites $d : 3x + 4y + 2 = 0$ et $d' : 5x + 12y + 1 = 0$.

ex. 3.11

Exemple : Déterminer l'équation de la bissectrice intérieure de l'angle BAC du triangle ABC avec $A(-4;-1)$, $B(4;-1)$ et $C(4;5)$.

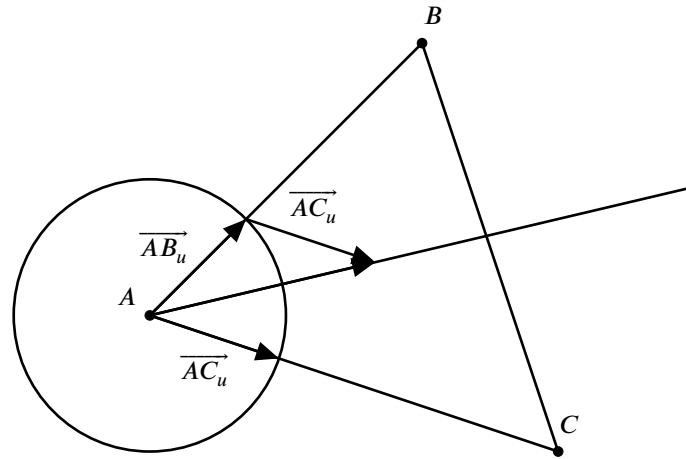


Pour **reconnaître les bissectrices intérieures**, un dessin est indispensable. Il permet de choisir les droites avec les bonnes pentes, car pour chaque sommet on obtient une bissectrice de pente positive et une de pente négative.

ex. 3.12 à 3.13

Il est également possible de trouver les équations des bissectrices intérieures d'un triangle en utilisant l'observation suivante :

En additionnant un vecteur unitaire de d_{AB} avec un vecteur unitaire de d_{AC} , on obtient un vecteur directeur d'une bissectrice en A . Pour avoir la bissectrice intérieure, il faut prendre les vecteurs unitaires de même sens que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



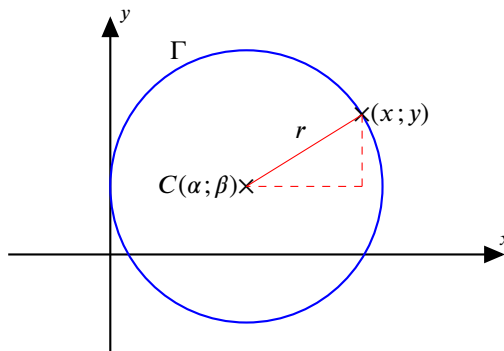
Exemple : À l'aide de cette méthode, déterminer l'équation de la bissectrice intérieure de l'angle BAC du triangle ABC avec $A(-4;-1)$, $B(4;-1)$ et $C(4;5)$.

ex. 3.14 à 3.15

3.3 Équation du cercle

Soit un point $P(\alpha; \beta)$ et r un nombre positif.

Le **cercle** Γ de **centre** C et de **rayon** r est le lieu géométrique des points dont la distance à C vaut r .



Exemple : Représenter le cercle de centre $C(5;4)$ et de rayon 3 par un croquis et traduire la condition « être à une distance de 3 de C » par une équation.

L'**équation cartésienne de forme centre-rayon d'un cercle** Γ de centre $C(\alpha; \beta)$ et de rayon r est :

$$\Gamma : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Sa **forme développée** est :

$$\Gamma : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Preuve : Cela découle du théorème de Pythagore.

Les cathètes du triangle rectangle mesurent $|x - \alpha|$ et $|y - \beta|$. La longueur de l'hypoténuse est le rayon.

#

Exemples :

a) Donner l'équation du cercle de centre $C(-3;10)$ et de rayon 4 sous les deux formes.

b) Trouver le centre et le rayon du cercle $(x+1)^2 + y^2 = 7$.

ex. 3.16 à 3.18

Pour **trouver le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation cartésienne développée**, il faut passer par la forme centre-rayon.

On va pour cela utiliser les termes en x^2 et en x pour trouver la parenthèse $(x - \alpha)^2$.

On fait de même avec les termes en y^2 et en y pour trouver la parenthèse $(y - \beta)^2$.

Il ne faut pas oublier d'adapter le terme constant pour garder la même équation.

Exemples : Trouver, lorsque c'est possible, le centre et le rayon :

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 23 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 50 = 0$

d) $x^2 - y^2 - 8x + 10y - 23 = 0$

e) $4x^2 + y^2 - 8x + 10y - 23 = 0$

ex. 3.19

Remarque : Les trois derniers exemples de la page précédente nous montrent que les équations cartésiennes du deuxième degré ne sont pas toutes des équations de cercle. Si vous les tracez sur Geogebra, vous verrez que la d) est une hyperbole et la e) une ellipse.

Lorsqu'on nous demande l'équation d'un cercle, le centre n'est pas toujours donné dans la consigne. On devra souvent utiliser les propriétés ci-dessous pour le trouver :

- Le centre d'un **cercle passant par A et B** est sur la médiatrice du segment AB .
- Le centre d'un **cercle tangent aux droites d_1 et d_2** est sur la bissectrice de l'angle formé par les deux droites.

Exemples :

a) Déterminer l'équation du cercle passant par les points O , $A(1;5)$ et $B(6;4)$.

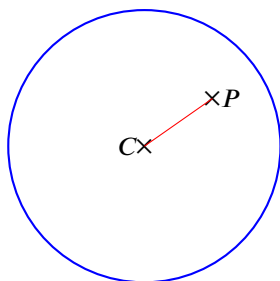
b) Déterminer l'équation du cercle qui a son centre sur l'axe Ox et qui est tangent aux droites $d_1 : 3x - 4y = -16$ et $d_2 : 4x + 3y = -13$.

ex. 3.20 à 3.24

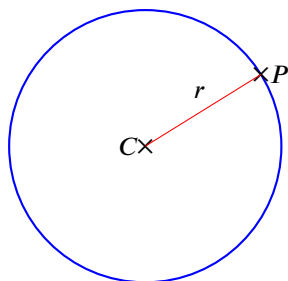
3.4 Positions relatives

3.4.1 Position relative d'un point et d'un cercle

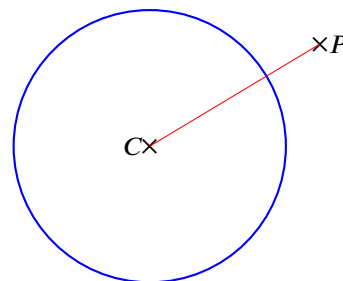
Un point P peut être **à l'intérieur**, **sur** ou **à l'extérieur** du cercle. Pour déterminer cette position relative, on compare la distance entre le centre C et P avec le rayon r .



$$\|\overrightarrow{CP}\| < r$$



$$\|\overrightarrow{CP}\| = r$$

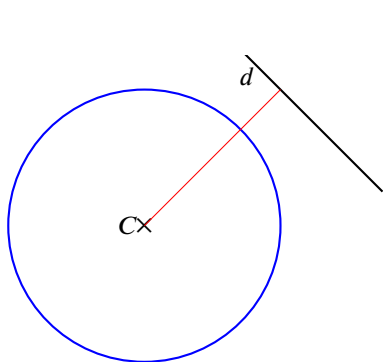


$$\|\overrightarrow{CP}\| > r$$

Exemple : Quelle est la position relative du point $P(2; -3)$ par rapport au cercle de centre $C(9; -5)$ et de rayon $5\sqrt{2}$?

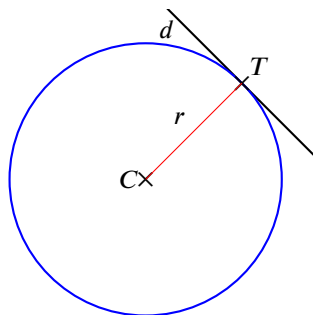
3.4.2 Position relative d'une droite et d'un cercle

Une droite d et un cercle peuvent être **disjoints**, **tangents** ou **sécants**. Pour déterminer cette position relative, on compare la distance entre le centre C et d avec le rayon r .



$$\delta(C; d) > r$$

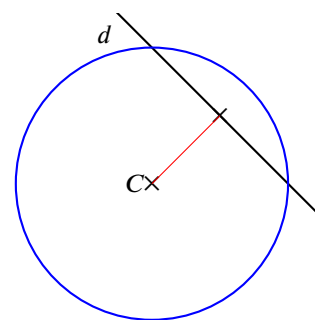
pas de point d'intersection



$$\delta(C; d) = r$$

1 point d'intersection

appelé **point de tangence**
 d est une **tangente au cercle**



$$\delta(C; d) < r$$

2 points d'intersection

Pour trouver les coordonnées des éventuels points d'intersection, on résout le système composé par l'équation du cercle et l'équation de la droite en transformant cette dernière en équation de substitution.

Exemple : Quelle est la position relative de la droite $d : y = -7x + 108$ et du cercle de centre $C(9; -5)$ et de rayon $5\sqrt{2}$? Donner les coordonnées des éventuels points d'intersection.

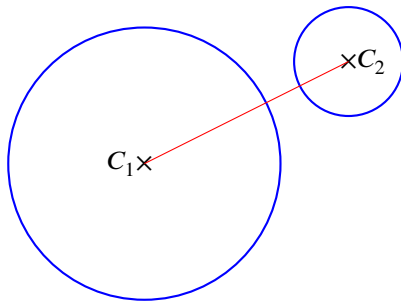
Exemple : Quelle est la position relative de la droite $d : x - 2y + 1 = 0$ et du cercle d'équation $\Gamma : x^2 + y^2 + 2y - 17 = 0$? Donner les coordonnées des éventuels points d'intersection.

ex. 3.25 à 3.28

3.4.3 Position relative de deux cercles

Prenons deux cercles γ_1 et γ_2 , dont les centres sont respectivement C_1 et C_2 et les rayons r_1 et r_2 .

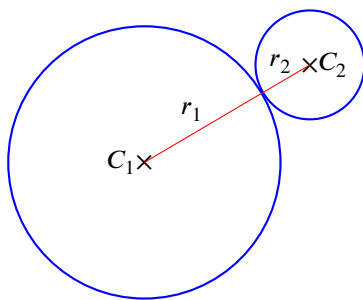
On a les 5 cas de figure suivants :



Les cercles sont **disjoints extérieurement**.

pas de point d'intersection

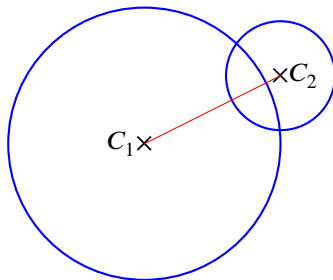
$$\|\overrightarrow{C_1 C_2}\| > r_1 + r_2$$



Les cercles sont **tangents extérieurement**.

un point d'intersection

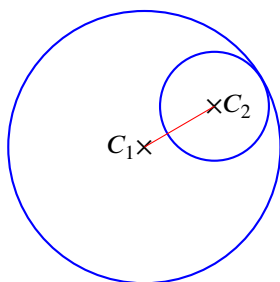
$$\|\overrightarrow{C_1 C_2}\| = r_1 + r_2$$



Les cercles sont **sécants**.

deux points d'intersection

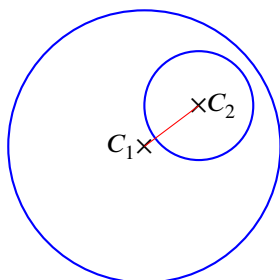
$$|r_1 - r_2| < \|\overrightarrow{C_1 C_2}\| < r_1 + r_2$$



Les cercles sont **tangents intérieurement**.

un point d'intersection

$$\|\overrightarrow{C_1 C_2}\| = |r_1 - r_2|$$



Les cercles sont **disjoints intérieurement**.

pas de point d'intersection

$$\|\overrightarrow{C_1 C_2}\| < |r_1 - r_2|$$

Exemple : Soit $\Gamma_1 : (x-1)^2 + y^2 = 4$ et $\Gamma_2 : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 20$.

a) Quelle est la position relative de ces deux cercles ?

b) Calculer les coordonnées des éventuels points d'intersection.

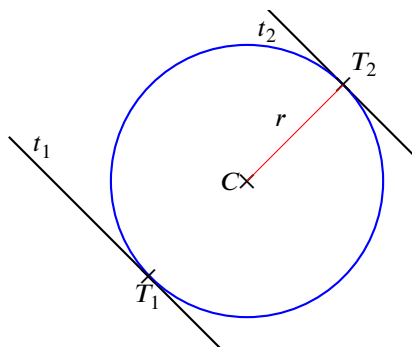
c) Quelle est l'équation de la droite passant par les deux points d'intersection ?

ex. 3.29 à 3.32

3.5 Tangentes à un cercle de direction donnée

Soit un cercle Γ , de centre C et de rayon r .

Intéressons-nous à la recherche des équations des tangentes à Γ , t_1 et t_2 , de pente m .



Les équations de t_1 et de t_2 auront la forme $y = mx + h$, autrement dit $mx - y + h = 0$.

Il ne reste qu'à trouver h . Pour cela, on résout l'équation :

$$\delta(C; t) = r$$

Exemple : Soit le cercle d'équation

$$\Gamma : (x+5)^2 + (y-3)^2 = 13$$

Calculer les équations des tangentes à Γ dont la pente est $\frac{3}{2}$.

Il y a bien d'autres manières de donner la direction de la tangente. Lesquelles et qu'est-ce que cela change ?

ex. 3.33 à 3.35

3.6 Tangentes à un cercle passant par un point P

Soit un cercle Γ , de centre C et de rayon r , ainsi qu'un point P .

Nous allons chercher les équations des **tangentes à Γ passant par P** . On dit aussi les **tangentes à Γ issues de P** .

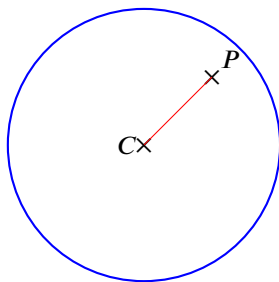
3.6.1 Tangentes à un cercle passant par P : Détermination de la situation

Le nombre de tangentes à Γ passant par P dépend de la position relative de P par rapport au cercle .

Si P est à l'intérieur du cercle

$$\|\overrightarrow{CP}\| < r$$

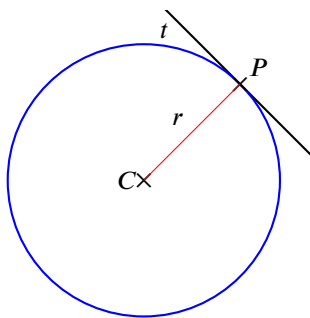
Il n'y a pas de tangente.



Si P est sur le cercle

$$\|\overrightarrow{CP}\| = r$$

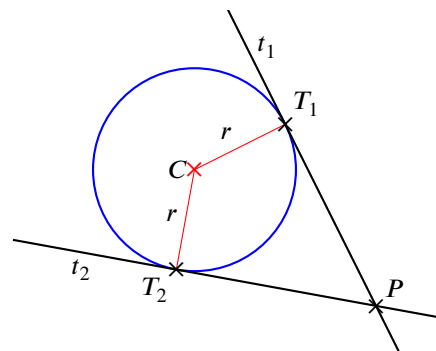
Il y a une unique tangente.



Si P est extérieur au cercle

$$\|\overrightarrow{CP}\| > r$$

Il y a deux tangentes.



Chaque fois que l'on nous demande de trouver les éventuelles tangentes à un cercle passant par un point P , il faut commencer par déterminer la position de P par rapport au cercle.

Exemple : Soit le cercle d'équation

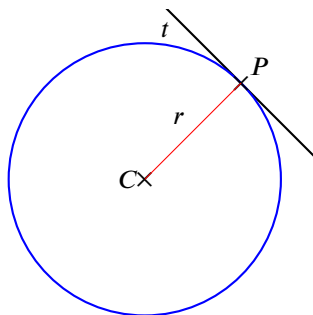
$$\Gamma : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

Calculer les équations des éventuelles tangentes à Γ issues du point $P(1;1)$.

3.6.2 Tangentes à un cercle passant par P : 1^{er} cas, P est sur le cercle.

Si le point P est sur le cercle, il sera le point de tangence. On a donc que $\overrightarrow{CP}$ est un vecteur normal à la droite t .

t est donc la droite passant par P perpendiculaire $\overrightarrow{CP}$.



Exemple : Soit le cercle d'équation $\Gamma : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Calculer les équations des éventuelles tangentes à Γ issues du point $P(1;3)$.

En généralisant cette méthode, on arrive à la formule ci-dessous.

Soit le cercle donné d'équation cartésienne centre-rayon

$$\Gamma : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

et $T(t_1; t_2)$ **un point de** Γ . Alors

$$(t_1 - \alpha)(x - \alpha) + (t_2 - \beta)(y - \beta) = r^2$$

est une équation cartésienne de la tangente au cercle Γ par le point T .

On l'appelle **l'équation dédoublée** du cercle.

Attention cette formule ne peut s'utiliser que si T est sur le cercle. Il est donc indispensable d'avoir étudié la position du point par rapport au cercle.

Exemple : Refaire l'exemple précédent à l'aide de cette formule.

Preuve : Notons $C(\alpha; \beta)$ le centre du cercle Γ et t la tangente au cercle par le point T .

Soit $M(x; y)$ un point sur la tangente t .

$$\text{Alors } \overrightarrow{CT} \perp \overrightarrow{TM} \implies \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TM} = 0 \implies \overrightarrow{CT} \cdot (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CT}) = 0$$

$$\implies \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CT} = \|\overrightarrow{CT}\|^2 = r^2$$

$$\text{Or } \overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} t_1 - \alpha \\ t_2 - \beta \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} \implies (t_1 - \alpha)(x - \alpha) + (t_2 - \beta)(y - \beta) = r^2 \quad \#$$

Exemple : Soit le cercle d'équation $\Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 6y + 8 = 0$.

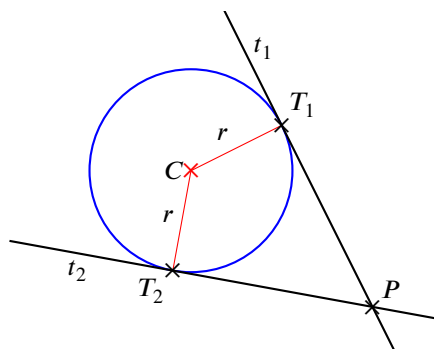
Calculer les équations des éventuelles tangentes à Γ issues du point $P(2; -2)$.

ex. 3.36 à 3.40

3.6.3 Tangentes à un cercle passant par P : 2^{ème} cas, P est extérieur au cercle.

Si le point P est extérieur au cercle, il y a forcément deux tangentes. La méthode que nous allons voir permet de trouver les tangentes non verticales, donc celles qui peuvent s'écrire sous la forme $y = mx + h$.

On gardera en tête que si cette méthode n'aboutit qu'à une seule tangente, c'est que la deuxième est la droite verticale passant par P .



Les équations de t_1 et de t_2 auront la forme $y = mx + h$, autrement dit $mx - y + h = 0$.

On doit cette fois-ci trouver m et h .

On va utiliser les deux informations suivantes :

P est un point de la droite et $\delta(C; t) = r$

Exemple : Soit le cercle d'équation $\Gamma : (x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Calculer les équations des éventuelles tangentes à Γ issues du point $P(-4;9)$.

Quelles sont les coordonnées des points de tangence ?

ex. 3.41 à 3.42

Exemple : Soit le cercle d'équation $\Gamma : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Calculer les équations des éventuelles tangentes à Γ issues du point $P(6;-2)$.

ex. 3.43 à 3.47

4 Exercices

4.1 Combinatoire

Principes fondamentaux

Exercice 1.1 Une personne a quatre jupes et six chemisiers. Combien de combinaisons « jupe et chemisier » différentes peut-elle porter ?

Exercice 1.2 Une personne veut acheter une voiture. Elle constate qu'elle a non seulement le choix entre 8 modèles, mais que chaque modèle est disponible en 15 couleurs différentes, peut être manuel ou automatique, et encore à essence, hybride ou électrique.

De combien de manières différentes peut-elle faire sa commande ?

Exercice 1.3 Dans certains pays, les plaques d'immatriculation des automobiles commencent par une lettre de l'alphabet, suivie de cinq chiffres. Calculer combien de plaques d'immatriculation sont réalisables dans les situations suivantes.

- a) Le premier chiffre suivant la lettre ne peut pas être 0.
- b) La première lettre ne peut pas être *O* ou *I* et le premier chiffre ne peut pas être 0 ou 1.
- c) Les lettres X, Y ou Z sont réservées pour des plaques de collection. Dans ce cas, les 5 chiffres sont identiques. Sinon, les lettres et les chiffres peuvent être choisis de toutes les manières possibles.

Exercice 1.4 Mon fitness possède 4 appareils de cardio et 10 appareils de musculation différents. Mon coach me prépare un programme que je dois faire dans l'ordre indiqué. Le programme peut être un entraînement d'endurance composé de 3 appareils cardio différents ou alors être un programme de force composé d'un appareil de cardio suivi de 3 appareils de musculation différents.

Combien existe-t-il de programmes différents ?

Exercice 1.5 Pour chaque condition suivante, combien de "mots" peut-on former en utilisant que les lettres *A*, *B*, *C* et *D* ?

- a) Le "mot" comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois.
- b) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois. La première et la dernière lettre doivent être identiques.
- c) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois. Il ne doit contenir aucun A.
- d) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois. Il doit contenir exactement un A.
- e) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois. Il doit contenir au moins un A.
- f) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre n'est utilisée qu'une seule fois.
- g) Le « mot » comporte cinq lettres. Chaque lettre n'est utilisée qu'une seule fois.
- h) Le « mot » comporte cinq lettres, qui doivent être toutes identiques.

Les permutations

Exercice 1.6 Calculer le nombre d'anagrammes que l'on peut former avec les mots suivants :

- | | |
|-------------------|------------------------|
| a) <i>ART</i> | d) <i>MATURITE</i> |
| b) <i>ARA</i> | e) <i>BACCALAUREAT</i> |
| c) <i>DIPLOME</i> | f) <i>MISSISSIPPI</i> |

Exercice 1.7 Un étudiant possède cinq livres de math, trois livres d'histoire et huit livres en allemand. De combien de manières peuvent-ils être rangés sur une étagère si les livres traitant de la même matière sont placés les uns à côté des autres ?

Exercice 1.8 Combien de mots peut-on écrire avec les lettres du mot *TOULOUSE*, si les consonnes doivent occuper les 1^{re}, 2^e et 7^e positions ?

Exercice 1.9 Les quatre remplaçants d'une équipe de volley prennent place sur le banc des remplaçants. De combien de manières différentes peuvent-ils s'asseoir ?

Exercice 1.10 Avec les lettres *A, M, O, S* et *U*, on peut créer 120 anagrammes. En les classant par ordre alphabétique, quelle sera la position du « mot » *SOU MA* ?

Exercice 1.11 Neuf personnes prennent place autour d'une table ronde.

- a) De combien de manières différentes peuvent-elles s'asseoir ? (On ne tient compte que de la position relative des neuf personnes les unes par rapport aux autres.)
- b) Même question, mais un couple de deux amoureux désirent être voisins.
- c) Dans le cas de la question a), combien y a-t-il de configurations dans lesquelles les deux amoureux ne sont pas assis l'un à côté de l'autre.

Exercice 1.12 Un représentant s'apprête à visiter cinq de ses clients. De combien de façons peut-il faire cette série de visite :

- a) s'il les fait toutes le même jour ?
- b) s'il en fait trois un jour et deux le lendemain ?

Exercice 1.13 De combien de manières peut-on partager un groupe de dix personnes :

- a) en deux groupes de 7 et de 3 personnes ?
- b) en trois groupes de cinq, trois et deux personnes ?

Exercice 1.14 Le client d'une banque se rappelle que 2, 4, 7 et 9 sont les chiffres de son code d'accès à quatre chiffres de sa carte bancaire. Malheureusement, il a oublié le code exact.
Calculer le plus grand nombre possible d'essais nécessaires pour obtenir le code secret.

Exercice 1.15 Le client d'une banque se rappelle que 2, 4 et 7 sont les chiffres de son code d'accès à quatre chiffres de sa carte bancaire. Malheureusement, il a oublié le code exact.
Sachant qu'un des chiffres apparaît deux fois dans le code, calculer le plus grand nombre possible d'essais nécessaires pour obtenir le code secret.

Les arrangements

Exercice 1.16 Calculer le nombre de mots de 5 lettres que l'on peut former :

- a) sans répétition (chaque lettre ne peut apparaître qu'une seule fois)
- b) avec répétitions (chaque lettre peut apparaître plusieurs fois)

Exercice 1.17 Vous disposez de huit pièces de Scrabble[™] permettant de composer le mot *EQUATION*. Combien de mots de quatre lettres pouvez-vous former ?

Exercice 1.18 Dans l'alphabet Braille, chaque signe est représenté par six emplacements, qui contiennent chacun un point en relief ou rien. Combien de signes distincts peut-on composer ?

Exercice 1.19 De combien de manières peut-on agencer une vitrine qui contient 4 emplacements différents pour placer des sculptures, sachant que l'on a un choix de 10 sculptures.

Exercice 1.20 De combien de manières différentes 5 skieurs peuvent-ils s'asseoir sur un télésiège de 8 places ?

Exercice 1.21 Un immeuble est composé d'un rez-de-chaussée et de huit étages.

- a) Un ascenseur part du rez-de-chaussée avec cinq occupants. De combien de manières différentes ces cinq occupants peuvent-ils choisir les étages auxquels ils vont descendre ?
- b) Même question si à chaque étage un occupant au plus quitte l'ascenseur.

Exercice 1.22

- a) Combien y a-t-il d'initiales possibles formées de deux lettres ?
- b) Combien un village doit-il avoir d'habitants pour que l'on soit sûr que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

Exercice 1.23 On considère les nombres 2, 5 et 7.

- a) Combien peut-on former de nombres à deux chiffres distincts ?
- b) Parmi eux, combien y a-t-il de nombres pairs ?

Exercice 1.24 Une cordée de 7 personnes circulant en montagne comprend 3 montagnards et 4 touristes. De combien de manières différentes, en tenant compte de l'ordre, peut-on disposer ces 7 personnes en file, sachant que la première et la dernière personne de la cordée doivent être des montagnards ?

Exercice 1.25 Dix-sept chevaux sont au départ d'un grand-prix hippique. Combien y a-t-il de tiercés possibles :

- a) au total ?
- b) dans lesquels les trois chevaux gagnants sont-ils dans l'ordre d'arrivée ?
- c) dans lesquels les trois chevaux gagnants sont-ils soit dans l'ordre d'arrivée, soit dans le désordre ?
- d) dans lesquels les trois chevaux gagnants sont-ils dans le désordre ?

Exercice 1.26 Vos ancêtres sont votre père et votre mère, vos grands-parents, qui ont aussi chacun un père et une mère ...

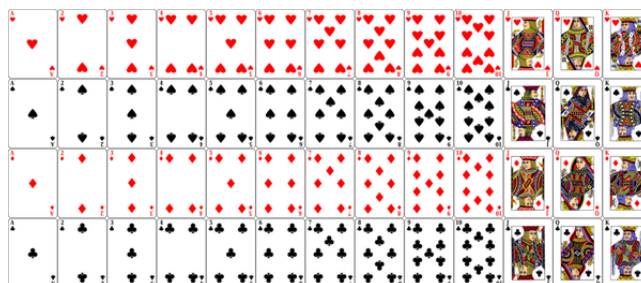
- Calculer le nombre de vos ancêtres de la 40^e génération (environ 1000 ans).
- Ce nombre est plus grand que le nombre d'êtres humains ayant vécu sur Terre depuis 1000 ans. Où se trouve la faille dans ce raisonnement ?

À propos des jeux de cartes :

Un jeu de cartes de Jass est composé de 36 cartes. Il y a quatre couleurs différentes nommées *pique*, *coeur*, *carré* et *trèfle*. Il y a neuf cartes différentes de chaque couleur : l'as, le roi, la dame, le valet, puis les cartes numérotées de 10 à 6.



Un jeu de cartes de poker américain comporte 52 cartes. On ajoute au jeu de Jass les cartes numérotées de 5 à 2.



Dans un jeu de cartes, on appelle *main* les cartes qui sont distribuées au hasard à un joueur. L'ordre dans lequel les cartes de la main sont distribuées n'importe pas.

Les combinaisons

Exercice 1.27 On distribue une main de six cartes d'un jeu de Jass comportant 36 cartes.

- Combien de mains différentes peut-on recevoir ?
- Combien de mains comportent les quatre valets ?
- Combien de mains comportent au moins un valet ?

Exercice 1.28 De combien de façons peut-on choisir une main de cinq cartes dans un jeu de Jass de 36 cartes, si l'on veut que ces cinq cartes contiennent :

- a) les quatre as ?
- b) deux as et deux rois ?
- c) au moins un as ?
- d) au moins deux rois ?

Exercice 1.29 Dix-sept chevaux sont au départ d'un grand-prix hippique. Combien y a-t-il de tiercés non ordonnés possibles ?

Exercice 1.30 Une classe doit élire un comité de trois personnes. Combien de comités différents peut-on former si la classe est constituée de 24 élèves ?

Exercice 1.31 Douze personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y a-t-il de poignées de main ?

Exercice 1.32 Vous devez organiser un tournoi de tennis dans le cadre de votre club. Il y a neuf personnes inscrites qui devront toutes jouer une fois contre leur adversaire. Combien de matchs vont devoir se dérouler ?

Exercice 1.33 Un marchand de glace a en stock 31 parfums différents. Il se vante de proposer environ 4500 glaces différentes à trois boules, chaque boule étant d'un parfum différent. Est-ce vrai ?

Exercice 1.34 Avec 10 députés et 6 sénateurs, on veut former une commission de 7 membres comprenant exactement 5 députés. Quel est le nombre de possibilités ?

Exercice 1.35 Une grille de la loterie suisse comporte 45 numéros et le joueur doit en choisir six.

- a) Combien y a-t-il de grilles possibles ?
- b) Combien de grilles permettent de réaliser 3 points (gain de 6.—) ?
- c) Combien de grilles permettent de réaliser 6 points (gain du gros lot) ?

Exercice 1.36 Un questionnaire comprend huit questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Combien peut-on donner de réponses différentes avec quatre oui et quatre non ?

Exercice 1.37 On jette vingt fois une pièce de monnaie.

- a) Combien y a-t-il de séquences différentes ?
- b) Combien de séquences contiennent une fois pile ?
- c) Combien de séquences contiennent quatre fois pile ?
- d) Combien de séquences contiennent dix fois pile ?
- e) Combien de séquences contiennent vingt fois pile ?

Exercice 1.38 Une urne contient douze boules numérotées de 1 à 12. Calculer le nombre de tirages différents si l'on tire trois boules :

- a) simultanément ;
- b) successivement et sans remettre dans l'urne les boules qui ont été tirées ;
- c) successivement et en remettant dans l'urne, après chaque tirage, chaque boule qui a été tirée.

Synthèse

Exercice 1.39 On choisit 5 élèves dans la classe.

- a) Combien y a-t-il de possibilités différentes de les asseoir sur un canapé cinq places ?
- b) Combien y a-t-il de possibilités différentes de les asseoir sur un canapé trois places ?
- c) Combien y a-t-il de possibilités différentes de les asseoir dans une salle de sept places ?

Exercice 1.40 Combien de nombres entiers positifs inférieurs ou égaux à 10'000 peuvent être formés avec les chiffres 1, 2, 3 et 4

- a) si les répétitions sont permises ?
- b) si les répétitions ne sont pas permises ?

Exercice 1.41 Combien de nombres différents de cinq chiffres distincts peut-on former avec les chiffres de 0 à 9

- a) si les nombres doivent être impairs ?
- b) si les deux premiers chiffres de chaque nombre doivent être pairs ?

Exercice 1.42 Le Sport-Toto (paris sportifs) est un jeu de pronostics sur 13 matchs de football. Il y a trois résultats possibles : l'équipe qui reçoit gagne (1), le visiteur gagne (2) ou match nul (X). Combien de pronostics différents peut-on faire ?

Exercice 1.43 On veut asseoir cinq hommes et quatre femmes dans une rangée de neuf chaises de manière à ce que les femmes occupent les places paires. Combien y a-t-il de possibilités ?

Exercice 1.44 On dispose des sept jetons suivants : ① ① ② ② ② ③ ③.

- a) Combien de nombres de sept chiffres peut-on composer en juxtaposant ces sept jetons ?
- b) Combien de ces nombres sont inférieurs à 1'300'000 ?

Exercice 1.45 On range six jetons de couleurs différentes regroupés deux à deux dans trois boîtes. Combien de dispositions différentes existe-t-il ?

Exercice 1.46 De combien de manières différentes peut-on asseoir huit personnes en rang si :

- a) aucune restriction n'est imposée ;
- b) les personnes *A* et *B* veulent être assises côte à côte ;
- c) les hommes ne doivent avoir que des voisines et inversement, sachant qu'il y a quatre femmes et quatre hommes ;
- d) les hommes, qui sont au nombre de cinq, doivent être assis côte à côte ;
- e) les personnes forment quatre couples et chaque couple doit rester uni ?

Exercice 1.47 Dans une course, douze chevaux prennent le départ.

- De combien de manières le tableau d'arrivée des trois premiers peut-il se présenter? (tiercé dans l'ordre)
- Combien de trios gagnants peut-on avoir? (tiercé dans le désordre)

Exercice 1.48 Une urne contient les six jetons suivants : ① ② ③ ④ ⑤ ⑥.

- On tire simultanément cinq jetons. Combien de tirages différents contenant deux chiffres pairs et trois impairs peut-on former?
- On tire successivement les six jetons et on les aligne dans l'ordre du tirage. Combien de nombres différents de six chiffres peut-on ainsi former?
- On tire successivement quatre jetons et on les aligne dans l'ordre du tirage. Combien de nombres différents de quatre chiffres peut-on ainsi former?
- On tire simultanément quatre jetons. Combien de tirages différents peut-on former?
- On tire successivement quatre jetons. À chaque tirage, on note le chiffre obtenu puis on remet le jeton tiré dans l'urne. Combien de nombres différents de quatre chiffres peut-on ainsi former?
- On tire simultanément cinq jetons. On les aligne de manière à ce que deux chiffres pairs soient toujours séparés par un chiffre impair et réciproquement, deux chiffres impairs soient toujours séparés par un chiffre pair. Combien de nombres à cinq chiffres différents peut-on ainsi former?

Exercice 1.49 Combien de nombres à trois chiffres peut-on former avec les six chiffres 2, 3, 5, 6, 7, 9?

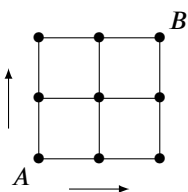
Parmi ces nombres, combien sont :

- inférieurs à 400 ;
- pairs ;
- multiples de 5.

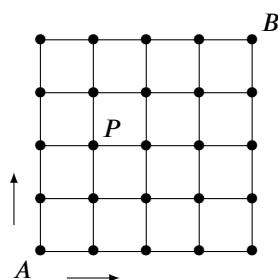
Exercice 1.50 Un étudiant doit résoudre huit problèmes sur dix lors d'un examen écrit.

- Combien de choix peut-il faire?
- Combien de choix peut-il faire, en supposant qu'il doit obligatoirement résoudre les trois premiers problèmes?
- Combien de choix peut-il faire, en supposant qu'il doit obligatoirement résoudre au moins quatre des cinq premiers problèmes?

Exercice 1.51 Sur un quadrillage 2×2 , on peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins reliant le point A (en bas à gauche) au point B (en haut à droite)?



Exercice 1.52 Sur un quadrillage 4×4 , on peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut.



- Combien y a-t-il de chemins reliant le point A (en bas à gauche) au point B (en haut à droite) ?
- Parmi ces chemins, combien passent par le point $P(1;2)$?

Exercice 1.53 Combien de salades différentes peut-on préparer à partir d'un choix de laitue, scarole, endive, cresson et chicorée amère ? (Considérer d'abord le nombre possible constitué d'un légume, puis de deux ...)

Exercice 1.54 Dans combien de nombres compris entre 1000 et 9999

- rencontre-t-on une fois le chiffre 3 ?
- ne rencontre-t-on pas le chiffre 3 ?
- rencontre-t-on trois fois le chiffre 3 ?

Exercice 1.55

En informatique, les couleurs de la palette RGB sont codées en nombres hexadécimaux à six « chiffres » (« chiffres » de 0 à 9 puis de A à F). Les deux premiers chiffres correspondent à la quantité de couleur rouge (R), les deux suivants à la couleur verte (G) et les deux derniers au bleu (B). Par exemple, le blanc est codé $FFFFFF$, le noir 000000 et le rouge pur $FF0000$.

Calculer le nombre de couleurs possibles dans cette palette.

4.2 Probabilités

Premières notions

Exercice 2.1 On lance simultanément deux dés, un blanc et un rouge, numérotés chacun de 1 à 6. On note à chaque tirage la somme des points obtenus sur la face supérieure de chaque dé.

Ci-dessous, vous trouvez les résultats d'une expérience pratique lors de laquelle les dés ont été lancés 500 fois de suite.

Somme des points	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nb d'apparitions	13	28	43	58	72	85	66	55	40	26	14

- Calculer à quelle fréquence (en %) est apparue la somme 2.
- Calculer à quelle fréquence (en %) est apparue la somme 8.
- Décrire l'ensemble de tous les tirages dont la somme vaut 2.
- Décrire l'ensemble de tous les tirages dont la somme vaut 8.
- Combien y a-t-il de tirages possibles au total ?
- Peut-on prédire, sans expérience pratique, la fréquence d'apparition de la somme 2 ?
- Peut-on prédire, sans expérience pratique, la fréquence d'apparition de la somme 8 ?

Exercice 2.2 Décrire l'univers des expériences aléatoires ci-dessous. Les événements élémentaires sont-ils équiprobables ?

- Jeter une pièce 2 fois
- Jeter 2 pièces identiques simultanément
- Obtenir un nombre en additionnant les résultats de deux dés
- Lancer deux dés différents

Exercice 2.3 On lance une pièce de monnaie et l'on note le résultat obtenu (pile ou face).

- Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.
- Quelle est la probabilité que le résultat soit pile ?
- On lance la pièce deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois pile ?
- Lors d'un premier lancer, le résultat est pile. Quelle est la probabilité d'obtenir pile lors d'un deuxième lancer ?

Exercice 2.4 Il y a 5 calculatrices défectueuses sur un lot de 25 calculatrices. On en choisit 4 au hasard. Calculer la probabilité que toutes les calculatrices choisies fonctionnent.

Exercice 2.5 On dispose de 26 jetons, gravés avec les 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement et sans remise trois jetons. Calculer la probabilité d'obtenir :

- a) un mot de trois consonnes ;
- b) un mot de trois voyelles ;
- c) le mot *BAC* ;
- d) le mot *BAC* ou l'une de ses anagrammes.

Exercice 2.6 Un paquet de douze cartes est composé de quatre rois, quatre dames et quatre valets. On tire cinq cartes simultanément. Calculer la probabilité de tirer :

- a) 2 rois, 2 dames et un valet
- b) les quatre rois
- c) au moins une dame

Exercice 2.7 Calculer la probabilité de gagner à la loterie suisse à numéros (6 nombres tirés parmi 45).

Exercice 2.8 Une urne contient 70 boules numérotées de 1 à 70. On tire simultanément trois boules. Calculer la probabilité que parmi ces trois nombres :

- a) figurent deux multiples de 5 ;
- b) ne figure aucun carré parfait ;
- c) figure au moins un carré parfait.

Exercice 2.9 D'un jeu de cartes de Jass, on retire les six. (Le jeu contient donc 32 cartes.) Puis, on distribue une main de huit cartes.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- a) *A* : « La main contient l'as de coeur. »
- b) *B* : « La main ne contient aucun as. »
- c) *C* : « La main contient au moins un as. »

Exercice 2.10 Un sac contient douze objets différents, dont trois rouges, quatre bleus et cinq jaunes. On tire simultanément trois objets au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :

- a) *A* : « Les trois objets sont jaunes. »
- b) *B* : « Il y a un objet de chaque couleur. »
- c) *C* : « Aucun objet n'est rouge. »
- d) *D* : « Il y a au moins un objet rouge. »
- e) *E* : « Il y a au moins un objet bleu. »
- f) *F* : « Il y a au plus un objet bleu. »

Exercice 2.11 D'un jeu de Jass traditionnel (36 cartes), on distribue au hasard une main de cinq cartes. Calculer la probabilité que la main tirée contienne :

- a) 5 carreaux ;
- b) 2 carreaux et 3 coeurs ;
- c) 5 carreaux ou 5 coeurs ;
- d) 5 cartes de la même famille ;
- e) 4 rois ;
- f) 3 rois et 2 dames ;
- g) aucun roi ;
- h) au moins un roi ;
- i) au plus un roi ;
- j) 3 cartes d'une famille et 2 cartes d'une autre famille.

Opérations sur les événements et diagrammes de Venn

Exercice 2.12 On lance trois fois une pièce de monnaie et l'on note les résultats obtenus, par exemple PPF .

Déterminer :

- l'univers U de cette expérience aléatoire ;
- l'événement A : « Pile sort en premier. » ;
- l'événement B : « Face ne sort pas au deuxième lancer. » ;
- l'événement C : « Obtenir au moins deux fois face. » ;
- l'événement $\bar{A}$, puis énoncer l'événement sous forme d'une phrase ;
- l'événement $A \cap B$, puis énoncer l'événement sous forme d'une phrase ;
- l'événement $A \cup B$, puis énoncer l'événement sous forme d'une phrase.

Exercice 2.13 Soit U l'ensemble des élèves du gymnase, A celui des élèves de 1^{re} année, B celui des élèves de 2^e, C celui des élèves de 3^e, F l'ensemble des filles du gymnase et S l'ensemble des élèves de nationalité suisse.

Décrire par des phrases les ensembles suivants :

- $(A \cup B) \cap F$
- $F \cap \bar{S}$
- $(A \cup C) \cap \bar{F} \cap S$

Exercice 2.14 On lance un dé trois fois de suite et l'on note les issues obtenues (par exemple $(2;5;3)$, $(1;1;6)$, ...).

Soit les événements A = « obtenir au moins un 6 » et B = « obtenir au moins un 1 »

Parmi les événements suivants, lesquels contiennent le résultat $(1;1;3)$.

A B $\bar{A}$ $\bar{B}$ $A \cup B$ $\bar{A} \cup \bar{B}$ $A \cap B$ $\bar{A} \cap \bar{B}$ $\bar{A} \cap B$ $A \cap \bar{B}$

Exercice 2.15 Un magasin accepte les cartes de crédit American Express ou VISA. Parmi les clients du magasin, 74% possèdent au moins une de ces cartes, 24% ont des cartes American Express et 61% la carte VISA.

Quel pourcentage représentent les clients qui possèdent les deux cartes ?

Exercice 2.16 Un appareil, fabriqué en très grande série, peut être défectueux à cause de deux défauts différents désignés par A et B . 10% des appareils ont le défaut A , 8% le défaut B et 4% les deux défauts simultanément. Un client achète l'un des appareils produits.

Représenter la situation dans un diagramme de Venn. Puis calculer :

- la probabilité que cet appareil ne présente aucun défaut ;
- la probabilité que cet appareil ne présente que le défaut A ;
- la probabilité que cet appareil ne présente que le défaut B .

Exercice 2.17 Une agence de voyages fait un sondage sur la connaissance de trois pays : l'Arménie, la Birmanie et le Chili. On constate que parmi les personnes interrogées, 42% connaissent l'Arménie, 55% connaissent la Birmanie, 34% connaissent le Chili, 10% ne connaissent que l'Arménie et la Birmanie, 2% ne connaissent que l'Arménie et le Chili, 27% connaissent au moins deux de ces pays, 35% connaissent exactement deux de ces pays.

L'un des participants au sondage gagne un voyage. Tous ont la même probabilité d'être tirés au sort.

Quelle est la probabilité pour que le gagnant soit une personne :

- a) connaissant au moins l'un des trois pays ?
- b) ne connaissant aucun des trois pays ?
- c) connaissant exactement un des trois pays ?
- d) connaissant uniquement l'Arménie ?
- e) connaissant l'Arménie et la Birmanie, mais pas le Chili ?
- f) connaissant la Birmanie ou le Chili, mais pas l'Arménie ?

Exercice 2.18 Dans une classe de gymnase, il y a 9 garçons et 6 filles. Parmi ces 15 élèves, 6 ont choisi au moins l'option philosophie, 5 au moins la chimie et 2 ont pris à la fois la chimie et la philosophie.

- a) Calculer le nombre d'élèves qui n'ont choisi aucune de ces deux options.
- b) On choisit au hasard un élève. Quelle est la probabilité qu'il ait pris exactement une des deux options ?

Probabilité conditionnelle

Exercice 2.19 Une enquête révèle que 45% des élèves d'un gymnase souffrent d'addiction à l'alcool ou au tabac. Parmi tous les élèves, 35% sont fumeurs et 25% ont des problèmes d'alcool.

- a) Représenter la situation sous forme d'un diagramme de Venn.
- b) Quelle est la probabilité qu'un élève souffre des deux addictions ?
- c) Quelle est la probabilité qu'un élève soit fumeur s'il souffre de problème d'alcool ?
- d) Quelle est la probabilité qu'un élève soit fumeur, s'il ne souffre pas de problème d'alcool ?

Exercice 2.20 Un sondage est effectué dans une société comprenant 40% de cadres et 60% d'employés. On sait que 20% des cadres et 10% des employés de cette société savent parler l'anglais.

On interroge un individu au hasard.

- a) Quelle est la probabilité que ce soit un cadre parlant l'anglais ?
- b) Quelle est la probabilité que ce soit un employé parlant l'anglais ?
- c) Quelle est la probabilité que ce soit une personne parlant l'anglais ?
- d) Sachant que l'individu interrogé sait parler l'anglais, quelle est la probabilité que ce soit un employé ?
- e) Sachant que l'individu interrogé est un cadre, quelle est la probabilité qu'il sache parler l'anglais ?

Exercice 2.21 Une urne contient trois billes rouges numérotées de 1 à 3, une bille bleue portant le numéro 4 et quatre billes vertes numérotées de 5 à 8. On choisit au hasard une bille de l'urne.

- a) Quelle est la probabilité que la bille soit rouge ?
- b) Sachant que le chiffre sur la bille est pair, quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

Exercice 2.22 On dispose d'un jeu de Jass de 36 cartes. L'expérience consiste à tirer une carte. On définit les événements :

- A : « La carte tirée est un coeur. »
- B : « La carte tirée est un valet de coeur. »
- C : « La carte tirée est une figure (valet, dame ou roi) de pique ou de coeur. »

Calculer

- a) $P(B|A)$
- b) $P(A|C)$
- c) $P(B|C)$
- d) $P(C|B)$

Exercice 2.23 Une étude des fichiers de la CNA (caisse nationale d'assurance) concernant une région montre qu'en 1990, 17% des personnes de moins de 70 ans ainsi que 75% des personnes âgées de 70 ans ou plus ont été vaccinées contre la grippe. On sait que les personnes de 70 ans ou plus représentent 12% de la population de cette région.

On choisit une personne au hasard parmi la population de cette région.

- a) Calculer la probabilité pour qu'elle soit vaccinée contre la grippe.
- b) Sachant que la personne choisie est vaccinée, calculer la probabilité qu'elle ait moins de 70 ans.
- c) Si la personne choisie à moins de 70 ans, calculer la probabilité qu'elle soit vaccinée.

Événements indépendants

Exercice 2.24 On jette 3 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On considère les événements suivants :

- A : « Le premier jet donne face. »
- B : « Les deux derniers jets donnent face. »

Calculer :

- a) $P(A)$
- b) $P(B)$
- c) $P(A \cap B)$
- d) $P(A|B)$
- e) $P(B|A)$

Que peut-on conclure ?

Exercice 2.25 Cette année, parmi les habitants de mon village, 30% se sont vaccinés contre la grippe, 20% ont attrapé la grippe et 53% n'ont pas attrapé la grippe alors qu'ils n'étaient pas vaccinés. Les événements « attraper la grippe » et « être vacciné » sont-ils indépendants ? Justifier par des calculs.

Exercice 2.26 Cette année, parmi les habitants de mon village, 30% se sont vaccinés contre la grippe et 20% ont attrapé la grippe. Si les événements « attraper la grippe » et « être vacciné » sont-ils indépendants quel pourcentage n'ont pas attrapé la grippe alors qu'ils n'étaient pas vaccinés.

Diagrammes en arbre

Exercice 2.27 Un sac contient quatre billes rouges, deux billes bleues et trois billes vertes. On tire successivement et sans remise deux billes. Représenter la situation à l'aide d'un arbre puis calculer la probabilité des événements suivants :

- a) A : « Les deux billes tirées sont rouges. »
- b) B : « La première bille est bleue et la seconde est verte. »
- c) C : « Une des billes tirées est rouge, l'autre est bleue. »

Exercice 2.28 Une urne contient au départ cinq boules blanches et sept noires. Chaque fois que l'on tire une boule, on note sa couleur, puis on la réintroduit ainsi que deux nouvelles boules de la même couleur qu'elle.

Quelle est la probabilité que les deux premières boules tirées soient noires, puis les deux suivantes blanches ?

Exercice 2.29 Curieux climat que celui de la petite île d'Eigoloroetem. Il y fait : soit beau toute la journée, soit mauvais toute la journée. L'affirmation « demain, il fera le même temps qu'aujourd'hui » est vraie dans 70% des cas. Il y a fait beau le vendredi de Pâques, calculer la probabilité des événements suivants :

- a) A : « Il a fait beau le dimanche de Pâques. »
- b) B : « Il a fait beau le samedi et le dimanche de Pâques. »
- c) C : « Il a fait beau le samedi ou le dimanche de Pâques. »

Exercice 2.30 L'éclairage d'une pièce nécessite l'emploi de deux lampes A et B différentes. Les probabilités de défaillance de ces lampes après 100 heures d'utilisation sont de 0,12 pour A et 0,18 pour B .

- a) Représenter la situation par un arbre.
- b) Calculer la probabilité pour que les deux lampes tombent en panne toutes les deux.
- c) En déduire la probabilité pour avoir au moins une lampe qui fonctionne.
- d) Quelle est la probabilité pour qu'exactement une lampe tombe en panne ?

Exercice 2.31 Un service d'urgence comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée est de 90%, celle que toutes deux soient occupées de 50%.

Quelle est la probabilité des événements suivants ?

- a) A : « La première salle est libre. »
- b) B : « Les deux salles sont libres. »
- c) C : « Au moins une des deux salles est libre. »
- d) D : « Une seule salle est libre. »
- e) E : « La deuxième salle est libre sachant que la première est occupée. »

Épreuves successives indépendantes

Exercice 2.32 Une personne d'humeur joyeuse essaie d'ouvrir sa porte après une soirée bien arrosée. Elle a un trousseau de dix clés indiscernables vu son état ! Elle essaie les clés en remettant chaque fois la clé utilisée dans le trousseau. Quelle est la probabilité des événements suivants ?

- a) A : « La porte s'ouvre au premier essai. »
- b) B : « La porte s'ouvre au sixième essai. »
- c) C : « La porte s'ouvre en moins de quatre essais. »
- d) Combien d'essais sont-ils nécessaires pour que la probabilité que la porte s'ouvre soit supérieure à 99% ?

Exercice 2.33 Un tireur à l'arc atteint sa cible avec une probabilité de 60%. Il tire successivement huit flèches.

- a) Quelle est la probabilité qu'il atteigne exactement cinq fois la cible ?
- b) Quelle est la probabilité qu'il atteigne au moins une fois la cible ?
- c) Combien de flèches doit-il tirer pour que la probabilité qu'il atteigne au moins une fois la cible soit supérieure à 95% ?

Problèmes divers

Exercice 2.34 On a établi que, dans une population donnée, 60% des familles occupent une maison individuelle et parmi elles, 80% en sont propriétaires. Parmi les familles n'occupant pas de maison individuelle, 25% en sont propriétaires.

On choisit une famille au hasard dans la population considérée.

- a) Calculer la probabilité qu'elle soit propriétaire de son logement.
- b) Quelle est la probabilité qu'elle occupe une maison individuelle sachant qu'elle n'en est pas propriétaire ?
- c) Quelle est la probabilité qu'elle soit propriétaire de son logement sachant qu'il s'agit d'une maison individuelle ?

Exercice 2.35 On considère les événements suivants :

- A : « Une famille a des enfants des deux sexes. »
- B : « Une famille a au plus un garçon. »

On supposera qu'à la naissance la probabilité d'avoir un garçon et celle d'avoir une fille sont identiques.

- a) Montrer que A et B sont indépendants pour une famille de trois enfants.
- b) Est-ce toujours le cas pour une famille de deux enfants ?

Exercice 2.36 Une prof de math donne à sa classe dix problèmes en expliquant que l'examen final consistera à résoudre cinq de ces dix problèmes, choisis au hasard. Si une étudiante sait résoudre sept des dix problèmes, quelle est la probabilité qu'elle réponde correctement

- a) aux cinq problèmes ($\Rightarrow$ note 6) ?
- b) à au moins trois problèmes ($\Rightarrow$ note ≥ 4) ?

Exercice 2.37 Un dé à six faces est pipé. On a $P(1) = 0,1$ et $P(6) = 0,4$. Les autres faces ont la même probabilité d'apparition.

On jette une fois ce dé. Calculer la probabilité d'obtenir :

- a) 4 ;
- b) un nombre impair ;
- c) 4 ou un nombre impair .
- d) On jette ce dé 4 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois nombres impairs.
- e) On jette ce dé 2 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir une somme des points strictement inférieure à 5.

Exercice 2.38 On sort d'un jeu de cartes les quatre as et les quatre rois. On tire ensuite simultanément deux cartes de ces huit cartes. Quelle probabilité a-t-on de tirer :

- a) deux as si l'on sait qu'une des deux cartes au moins est un as ?
- b) deux as si l'on sait qu'une des deux cartes au moins est un as rouge ?
- c) deux as si l'on sait qu'une des deux cartes est l'as de coeur ?

Exercice 2.39 Une agence de location de voitures dispose de 15 véhicules récents et de 35 anciens véhicules. L'agence a constaté que les clients à qui elle louait un véhicule récent avaient une panne dans 0,5% des cas, alors que ceux à qui elle louait un véhicule ancien avaient une panne dans 2,5% des cas.

- a) Calculer la probabilité qu'un véhicule loué au hasard tombe en panne.
- b) Un véhicule loué au hasard tombe en panne. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un ancien véhicule.
- c) Soucieuse de son image de marque, l'agence décide de remplacer un certain nombre de ses anciens véhicules par des véhicules récents. Calculer le nombre d'anciens véhicules qu'il faut remplacer par des véhicules récents pour que les pannes arrivent moins d'une fois sur cent.

Exercice 2.40 Une forêt abrite vingt cerfs. Cinq sont capturés, marqués et relâchés. Un peu plus tard, quatre sont de nouveau capturés.

Quelle est la probabilité que deux d'entre eux soient marqués (et les deux autres non marqués) ?

4.3 Géométrie analytique

S'il n'y a pas d'indications particulières, on considère dans chacun des exercices un repère cartésien $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2)$ et sa base associée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ et $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$.

Rappels

Exercice 3.1 Soit $A(2; 51)$, $B(-4; 3)$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \end{pmatrix}$.

- Donner les coordonnées de O , E_1 et E_2 .
- Donner les composantes des vecteurs $\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$.
- Calculer la distance $\delta(A; B)$.
- Donner les coordonnées de M , le point milieu du segment AB et de G le centre de gravité du triangle ABE_1 .
- Déterminer les coordonnées de C .
- $\overrightarrow{AC}$ est-il perpendiculaire au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$?
- $\overrightarrow{AC}$ est-il colinéaire au vecteur $\vec{v}$?
- Donner les composantes d'un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ et de norme 7.
- Donner les composantes des vecteurs unitaires perpendiculaires à $\overrightarrow{AC}$.
- Calculer l'angle convexe OAC .
- Calculer l'aire du triangle OAC .

Exercice 3.2 Donner l'équation cartésienne canonique des droites décrites ci-dessous.

- Elle passe par $A(4; -5)$ et $B(-3; -2)$.
- Elle passe par $A(4; -5)$ et forme un angle de 45° avec l'axe des abscisses.
- Elle passe par $A(4; -5)$ et est verticale.
- Elle passe par $A(4; -5)$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un de ses vecteurs directeurs.

Exercice 3.3 Soit d la droite donnée par l'équation cartésienne $x - 7y + 4 = 0$.

Étudier la position relative de cette droite avec celles données ci-dessous :

$$d_1 : 3x - 21y + 4 = 0$$

$$d_2 : 28x + 4y + 16 = 0$$

$$d_3 : 5x + 4y + 6 = 0$$

$$d_4 : -3x + 21y - 12 = 0$$

Exercice 3.4 Soit d la droite donnée par l'équation cartésienne $5x + 3y - 6 = 0$.

- Est-ce que le point $(30; -48)$ est sur cette droite ?
- Donner les composantes d'un vecteur normal à cette droite.
- Calculer la distance entre le point $A(3; 10)$ et cette droite.
- Donner les coordonnées du point d'intersection de cette droite avec l'axe Ox .
- Calculer l'angle entre d et l'axe Ox .
- Donner une équation vectorielle paramétrique de cette droite.
- Donner l'équation cartésienne canonique de la droite perpendiculaire à d , passant par $(2; 5)$.
- Donner l'équation cartésienne canonique de la droite parallèle à d , passant par $(2; 5)$.
- Calculer le point d'intersection de d avec $g : 2x - y + 13 = 0$.
- Calculer les angles formés par d et g .

Exercice 3.5 On considère un rectangle $ABCD$.

Deux de ses côtés se trouvent sur les droites données par les équations cartésiennes $d_1 : 3x - 2y = 5$ et $d_2 : 2x + 3y = 25$ et le sommet A est $A(-2; 1)$.

Calculer les coordonnées des autres sommets ainsi que l'aire du rectangle.

Exercice 3.6 Soit le triangle ABC dont les sommets sont les points :

$$A(2; 3)$$

$$B(6; -5)$$

$$C(11; 5)$$

- Déterminer l'équation cartésienne canonique de la médiatrice m_{AB} du segment AB .
- Déterminer l'équation cartésienne canonique de la hauteur h_A issue du sommet A .
- Déterminer l'équation cartésienne canonique de la médiane g_C issue du sommet C .
- Calculer l'aire du triangle ABC .
- Calculer l'angle ABC .

Exercice 3.7 De quelle(s) droite(s) puis-je calculer l'équation grâce à ces informations ?

- | | |
|--|--|
| a) les coordonnées de G et celles de M_{AB} ; | g) l'équation de m_{AB} et les coordonnées de C ; |
| b) les coordonnées de A et celles de B ; | h) l'équation de m_{AB} et les coordonnées de A ; |
| c) les coordonnées de C et celles de G ; | i) l'équation de h_C et les coordonnées de B ; |
| d) les coordonnées de A et celles de M_{AB} ; | j) l'équation de d_{AB} et les coordonnées de C ; |
| e) les coordonnées de C et celles de M_{AB} ; | k) l'équation de m_{AB} et les coordonnées de M_{AB} ; |
| f) les coordonnées de M_{BC} et celles de M_{AB} ; | l) l'équation de h_C et les coordonnées de M_{AB} . |

Exercice 3.8 De quel point puis-je calculer les coordonnées grâce aux équations de ces droites ?

- | | | | |
|----------------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|
| a) m_{BC} et g_A | c) d_{AB} et h_C | e) h_A et g_A | g) m_{BC} et d_{BC} |
| b) d_{AB} et h_B | d) m_{AB} et m_{AC} | f) h_A et h_B | h) g_A et g_C |

Exercice 3.9 On considère un triangle ABC . On connaît les droites $d_{BC} : 2x - y - 8 = 0$ et $d_{AC} : x - 3y - 14 = 0$, ainsi que l'orthocentre $H(7;1)$. Déterminer les coordonnées des sommets du triangle ainsi que l'équation cartésienne canonique de la droite d_{AB} .

Exercice 3.10 Soit le triangle ABC où $A(0;-4)$, $B(12;2)$ et $C(5;11)$.

Montrer que les points suivants sont alignés et calculer une équation cartésienne de la droite passant par ces points :

- D : centre du cercle circonscrit
- G : centre de gravité
- H : orthocentre

Bissectrice d'un angle

Exercice 3.11 Soit les droites d'équation

$$d_1 : 3x + 4y + 6 = 0$$

$$d_2 : y + 6 = 0$$

Calculer les équations cartésiennes canoniques de leurs bissectrices et vérifier qu'elles sont perpendiculaires.

Exercice 3.12 Soit le triangle ABC formé par les droites d'équation :

$$d_{BC} : x - 5y - 36 = 0$$

$$d_{AC} : x + 3y - 4 = 0$$

$$d_{AB} : 5x - y + 12 = 0$$

- Déterminer les coordonnées du sommet A .
- Déterminer les équations cartésiennes canoniques des bissectrices en B . Indiquer quelle est la bissectrice intérieure.

Exercice 3.13 Soit le triangle ABC où $A\left(-\frac{10}{3}; 2\right)$, $B(10;-8)$ et $C(10;12)$.

- Calculer une équation cartésienne canonique pour chaque bissectrice intérieure du triangle ABC .
- Vérifier que les bissectrices internes se coupent en un seul point E .
- Que peut-on dire de la distance du point E avec les côtés du triangle ABC ?

Exercice 3.14 Soit le triangle ABC dont les sommets sont les points de coordonnées :

$$A(4;-1)$$

$$B(-2;-3)$$

$$C(5;2)$$

Calculer les équations de m_{BC} , b_A , h_A et g_A .

Exercice 3.15 Soit le triangle ABC . On donne :

$$h_A : x + 2y - 8 = 0$$

$$g_C : 6x - 7y - 31 = 0$$

$$m_{AB} : x - 2y - 6 = 0$$

Déterminer les coordonnées des sommets de ce triangle.

Équation du cercle

Exercice 3.16 Donner l'équation du cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 2.

Exercice 3.17 Donner l'équation du cercle de centre $C(3;-1)$ et de rayon 5 sous les deux formes.

Exercice 3.18 Les équations ci-dessous sont-elles des équations de cercle ? Si oui, préciser le centre et le rayon.

a) $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$

c) $x^2 + (y+2)^2 = 1$

e) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = -9$

b) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$

d) $(x-3)^2 + y^2 = 64$

f) $4x^2 + 9y^2 = 1$

Exercice 3.19 Les équations ci-dessous sont-elles des équations de cercle ? Si oui, préciser le centre et le rayon.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$

e) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 9 = 0$

b) $x^2 + 2y^2 - 16x + 12y = 400$

f) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 12y = 400$

g) $x^2 - y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

h) $x^2 + y^2 - y = 0$

Exercice 3.20 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation du cercle défini par les conditions ci-dessous.

a) Le centre est l'origine et le rayon est égal à 7.

b) Le centre est $C(-5;11)$ et le rayon est égal à 4.

c) Le cercle passe par l'origine et son centre est $C(6;-8)$.

d) Le cercle passe par $A(2;6)$ et son centre est $C(-1;2)$.

e) Le cercle est le cercle de Thalès du segment AB et les coordonnées de A et B sont $A(3;2)$ et $B(-1;6)$.

f) Le cercle passe par $A(3;1)$ et $B(-1;3)$ et son centre est sur la droite $d : 3x - y - 2 = 0$.

Exercice 3.21 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation du cercle défini par les conditions ci-dessous.

a) Le centre est $C(1;-1)$ et le cercle est tangent à la droite d'équation $d : 5x + 9 = 12y$.

b) Le cercle est tangent à la droite d'équation $d : x + y = 4$ en $T(1;3)$ et son centre est sur Ox .

c) Le cercle est tangent aux deux axes et il passe par le point $A(0;5)$.

Exercice 3.22 Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite $4x - 5y = 3$ et qui sont tangents aux deux droites $2x = 3y + 10$ et $2y = 3x + 5$.

Exercice 3.23 Déterminer l'équation du cercle passant par les points de coordonnées ci-dessous.

$A(-1;5)$

$B(-2;-2)$

$D(5;5)$

Que peut-on dire ce cercle par rapport au triangle ABD ?

Exercice 3.24 Soit deux droites $d_1 : 4x + 3y + 2 = 0$ et $d_2 : 4x - 3y + 6 = 0$.

Déterminer les équations des cercles tangents à d_1 et d_2 qui ont leur centre sur l'axe Ox .

Position relative

Exercice 3.25 Quelle est la position du point $B(3;9)$ par rapport au cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 26x + 30y = -313$$

Déterminer la plus courte distance d'un point du cercle au point B.

Exercice 3.26 Soit le cercle $\Gamma : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$.

- Déterminer les coordonnées du centre C de Γ , ainsi que son rayon.
- Quelle est la position relative des points $A(1;4)$, $B(5;2)$ et $D(4;4)$ par rapport au cercle Γ ?
- Quelle est la position relative des droites $a : 2x - y + 1 = 0$, $b : x - y - 2 = 0$ et $c : 3x - y - 15 = 0$ par rapport à Γ ?
- Pour chaque droite, calculer les éventuels points d'intersection avec le cercle Γ .

Exercice 3.27 Dans chacun des cas, déterminer la position relative du cercle Γ et de la droite d . Calculer les coordonnées des points d'intersection s'il y en a.

- $\Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ et $d : x - y - 1 = 0$
- $\Gamma : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$ et $d : x - 3y + 10 = 0$
- $\Gamma : x^2 + y^2 + 6x + 4y + 11 = 0$ et $d : 3x + 2y - 2 = 0$

Exercice 3.28 Calculer les coordonnées des points d'intersection entre le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 + 15x - 12y + 36 = 0$$

et les axes Ox et Oy .

Exercice 3.29 Soit un triangle ABC .

On connaît $A(0;4)$, $g_C : 4x - y - 18 = 0$ la médiane issue de C et $h_C : -5x + 2y + 18 = 0$ la hauteur issue de C .

- Déterminer les coordonnées du point C .
- Déterminer l'équation cartésienne canonique du côté AC .
- Déterminer l'équation cartésienne canonique du côté AB .
- Déterminer les coordonnées de M , le milieu de AB .
- Déterminer l'équation du cercle passant par A et B dont le centre est sur l'axe Ox .
- Quelle la position relative de ce cercle par rapport à $x^2 + y^2 - 16x + 60 = 0$?

Exercice 3.30 Soit le cercle donné par $\Gamma_1 : (x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

- Quelle est la position relative du point $C_2(-14; -6)$ par rapport au cercle Γ_1 ?
- Déterminer l'équation du cercle Γ_2 de centre $C_2(-14; -6)$ tangent extérieurement à Γ_1 .
- Déterminer l'équation du cercle Γ_3 de centre $C_2(-14; -6)$ tel que Γ_1 et Γ_3 soient tangents intérieurement.

Exercice 3.31 Calculer la longueur de la corde commune aux cercles

$$\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 10x + 10y \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : x^2 + y^2 + 6x + 2y = 40.$$

Exercice 3.32 On donne deux cercles définis par des équations cartésiennes. Dans chaque cas, déterminer leur position relative et calculer les coordonnées des éventuels points d'intersection.

- $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$ et $\Gamma_2 : x^2 + y^2 + 4x - 16y + 43 = 0$
- $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ et $\Gamma_2 : x^2 + y^2 + 10x + 2y + 6 = 0$
- $\Gamma_1 : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ et $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$
- $\Gamma_1 : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$ et $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$
- $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ et $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$
- $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ et $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$

Tangentes à un cercle de direction donnée

Exercice 3.33 Soit le cercle Γ d'équation

$$\Gamma : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Calculer les équations cartésiennes canoniques des tangentes à Γ dont la pente est $-\frac{3}{4}$.

Exercice 3.34

- Calculer les équations des tangentes au cercle d'équation

$$\Gamma : x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6$$

de direction parallèle à la droite d'équation $2x + y = 7$.

- Calculer les équations des tangentes au cercle d'équation

$$\Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

de direction perpendiculaire à la droite d'équation $x = 2y + 345$.

Exercice 3.35 Soit la droite g et le cercle Γ définis par

$$g : 3x + 4y - 34 = 0$$

$$\Gamma : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Vérifier que g est tangente à Γ et trouver les équations cartésiennes des trois droites formant avec g un carré circonscrit à Γ .

Tangentes à un cercle passant par un point P **Exercice 3.36** Soit le cercle d'équation

$$\Gamma : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 2$$

- a) Quelle est la position relative de $T(3; -2)$ par rapport au cercle Γ ?
 b) Calculer l'équation cartésienne de la tangente à Γ passant par T .

Exercice 3.37 Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle Γ , calculer une équation cartésienne de la tangente à Γ au point T **en utilisant la démarche complète.**

- a) $T(-1; 2)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 5$
 b) $T(-5; 7)$ $\Gamma : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$
 c) $T(0; 0)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 3x - 7y$
 d) $T(-1; 2)$ $\Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 6y = 19$

Exercice 3.38 Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle Γ , calculer une équation cartésienne de la tangente à Γ au point T **en utilisant l'équation dédoublée.**

- a) $T(-1; 2)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 5$
 b) $T(-5; 7)$ $\Gamma : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$
 c) $T(0; 0)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 3x - 7y$
 d) $T(-1; 2)$ $\Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 6y = 19$

Exercice 3.39 Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle Γ , calculer une équation cartésienne de la tangente à Γ au point T .

- a) $T(2; 3)$ $\Gamma : 2x^2 + 2y^2 = x + 4y + 12$
 b) $T(2; 1)$ $\Gamma : 3x^2 + 3y^2 = 2x + 11$

Exercice 3.40 Soit le cercle Γ d'équation

$$\Gamma : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

- a) Quelle est la position relative du point $P(6; -2)$ par rapport au cercle Γ ?
 b) Calculer les équations des tangentes à Γ issues du point $P(6; -2)$.
 c) Calculer les coordonnées des points de tangence.

Exercice 3.41 Calculer les équations cartésiennes des tangentes au cercle Γ d'équation

$$\Gamma : x^2 + y^2 = 5$$

issues du point de coordonnées $A\left(\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.**Exercice 3.42** Calculer les équations cartésiennes des tangentes au cercle Γ d'équation

$$\Gamma : x^2 + y^2 = 19 - 2x$$

issues du point de coordonnées $A(1; 6)$.

Calculer ensuite les coordonnées des points de tangence.

Exercice 3.43 Calculer les équations cartésiennes des tangentes au cercle Γ d'équation

$$\Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$$

issues du point de coordonnées $P(6;5)$.

Exercice 3.44 Calculer les coordonnées du sommet D du triangle ABD connaissant $A(-15;-5)$, $B(1;7)$ et sachant que le cercle inscrit au triangle ABD est centré à l'origine.

Exercice 3.45 On trace les tangentes au cercle Γ d'équation $\Gamma : x^2 + y^2 = 6x - 2y - 5$ issue du point $E(4;-4)$. Calculer la longueur de la corde passant par les points de tangence.

Exercice 3.46 Soit le cercle Γ centré à l'origine et passant par le point de coordonnées $M(3;4)$. La tangente au cercle Γ au point M coupe l'axe des abscisses en un point P . On trace la droite joignant le point P au point de coordonnée $B(0;5)$. Elle recoupe le cercle Γ en un point A .
Faire un dessin de la situation, puis calculer l'aire du triangle OAB .

Exercice 3.47 On donne le point de coordonnées $C(0;9)$ et le cercle d'équation

$$\Gamma : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

- Calculer les coordonnées des sommets A et B du triangle ABC isocèle de sommet A sachant que Γ est le cercle inscrit du triangle ABC et que l'abscisse du point A est positive.
- Calculer les coordonnées des points de contact A' , B' et C' du cercle Γ avec les côtés BC , CA et AB respectivement.

5 Solutions

5.1 Réponses - Combinatoire

1.1 24 combinaisons

1.2 720 commandes

1.3 a) 2'340'000 b) 1'920'000 c) 2'300'030

1.4 $24 + 2880 = 2904$ programmes

1.5 a) 256 b) 64 c) 81 d) 108 e) 175 f) 24 g) 0 h) 4

1.6 a) $3! = 6$ c) $7! = 5040$ e) $\frac{12!}{4! \cdot 2!} = 9'979'200$
 b) $\frac{3!}{2} = 3$ d) $\frac{8!}{2!} = 20'160$ f) $\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650$

1.7 $3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 8! = 174'182'400$

1.8 $6 \cdot 30 = 180$

1.9 $4! = 24$

1.10 $3 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 + 1 = 90$ ou $120 - 4! - 3! = 90$

1.11 a) $\frac{9!}{9} = 40'320$ b) $2 \cdot \frac{8!}{8} = 10'080$ c) $40'320 - 10080 = 30'240$

1.12 a) $5! = 120$ b) $5! = 120$

1.13 a) $\frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$ b) $\frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = 2'520$

1.14 $4! = 24$

1.15 $3 \cdot \frac{4!}{2!} = 36$

1.16 a) $\frac{26!}{21!} = 7'893'600$ b) $26^5 = 11'881'376$

1.17 1680

1.18 $2^6 = 64$

1.19 5'040

1.20 6'720

1.21 a) 32'768

b) 6'720

1.22 a) 676

b) Au moins 677 habitants.

1.23 a) 6

b) 2

1.24 720

1.25 a) 4'080

b) 1

c) 6

d) 5

1.26 a) $2^{40} = \sim 1'099$ milliards

b) Parmi vos ancêtres, il y a des recoupements, ainsi plusieurs sont comptés à double (ou plus).

1.27 a) $\frac{36!}{30! \cdot 6!} = 1'947'792$

b) $\frac{32!}{30! \cdot 2!} = 496$

c) 1'041'600

1.28 a) 32

b) 1'008

c) 175'616

d) 31'776

1.29 Le nombre de tiercés non ordonnés sera $\frac{4'080}{6} = 680$.

1.30 $\frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3!} = 2'024$

1.31 $\frac{12 \cdot 11}{2!} = 66$

1.32 $\frac{9 \cdot 8}{2!} = 36$

1.33 $\frac{31 \cdot 30 \cdot 29}{3!} = 4495$. Oui, c'est vrai !

1.34 $\frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} = 252 \cdot 15 = 3'780$

1.35 a) $8'145'060$

b) $20 \cdot 9139 = 182'780$

c) 1

1.36 $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$

1.37 a) $2^{20} = 1'048'576$
b) 20

c) $\frac{20!}{4! \cdot 16!} = 4'845$

d) $\frac{20!}{10! \cdot 10!} = 184'756$
e) 1

1.38 a) 220

b) $1'320$

c) $1'728$

1.39 a) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

b) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

c) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

1.40 a) $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 340$

b) $4 + (4 \cdot 3) + (4 \cdot 3 \cdot 2) + (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 64$

1.41 a) $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 13'440$

b) $4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 5'376$

1.42 $3^{13} = 1'594'323$

1.43 $4! \cdot 5! = 2880$

1.44 a) $\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$

b) $\frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 40$

1.45 $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$

1.46 a) $8! = 40'320$

b) $2 \cdot 7! = 10'080$

c) $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1'152$

d) $4! \cdot 5! = 2'880$

e) $2^4 \cdot 4! = 384$

1.47 a) $\frac{12!}{9!} = 1320$

b) $\frac{12!}{9! \cdot 3!} = 220$

1.48 a) $C_2^3 \cdot C_3^3 = 3$
b) $6! = 720$

c) $\frac{6!}{2!} = 360$
d) $C_4^6 = 15$

e) $6^4 = 1296$
f) 72

1.49 a) $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$

b) $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$

c) $1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$

1.50 a) $C_8^{10} = 45$

b) $C_5^7 = 21$

c) $5 \cdot C_1^5 + C_2^5 = 35$

1.51 $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ chemins différents

1.52 a) $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$

b) $\frac{3!}{2!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 30$

1.53 $C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + 1 = 31$

1.54 a) $1 \cdot 9^3 + 3 \cdot 8 \cdot 9^2 = 2673$

b) $8 \cdot 9^3 = 5832$

c) $8 + 3 \cdot 9 = 35$

1.55 $16'777'216$ On l'appelle la palette à 16 millions de couleurs.

5.2 Réponses - Probabilités

2.1 a) $\frac{13}{500} = 0,026 = 2,6\%$

d) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

e) $\#U = 6 \cdot 6 = 36$

b) $\frac{66}{500} = 0,132 = 13,2\%$

f) $P(A) = \frac{1}{36} \approx 0,02778 = 2,778\%$

c) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

g) $P(B) = \frac{5}{36} \approx 0,13889 = 13,889\%$

2.2 a) $U = \{PP; PF; FP; FF\}$ oui

d) $U = \{1 \text{ et } 1; 1 \text{ et } 2; \dots; 1 \text{ et } 6; 2 \text{ et } 1; \dots; 2 \text{ et } 6; \dots; 6 \text{ et } 6\}$ oui

b) $U = \{PP; PF; FF\}$ non

c) $U = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ non

2.3 a) $U = \{P; F\}$

c) $P(\text{« deux fois pile »}) = \frac{1}{4} = 25\%$

b) $P(\text{« pile »}) = \frac{1}{2} = 50\%$

d) $P(\text{« pile au deuxième lancé »}) = \frac{1}{2} = 50\%$

2.4 $P(A) = \frac{4'845}{12'650} \approx 38,30\%$

2.5 a) $\frac{6840}{15'600} = \frac{57}{130} \approx 43,85\%$

c) $\frac{1}{15'600} \approx 0,0064\%$

b) $\frac{120}{15'600} = \frac{1}{130} \approx 0,77\%$

d) $\frac{6}{15'600} = \frac{1}{2600} \approx 0,038\%$

2.6 a) $\frac{144}{792} = \frac{2}{11} \approx 18,18\%$

b) $\frac{8}{792} = \frac{1}{99} \approx 1,01\%$

c) $1 - \frac{56}{792} = 1 - \frac{7}{99} = \frac{92}{99} \approx 92,93\%$

2.7 $P(A) = \frac{1}{8'145'060} \approx 0,000012\%$

2.8 a) $\frac{5'096}{54'740} \approx 9,31\%$

b) $\frac{37'820}{54'740} \approx 69,09\%$

c) $1 - \frac{37820}{54'740} \approx 30,90\%$

2.9 a) 25%

b) 29,55%

c) $1 - P(B) = 70,45\%$

2.10

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{10}{220} = \frac{1}{22} \approx 4,55\% & \text{c) } \frac{84}{220} = \frac{21}{55} \approx 38,18\% & \text{e) } \frac{164}{220} \approx 74,55\% \\ \text{b) } \frac{60}{220} = \frac{3}{11} \approx 27,27\% & \text{d) } \frac{34}{55} \approx 61,82\% & \text{f) } \frac{168}{220} = \frac{42}{55} \approx 76,36\% \end{array}$$

2.11

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{126}{376'992} = \frac{1}{2992} \approx 0,033\% & \text{f) } \frac{24}{376'992} = \frac{1}{15'708} \approx 0,0064\% \\ \text{b) } \frac{3024}{376'992} = \frac{3}{374} \approx 0,802\% & \text{g) } \frac{201'376}{376'992} \approx 53,42\% \\ \text{c) } \frac{252}{376'992} = \frac{1}{1496} \approx 0,067\% & \text{h) } 1 - \frac{201'376}{376'992} \approx 46,58\% \\ \text{d) } \frac{504}{376'992} = \frac{1}{748} \approx 0,134\% & \text{i) } \frac{345'216}{376'992} \approx 91,57\% \\ \text{e) } \frac{32}{376'992} = \frac{1}{11'781} \approx 0,0085\% & \text{j) } \frac{36'288}{376'992} = \frac{18}{187} \approx 9,63\% \end{array}$$

2.12

$$\begin{array}{ll} \text{a) } U = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\} & \\ \text{b) } A = \{PPP; PPF; PFP; PFF\} & \text{f) } A \cap B = \{PPP; PPF\} \\ \text{c) } B = \{PPP; PPF; FPP; FPF\} & \text{« pile sort en premier et face ne sort pas au deuxième lancer »} \\ \text{d) } C = \{FFP; FPF; PFF; FFF\} & \\ \text{e) } \bar{A} = \{FPP; FPF; FFP; FFF\} & \text{g) } A \cup B = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF\} \\ & \text{« pile sort en premier ou face ne sort pas au deuxième lancer »} \end{array}$$

2.13

$$\begin{array}{lll} \text{a) « les filles qui sont en 1re ou en 2e »} & \text{b) « les filles qui ne sont pas de nationalité suisse »} & \text{c) « les garçons suisses qui sont en 1re ou en 3e »} \end{array}$$

2.14

$$A \quad \boxed{B} \quad \boxed{\bar{A}} \quad \bar{B} \quad \boxed{A \cup B} \quad \boxed{\bar{A} \cup \bar{B}} \quad A \cap B \quad \bar{A} \cap \bar{B} \quad \boxed{\bar{A} \cap B} \quad A \cap \bar{B}$$

2.15 74%**2.16**

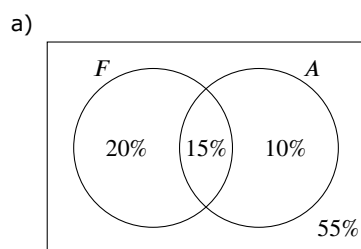
$$\begin{array}{lll} \text{a) } 86\% & \text{b) } 6\% & \text{c) } 4\% \end{array}$$

2.17

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 96\% & \text{c) } 69\% & \text{e) } 10\% \\ \text{b) } 4\% & \text{d) } 22\% & \text{f) } 54\% \end{array}$$

2.18

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 6 \text{ élèves n'ont choisi aucune de ces deux options.} & \text{b) } P = \frac{7}{15} \approx 46,67\% \end{array}$$

2.19

$$\begin{array}{ll} \text{b) } P(A \cap F) = 15\% & \\ \text{c) } P(F|A) = \frac{0,15}{0,25} = 60\% & \\ \text{d) } P(F|\bar{A}) = \frac{0,2}{0,75} \approx 26,67\% & \end{array}$$

2.20

a) $P(C \cap A) = 8\%$

b) $P(E \cap A) = 6\%$

c) $P(A) = 14\%$

d) $P(E|A) = \frac{0,06}{0,14} \approx 42,86\%$

e) $P(A|C) = 20\%$

2.21

a) $P(R) = \frac{3}{8} = 37,5\%$

b) $P(R|P) = \frac{1}{4} = 25\%$

2.22

a) $P(B|A) = \frac{1}{9}$

b) $P(A|C) = \frac{1}{2}$

c) $P(B|C) = \frac{1}{6}$

d) $P(C|B) = 1$

2.23

a) $P(V) = 23,96\%$

b) $P(-70|V) \approx 62,44\%$

c) $P(V|-70) = 17\%$

2.24

a) $P(A) = \frac{4}{8} = 50\%$

c) $P(A \cap B) = \frac{1}{8} = 12,5\%$

e) $P(B|A) = \frac{1}{4} = 25\%$

b) $P(B) = \frac{2}{8} = 25\%$

d) $P(A|B) = \frac{1}{2} = 50\%$

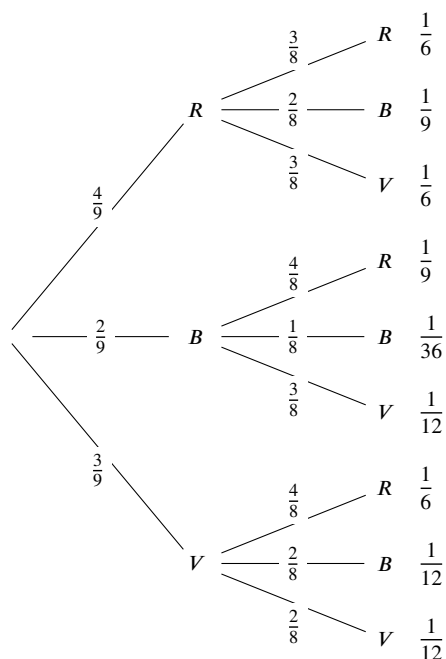
Les événements A et B sont indépendants.**2.25**

$P(G|V) = \frac{3}{30} = 10\% < P(G) = 20\%$

Ils ne sont pas indépendants.

2.26

$P(\overline{G \cup V}) = 100\% - (20\% + 30\% - 20\% \cdot 30\%) = 56\%$

2.27

a) $P(A) = \frac{1}{6} \approx 16,67\%$

b) $P(B) = \frac{1}{12} \approx 8,33\%$

c) $P(C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \approx \frac{2}{9} = 22,22\%$

2.28

$P(\ll \text{NNBB} \gg) = \frac{35}{768} \approx 4,56\%$

2.29

a) $P(A) = 49\% + 9\% = 58\%$

b) $P(B) = 49\%$

c) $P(C) = 49\% + 21\% + 9\% = 79\%$

2.30

a) -

c) $100\% - 2,16\% = 97,84\%$

b) $0,12 \cdot 0,18 = 2,16\%$

d) $9,84\% + 15,84\% = 25,68\%$

-
- 2.31** a) $P(A) = 30\%$ c) $P(C) = 50\%$ e) $P(E) = \frac{20}{70} \approx 28,57\%$
 b) $P(B) = 10\%$ d) $P(D) = 40\%$
-
- 2.32** a) $P(A) = 10\%$ c) $P(C) = 1 - (0,9)^3 = 27,1\%$
 b) $P(B) = (0,9)^5 \cdot 0,1 \approx 5,91\%$ d) 45 essais
-
- 2.33** a) $(0,6)^5 \cdot (0,4)^3 \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!} \approx 27,87\%$ b) $1 - (0,4)^8 \approx 99,93\%$ c) au moins 4 tirs
-
- 2.34** a) $48\% + 10\% = 58\%$ b) $\frac{0,12}{0,42} \approx 28,57\%$ c) 80%
-
- 2.35** a) $P(A \cap B) = \frac{3}{8} = P(A) \cdot P(B)$ b) $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \neq P(A) \cdot P(B)$
 Les deux événements sont indépendants. Les deux événements sont dépendants.
-
- 2.36** a) $\frac{21}{252} \approx 8,33\%$ b) $\frac{231}{252} \approx 91,67\%$
-
- 2.37** a) $\frac{1}{8} = 12,5\%$ c) $\frac{1}{8} + \frac{7}{20} = \frac{19}{40} = 47,5\%$ e) $\frac{121}{1600} \approx 7,56\%$
 b) $\frac{1}{10} + \frac{2}{8} = \frac{7}{20} = 35\%$ d) $\left(\frac{7}{20}\right)^3 \cdot \frac{13}{20} \cdot 4 \approx 11,15\%$
-
- 2.38** a) $\frac{6}{22} \approx 27,27\%$ b) $\frac{5}{13} \approx 38,46\%$ c) $\frac{3}{7} \approx 42,86\%$
-
- 2.39** a) $\frac{7}{400} + \frac{3}{2000} = \frac{19}{1000} = 1,9\%$ b) $\frac{\frac{7}{400}}{\frac{19}{1000}} = \frac{35}{38} \approx 92,11\%$ c) Il faut en remplacer 23.
-
- 2.40** $\frac{1050}{4845} \approx 21,67\%$
-

5.3 Réponses - Géométrie analytique

-
- 3.1** a) $O(0;0)$, $E_1(1;0)$ et $E_2(0;1)$ g) $\begin{vmatrix} 12 & -5 \\ -16 & \frac{20}{3} \end{vmatrix} = 0$ oui
 b) $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 51 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -48 \end{pmatrix}$ h) $7\overrightarrow{AC_u} = \begin{pmatrix} 21/5 \\ -28/5 \end{pmatrix}$ ou $-7\overrightarrow{AC_u} = \begin{pmatrix} -21/5 \\ 28/5 \end{pmatrix}$
 c) $\sqrt{2340} = 6\sqrt{65} \approx 48,37$ i) $\overrightarrow{AC_\perp} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ et $-\overrightarrow{AC_\perp} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$
 d) $M(-1;27)$ et $G\left(-\frac{1}{3};18\right)$ j) $\cos^{-1}\left(\frac{792}{\sqrt{2605 \cdot 400}}\right) \approx 39,1^\circ$
 e) $C(14;35)$ k) $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 12 \\ -51 & -16 \end{vmatrix} = 322$
 f) $\overrightarrow{AC} \bullet \vec{v} = \frac{500}{3} \neq 0$ non
-
- 3.2** a) $3x + 7y + 23 = 0$ b) $x - y - 9 = 0$ c) $x = 4$ d) $2x + y - 3 = 0$

3.3	parallèle	perpendiculaire	sécante	confondue
	a) oui		f) par ex. : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -48 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$	
	b) par ex. $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$		g) $3x - 5y + 19 = 0$	
3.4	c) $\delta(A; d) = \frac{ 15 + 30 - 6 }{\sqrt{34}} = \frac{39}{\sqrt{34}} \approx 6,68$		h) $5x + 3y - 25 = 0$	
	d) $\left(\frac{6}{5}; 0\right)$		i) $(-3; 7)$	
	e) $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) \simeq -59,0^\circ$		j) $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{170}}\right) \simeq 122,5^\circ$ et $\beta \simeq 180 - 122,5 = 57,5^\circ$	
3.5	$B(2; 7), C(5; 5), D(1; -1)$		Aire : 26	
3.6	a) $m_{AB} : x - 2y - 6 = 0$	c) $g_C : 6x - 7y - 31 = 0$	e) $\cos^{-1}\left(\frac{60}{\sqrt{80 \cdot 125}}\right) \simeq 53,13^\circ$	
	b) $h_A : x + 2y - 8 = 0$	d) 40		
3.7	a) g_C	d) d_{AB}	g) h_C	j) h_C
	b) d_{AB} et m_{AB}	e) g_C	h) d_{AB}	k) d_{AB}
	c) g_C	f) segment moyen parallèle à d_{AC}	i) d_{AB}	l) m_{AB} et d_{AB}
3.8	a) $m_{BC} \cap g_A = M_{BC}$	d) $m_{AB} \cap m_{AC} =$ centre du cercle circonscrit	g) $m_{BC} \cap d_{BC} = M_{BC}$	
	b) $d_{AB} \cap h_B = B$	e) $h_A \cap g_A = A$	h) $g_A \cap g_C = G$	
	c) $d_{AB} \cap h_C =$ pieds de la hauteur issue de C	f) $h_A \cap h_B =$ orthocentre		
3.9	$d_{BC} \cap d_{AC} = C(2; -4)$	$h_A : x + 2y - 9 = 0$	$d_{AC} \cap h_A = A(11; -1)$	$h_B : 3x + y + c = 0$
	$d_{BC} \cap h_B = B(6; 4)$	$d_{AB} : x + y - 10 = 0$		
3.10	$m_{AB} : 2x + y - 11 = 0$	$m_{BC} : x + 3y - 13 = 0$	$m_{AC} : 7x - 9y - 1 = 0$	$D(4; 3)$
	$h_A : 7x - 9y - 36 = 0$	$h_B : x + 3y - 18 = 0$	$h_C : 2x + y - 21 = 0$	$H(9; 3)$
	$d_{DH} : y = 3$	$G\left(\frac{17}{3}; 3\right)$ est aussi sur d_{GH} .		
	Cette droite est appelée la <i>droite d'Euler</i> du triangle ABC .			
3.11	$\frac{3x + 4y + 6}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm \frac{y + 6}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$	$3x + 4y + 6 = \pm 5(y + 6)$	$b_1 : 3x - y - 24 = 0 \perp b_2 : x + 3y + 12 = 0$	
3.12	a) $A(-2; 2)$	b) $b_{int} : x - y - 4 = 0$	$b_{ext} : x + y + 12 = 0$	

a) $b_A : y - 2 = 0$

$b_B : 2x + y - 12 = 0$

$b_C : 2x - y - 8 = 0$

b) $E(5; 2)$

3.13

c) $d_{AB} : 3x + 4y + 2 = 0$

$d_{BC} : x - 10 = 0$

$d_{AC} : 3x - 4y + 18 = 0$

$\delta(E; d_{AB}) = \frac{|15 + 8 + 2|}{\sqrt{25}} = 5$

$\delta(E; d_{BC}) = \frac{|5 - 10|}{\sqrt{1}} = 5$

$\delta(E; d_{AC}) = \frac{|15 - 8 + 18|}{\sqrt{25}} = 5$

 E est équidistant aux côtés du triangle. C'est donc le centre du cercle inscrit au triangle ABC .**3.14**

$M_{BC} \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right)$

$m_{BC} : 7x + 5y - 8 = 0$

$b_A : x + y - 3 = 0$

$h_A : 7x + 5y - 23 = 0$

$g_A : x + 5y + 1 = 0$

$g_C \cap m_{AB} = M_{AB}(4; -1)$

$d_{AB} : \text{perpendiculaire à } m_{AB} \text{ passant par } M_{AB} \Rightarrow d_{AB} : 2x + y - 7 = 0$

3.15

$h_A \cap d_{AB} = A(2; 3)$

$B(6; -5)$

$d_{BC} : \text{perpendiculaire à } h_A \text{ passant par } B \Rightarrow d_{BC} : 2x - y - 17 = 0$

$g_C \cap BC = C(11; 5)$

3.16

$x^2 + y^2 = 4$

3.17

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$

3.18

a) oui, $C(4; -1)$, $r = 3$

c) oui, $C(0; -2)$, $r = 1$

e) non

b) oui, $C(-1; 3)$, $r = \sqrt{5}$

d) oui, $C(3; 0)$, $r = 8$

f) non

3.19

a) oui, $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$, $C(1; -2)$, $r = 5$

e) non, $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -4$

b) non

f) oui, $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 17$, $C(-3; 2)$, $r = \sqrt{17}$

c) oui, $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 225$, $C(4; -3)$, $r = 15$

g) non

d) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$, $C(-2; 1)$, c'est un cercle-point

h) oui, $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $C\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $r = \frac{1}{2}$

3.20

a) $x^2 + y^2 = 49$

c) $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$

e) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$

b) $(x + 5)^2 + (y - 11)^2 = 16$

d) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

f) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$

3.21

a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

c) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$

b) $(x + 2)^2 + y^2 = 18$

ou $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$

3.22

$b_1 : x - y = 1$

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{81}{13}$

$b_2 : x + y = -15$

$(x + 8)^2 + (y + 7)^2 = \frac{25}{13}$

3.23

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

C'est l'équation du cercle circonscrit du triangle ABD .**3.24**

$b_1 : y = \frac{2}{3}$

Elle ne coupe pas l'axe Ox .

$b_2 : x = -1$

$(x + 1)^2 + y^2 = \frac{4}{25}$

3.25

B est en dehors du cercle.

distance cherchée = $\|\overrightarrow{BC}\| - \text{rayon} = 26 - 9 = 17$

-
- a) $C(3;2)$ et $r = \sqrt{5}$
 b) A est en-dehors du cercle, B est à l'intérieur et D est sur le cercle.
- 3.26** c) a est tangente au cercle. b est sécante. c et Γ sont disjoints.
 d) $C \cap a$: Un point d'intersection : $(1;3)$
 $C \cap b$: Deux points d'intersection : $(2;0)$ et $(5;3)$
 $C \cap c$: Il n'y a pas d'intersection.
-
- 3.27** a) sécants $(-1;-2)$ et $(2;1)$ b) tangents $(2;4)$ c) extérieurs
-
- 3.28** Intersection avec Ox : $(-12;0)$ et $(-3;0)$
 Intersection avec Oy : $(0;6)$ C'est un point de tangence.
-
- a) $C(6,6)$ d) $M(5,2)$
- 3.29** b) $x - 3y + 12 = 0$ e) $m_{AB} : 5x - 2y - 21 = 0$ $\left(x - \frac{21}{5}\right)^2 + y^2 = \frac{841}{25}$
 c) $2x + 5y - 20 = 0$ f) Ils sont donc tangents intérieurement.
-
- a) $C_2(-14;-6)$ est en dehors de Γ_1 .
- 3.30** b) $\Gamma_2 : (x+14)^2 + (y+6)^2 = 64$
 c) $\Gamma_3 : (x+14)^2 + (y+6)^2 = 324$
-
- 3.31** Les points d'intersection sont $(-2;6)$ et $(4;-2)$. Leur distance est de 10.
-
- a) $C_1(0;2), r_1 = \sqrt{5}$ $C_2(-2;8), r_2 = 5$ sécants $(-2;3)$ et $(1;4)$
 b) $C_1(1;2), r_1 = \sqrt{5}$ $C_2(-5;-1), r_2 = \sqrt{20}$ tangents extérieurement $(-1;1)$
3.32 c) $C_1(-1;1), r_1 = 2$ $C_2(3;2), r_2 = 1$ disjoints extérieurement
 d) $C_1(-1;1), r_1 = 3$ $C_2(0;2), r_2 = 1$ disjoints intérieurement
 e) $C_1(1;2), r_1 = 2$ $C_2(2;2), r_2 = 1$ tangents intérieurement $(3;2)$
 f) $C_1(1;2), r_1 = 3$ $C_2(2;3), r_2 = \sqrt{5}$ sécants $(1;5)$ et $(4;2)$
-
- 3.33** $t_1 : 3x + 4y - 20 = 0$ $t_2 : 3x + 4y = 0$
-
- 3.34** a) $t_1 : 2x + y - 1 = 0$ $t_2 : 2x + y + 19 = 0$ b) $t_1 : 2x + y + 5 = 0$ $t_2 : 2x + y - 5 = 0$
-
- 3.35** $t_2 : 4x - 3y + 38 = 0$ $t_3 : 4x - 3y - 12 = 0$
-
- 3.36** a) T sur le cercle b) $t : x + y - 1 = 0$
-
- 3.37** a) $t : x - 2y + 5 = 0$ b) $t : 3x - 4y + 43 = 0$ c) $t : 3x - 7y = 0$ d) $t : 2x - 5y + 12 = 0$
-

3.38 a) $t : x - 2y + 5 = 0$ b) $t : 3x - 4y + 43 = 0$ c) $t : 3x - 7y = 0$ d) $t : 2x - 5y + 12 = 0$

3.39 a) $t : 7x + 8y - 38 = 0$ b) $t : 5x + 3y - 13 = 0$

3.40 a) P est en dehors du cercle. b) $t_1 : 2x + y - 10 = 0$ c) $T_1(4; 2)$ et $T_2\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right)$
 $t_2 : 2x + 11y + 10 = 0$

3.41 $t_1 : x - 2y - 5 = 0$ $t_2 : 2x - y - 5 = 0$ Avez-vous vérifié la position de A ?

3.42 $t_1 : x - 2y + 11 = 0$ avec $T_1(-3; 4)$ $t_2 : 2x + y - 8 = 0$ avec $T_2(3; 2)$ Avez-vous vérifié la position de A ?

3.43 $t_1 : 12x - 35y + 103 = 0$ $t_2 : x = 6$ Avez-vous vérifié la position de P ?

3.44 équation du cercle inscrit : $x^2 + y^2 = 25$ $d_{AD} : y = -5$ $d_{BD} : 4x + 3y - 25 = 0$ $D(10; -5)$

3.45 $t_1 : x + 2y + 4 = 0$ et $t_2 : 2x - y - 12 = 0$ $T_1(2; -3)$ et $T_2(5; -2)$ $\sqrt{10}$

3.46 $A\left(\frac{75}{17}; \frac{40}{17}\right)$ aire : $\frac{375}{34}$

3.47 a) $A\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$ et $B(-6; -3)$ b) $A'(-3; 3)$, $B'\left(\frac{6}{5}; \frac{12}{5}\right)$ et $C'(0; 0)$

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch

sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 22 janvier 2024