

2M standard

# **Mathématiques**

## **2<sup>ème</sup> partie**

Sarah Delmonico

Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon



# Table des matières

|                                                                               |           |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Optimisation</b>                                                         | <b>3</b>  |
| <b>2 Géométrie analytique : les droites</b>                                   | <b>4</b>  |
| 2.1 Rappels de géométrie vectorielle . . . . .                                | 4         |
| 2.2 Équation vectorielle paramétrique de la droite . . . . .                  | 9         |
| 2.3 Équations cartésiennes de la droite . . . . .                             | 11        |
| 2.4 De l'équation cartésienne à l'équation vectorielle paramétrique . . . . . | 12        |
| 2.5 De l'équation vectorielle paramétrique à l'équation cartésienne . . . . . | 13        |
| 2.6 Vecteur normal . . . . .                                                  | 14        |
| 2.7 Méthode "rapide" pour trouver une équation cartésienne . . . . .          | 16        |
| 2.8 Position relative de deux droites et intersection . . . . .               | 17        |
| 2.9 Angle aigu orienté entre l'axe $Ox$ et une droite . . . . .               | 21        |
| 2.10 Angle aigu entre deux droites sécantes . . . . .                         | 21        |
| 2.11 Distance d'un point à une droite . . . . .                               | 22        |
| <b>3 Géométrie analytique : les lignes principales du triangle</b>            | <b>23</b> |
| 3.1 Médiatrice d'un segment . . . . .                                         | 23        |
| 3.2 Médianes d'un triangle . . . . .                                          | 24        |
| 3.3 Hauteurs d'un triangle . . . . .                                          | 25        |
| 3.4 Bissectrice d'un angle . . . . .                                          | 26        |
| <b>4 Fonctions et équations trigonométriques</b>                              | <b>30</b> |
| 4.1 Rappels : Rapports trigonométriques . . . . .                             | 30        |
| 4.2 Rappels : Degrés et radians . . . . .                                     | 31        |
| 4.3 Rappels : Angles particuliers . . . . .                                   | 32        |
| 4.4 Rappels : Propriétés . . . . .                                            | 33        |
| 4.5 Rappels : Résolution d'équations trigonométriques simples . . . . .       | 34        |
| 4.6 D'autres équations trigonométriques . . . . .                             | 35        |
| 4.7 Les fonctions trigonométriques . . . . .                                  | 37        |
| 4.8 Les dérivées de fonctions trigonométriques . . . . .                      | 41        |
| 4.9 Étude de la croissance de fonctions trigonométriques . . . . .            | 42        |
| 4.10 Calculs de limites par le théorème de Bernoulli-l'Hospital . . . . .     | 43        |
| 4.11 Étude de fonctions trigonométriques . . . . .                            | 45        |
| <b>5 Exponentielles</b>                                                       | <b>47</b> |
| 5.1 Introduction . . . . .                                                    | 47        |
| 5.2 Définition des fonctions exponentielles . . . . .                         | 48        |
| 5.3 Représentation graphique et propriétés . . . . .                          | 49        |
| 5.4 Équations exponentielles . . . . .                                        | 50        |
| <b>6 Logarithmes</b>                                                          | <b>52</b> |
| 6.1 Définition . . . . .                                                      | 52        |
| 6.2 Propriétés . . . . .                                                      | 53        |
| 6.3 Retour sur les équations exponentielles . . . . .                         | 54        |
| 6.4 Représentation graphique . . . . .                                        | 56        |
| 6.5 Équations logarithmiques . . . . .                                        | 57        |
| <b>7 Applications des exponentielles et des logarithmes</b>                   | <b>59</b> |
| 7.1 Les intérêts composés . . . . .                                           | 59        |
| 7.2 Processus de croissance et de décroissance . . . . .                      | 61        |
| 7.3 Décomposition d'une substance radioactive . . . . .                       | 63        |
| 7.4 pH . . . . .                                                              | 64        |
| 7.5 Échelle de Richter . . . . .                                              | 64        |

|                                                                                     |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>8 Exercices</b>                                                                  | <b>65</b> |
| 8.1 Optimisation . . . . .                                                          | 65        |
| 8.2 Géométrie analytique : les droites . . . . .                                    | 66        |
| 8.3 Géométrie analytique : les lignes principales du triangle . . . . .             | 75        |
| 8.4 Fonctions et équations trigonométriques . . . . .                               | 80        |
| 8.5 Exponentielles . . . . .                                                        | 88        |
| 8.6 Logarithmes . . . . .                                                           | 91        |
| 8.7 Applications des exponentielles et des logarithmes . . . . .                    | 94        |
| <b>9 Solutions</b>                                                                  | <b>97</b> |
| 9.1 Solutions - optimisation . . . . .                                              | 97        |
| 9.2 Solutions - Géométrie analytique : les droites . . . . .                        | 98        |
| 9.3 Solutions - Géométrie analytique : les lignes principales du triangle . . . . . | 104       |
| 9.4 Solutions - fonctions et équations trigonométriques . . . . .                   | 106       |
| 9.5 Solutions - exponentielles . . . . .                                            | 117       |
| 9.6 Solutions - logarithmes . . . . .                                               | 118       |
| 9.7 Solutions - applications des exponentielles et des logarithmes . . . . .        | 120       |

# 1 Optimisation

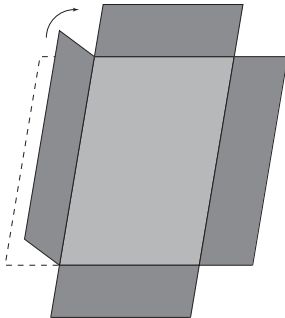
Comme nous l'avons vu dans la partie optimisation quadratique, les problèmes d'optimisation sont des problèmes où l'on cherche à déterminer quand une mesure sera maximum ou minimum.

Nous allons procéderons selon le plan ci-dessous :

- lire soigneusement tout le problème et effectuer éventuellement un croquis de la situation ;
- déterminer les variables avec leur unité et leur domaine de variation ;
- définir la quantité à optimiser avec son unité et l'exprimer en fonction des variables choisies ;
- écrire les équations liant les différentes variables ;
- substituer pour n'avoir plus qu'une seule variable dans la fonction ;
- étudier la croissance de cette fonction en se limitant au domaine de variation ;
- répondre en comparant les extremums trouvés avec les valeurs obtenues au bord du domaine de variation ;
- donner la réponse au problème à l'aide d'une phrase, sans oublier les unités.

**Exemple :** On souhaite construire une boîte en découpant un carré à chaque coin d'une feuille cartonnée, puis en rabattant les bords restants. La feuille mesure 22 cm de long et 18 cm de large.

Calculer la dimension des carrés qui donne la boîte avec le plus grand volume possible.

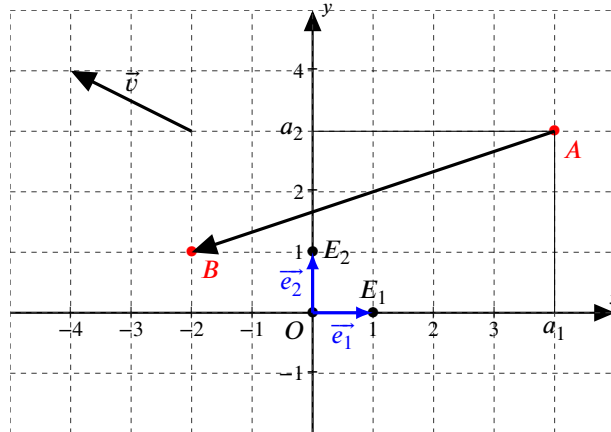


ex. 1.1 à 1.7

## 2 Géométrie analytique : les droites

### 2.1 Rappels de géométrie vectorielle

Soit  $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2)$  un repère cartésien et sa base associée  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  où  $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$  et  $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ .



Si  $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$ , alors  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  sont les **composantes du vecteur  $\vec{v}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$** .

Le vecteur  $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$  est le **vecteur opposé** à  $\vec{v}$ . Les vecteurs  $\vec{v}$  et  $-\vec{v}$  ont la même direction et la même norme mais leurs sens sont opposés.

On peut observer que  $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ .

Le vecteur  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est appelé **vecteur nul**.

Si  $\overrightarrow{OA} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$ , alors  $A(a_1; a_2)$  sont les **coordonnées du point A relativement au repère  $\mathcal{R}$** .  $a_1$  est appelée **l'abscisse** du point A et  $a_2$  son **ordonnée**.

$$A(a_1; a_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

#### Exemples :

a) Quelles sont les coordonnées des points A, B,  $E_1$ ,  $E_2$  et O représentés ci-dessus ?

b) Quelles sont les composantes des vecteurs  $\vec{v}$ ,  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  et  $\overrightarrow{AB}$  représentés ci-dessus ?

Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$  et  $k \in \mathbb{R}$ . On a défini les trois opérations suivantes :

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix} \quad k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

On peut observer qu'en additionnant un vecteur et son opposé on obtient le vecteur nul.

Les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont **colinéaires** si l'on peut les représenter sur une même droite ; ils ont la même direction.

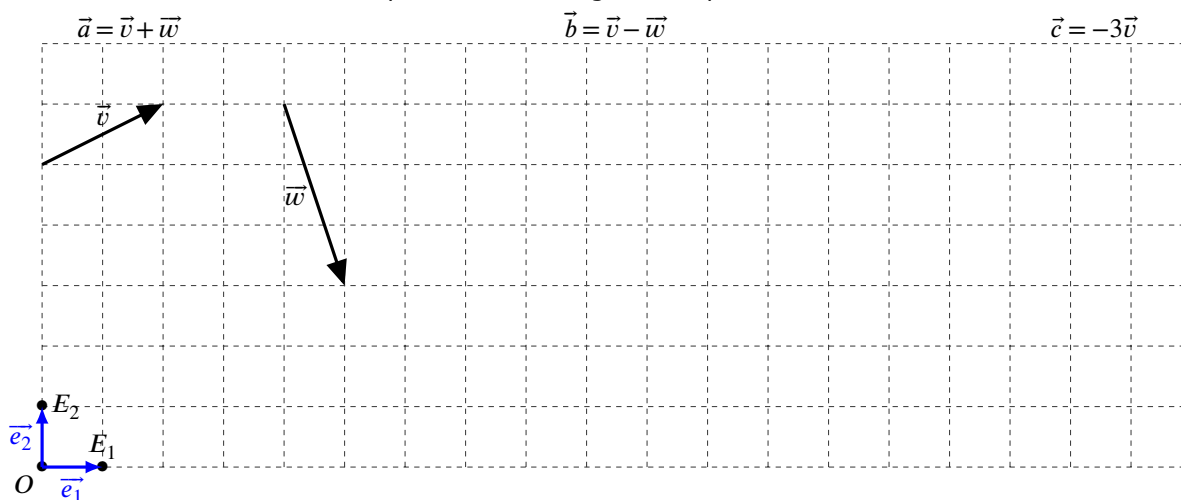
On admet que  $\vec{0}$  est colinéaire à tous les vecteurs.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont } \mathbf{colinéaires} \iff \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{w} = k\vec{v} \text{ ou } \vec{v} = k\vec{w}$ $\iff \det(\vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 = 0$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**L'aire du parallélogramme** formé par les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  se calcule avec  $|\det(\vec{v}; \vec{w})| = |v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1|$ . Pour obtenir l'aire du triangle, on divise ce résultat par 2.

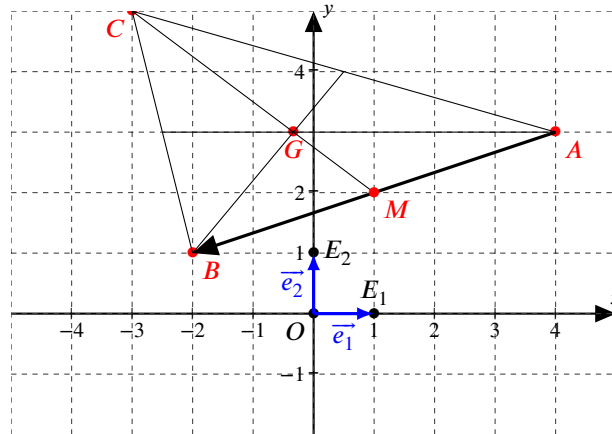
### Exemples :

- a) Trouver les vecteurs demandés par construction géométrique.



- b) Parmi les vecteurs ci-dessus, lesquels sont colinéaires ?
- c) Déterminer les composantes par calcul et comparer aux dessins obtenus.
- d) Dessiner le parallélogramme formé par les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  et calculer son aire.

e)  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$  est-il colinéaire à  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 68 \\ 102 \end{pmatrix}$  ?



Soit  $A(a_1; a_2)$  et  $B(b_1; b_2)$ , alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

et les coordonnées de  $M$  le point **milieu** du segment  $AB$  sont :

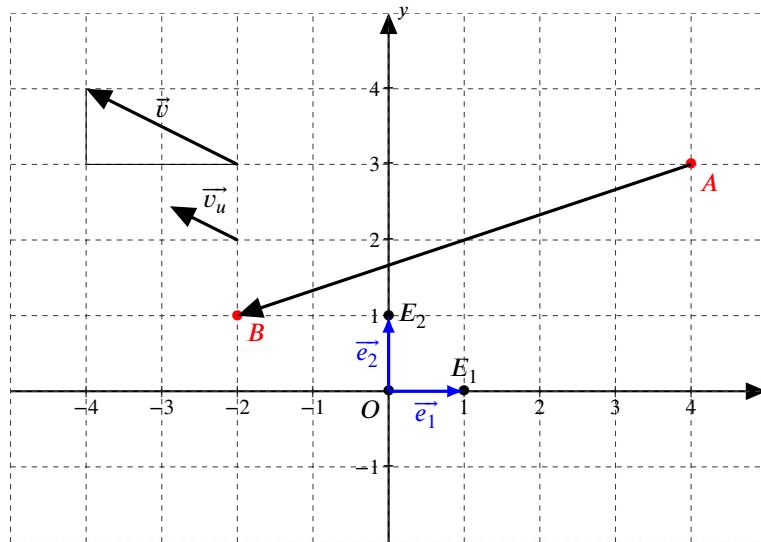
$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

Soit  $A(a_1; a_2)$ ,  $B(b_1; b_2)$  et  $C(c_1; c_2)$  les sommets d'un triangle. Les coordonnées de  $G$  son **centre de gravité** sont :

$$G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$$

### Exemples :

- Soit les points  $A(8; -5)$  et  $B(-3; 7)$  et  $M$  le milieu de  $AB$ . Calculer les composantes du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  et les coordonnées de  $M$ .
- Soit le point  $B(-4; 2)$  et le vecteur  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$ , calculer les coordonnées de  $A$ .
- Les points  $A(-60; -1)$ ,  $B(-10; -4)$  et  $C(10; 5)$  sont-ils alignés ?
- Soit les points  $A(-60; -1)$ ,  $B(-10; -4)$  et  $C(10; 5)$ . Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle  $ABC$ .



La **norme du vecteur**  $\vec{v}$  est la longueur de ses représentants. On la note  $\|\vec{v}\|$ .

$\|\overrightarrow{AB}\|$  est donc la distance entre deux points  $A$  et  $B$ . On la note  $\delta(A; B)$

On dit qu'un vecteur est **unitaire** si sa norme est égale à 1.

On note  $\vec{v}_u$  le vecteur unitaire de même direction et sens que  $\vec{v}$ .

$$\vec{v}_u = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$$

Dans un repère cartésien, soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ . On a :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

### Exemples :

a) Quelles sont les composantes du vecteur  $\vec{v}_u$  si  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$  ?

b) Quelle est la distance entre  $A(-18; 24)$  et  $B(-26; 30)$  ?

c) Quelles sont les coordonnées du point  $C$  situé à une distance de 2 depuis  $A(-18; 24)$  en direction de  $B(-26; 30)$  ?

Dans un repère cartésien, soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ . On note  $\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_\perp' = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ .

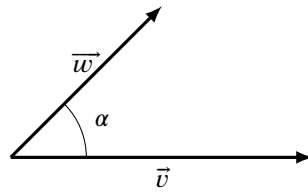
Les vecteurs  $\vec{v}_\perp$  et  $\vec{v}_\perp'$  sont perpendiculaires à  $\vec{v}$  et ont la même norme.

On appelle **produit scalaire de  $\vec{v}$  avec  $\vec{w}$** , noté  $\vec{v} \bullet \vec{w}$ , le nombre  $\vec{v} \bullet \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$ .

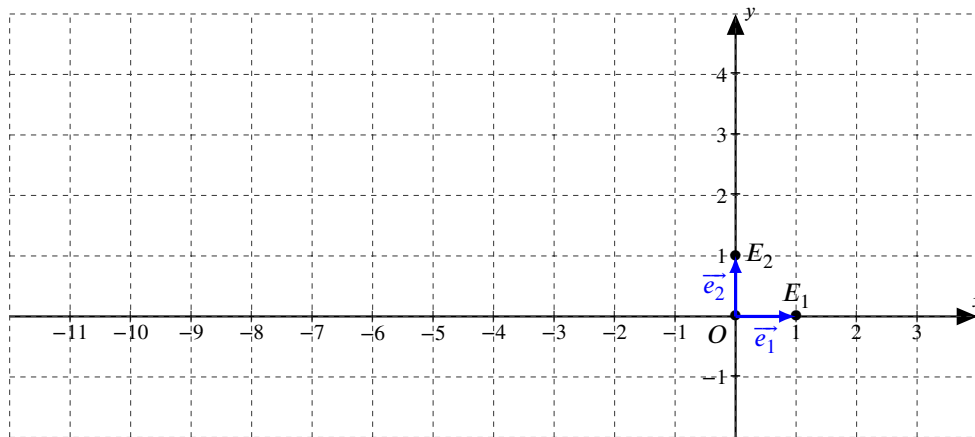
Si  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont des vecteurs non nuls,  $\vec{v}$  est **perpendiculaire** à  $\vec{w} \iff \vec{v} \bullet \vec{w} = 0$ .

Soit  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  des vecteurs non nuls et  $\alpha$  l'angle convexe formé par les deux vecteurs. On a :

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \cos(\alpha) \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$



### Exemples :



Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ainsi que les points  $A(-2; -1)$ ,  $B(1; 1)$  et  $C(-1; 4)$ .

- Représenter  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}_\perp$  et  $\vec{v}_\perp'$ .
- Représenter l'angle convexe entre  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  puis le calculer.
- Calculer l'angle  $BAC$  puis vérifier en représentant les points.
- Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

ex. 2.1

## 2.2 Équation vectorielle paramétrique de la droite

Une droite  $d$  est complètement définie si on connaît sa direction et un de ses points.

Un vecteur est appelé **vecteur directeur** de la droite  $d$  si on peut le représenter sur celle-ci.

Soit une droite  $d$  de vecteur directeur  $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$  et passant par un point  $A(a_1; a_2)$ .

Un point  $P(x; y)$  appartient à la droite  $d$  si et seulement si  $\exists k \in \mathbb{R}$  tel que  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ .

La droite  $d$  est ainsi définie par l'**équation vectorielle paramétrique**  $d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \forall k \in \mathbb{R}$ .

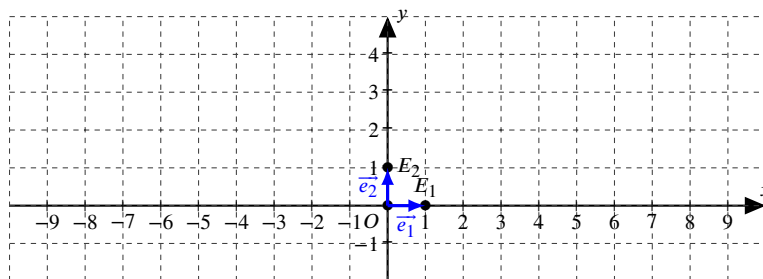
On peut aussi la noter sous forme de système :  $\begin{cases} x = a_1 + kd_1 \\ y = a_2 + kd_2 \end{cases} \forall k \in \mathbb{R}$ .

**Preuve :**  $P(x; y)$  appartient à la droite  $d \iff \overrightarrow{AP}$  et  $\vec{d}$  sont colinéaires  $\iff \exists k \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{AP} = k\vec{d}$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = k\vec{d} \iff \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\vec{d}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \#$$

**Exemple :**



a) Représenter la droite  $d$  qui a  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  comme vecteur directeur et qui passe par  $A(3; 2)$ .

b) Donner deux autres vecteurs directeurs de  $d$ .

c) Écrire l'équation paramétrique de  $d$  à l'aide de  $\vec{d}$  et  $A$ .

d) A l'aide de cette équation, calculer les coordonnées des points obtenus pour  $k=0$ ,  $k=1$ ,  $k=2$ ,  $k=-1$ ,  $k=-\frac{3}{2}$  et  $k=-\frac{5}{2}$  et les placer sur le dessin.

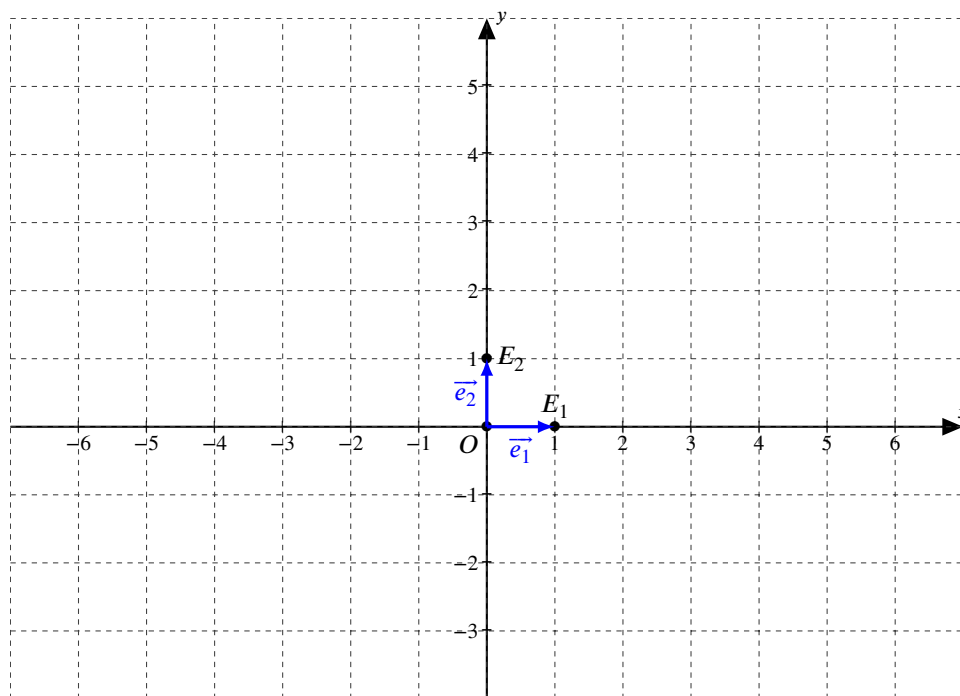
ex. 2.2 à 2.7

Une droite peut aussi être donnée par deux de ses points  $A(a_1; a_2)$  et  $B(b_1; b_2)$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur directeur de la droite  $d_{AB}$ .

**Exemple :**

- Écrire trois équations paramétriques différentes la droite  $d_{AB}$  qui passe par  $A(3; 1)$  et  $B(1; 4)$ .
- Vérifier algébriquement si le point  $C(7; -4)$  appartient à la droite  $d$ .
- Déterminer algébriquement les coordonnées du point d'intersection de  $d$  avec les axes.
- Vérifier graphiquement vos réponses.



ex. 2.8

## 2.3 Équations cartésiennes de la droite

Une **équation cartésienne** de la droite  $d$  est une condition, sans paramètre, sur les coordonnées  $x$  ou  $y$  pour que le point  $P(x; y)$  appartienne à la droite  $d$ .

Nous connaissons déjà les équations cartésiennes de la forme  $y = mx + h$  où  $m$  est la **pen**te et  $h$  est l'**or**-donnée à l'**origine** de la droite. Nous l'appellerons **l'équation cartésienne explicite**.

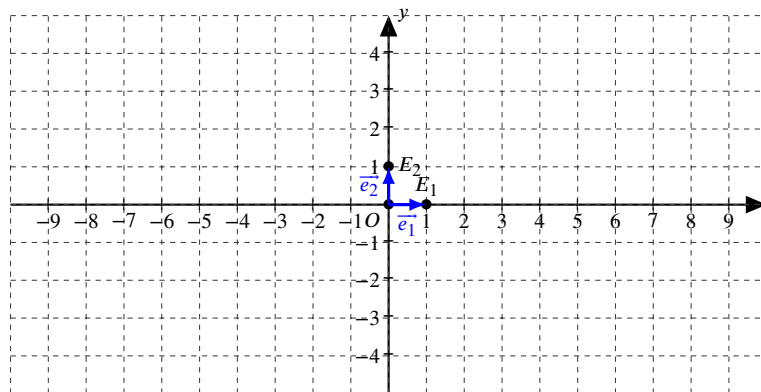
Cette équation permet de définir toutes les droites qui sont des graphes de fonctions affines. Elle ne permet donc pas de décrire les droites verticales.

De manière générale, on peut décrire les droites avec une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ avec } a \text{ ou } b \text{ non nul.}$$

On l'appelle équation cartésienne implicite. Lorsque c'est possible, elle devra être sous forme **canonique**, c'est-à-dire avec  $a$  positif et  $a, b, c$  des entiers les plus petits possibles.

**Exemples :**



Soit les droites données par les équations :

$$d_1 : y = -\frac{2}{3}x + 1 \quad d_2 : x - y + 4 = 0 \quad d_3 : x + 4y - 11 = 0 \quad d_4 : x = 5 \quad d_5 : y = -1$$

a) Vérifier si le point  $P\left(-\frac{21}{5}; \frac{19}{5}\right)$  appartient à l'une ou l'autre de ces droites.

b) Représenter ces cinq droites.

c) Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine de chacune de ces droites à partir de son équation.

d) Écrire l'équation cartésienne canonique de  $d_1$ .

ex. 2.9 à 2.14

## 2.4 De l'équation cartésienne à l'équation vectorielle paramétrique

Pour pouvoir écrire l'équation vectorielle paramétrique, il faut trouver un point et un vecteur directeur de la droite.

### Exemples :

a) Esquisser la droite  $d : y = 2x - 5$  et en déduire un de ses vecteurs directeurs.

b) Trouver un vecteur directeur de la droite  $d_1 : y = -\frac{2}{3}x + 1$  de la page précédente.

c) Donner une équation vectorielle paramétrique de  $d$ . Faire de même pour  $d_1$ .

La pente permet de trouver rapidement un vecteur directeur :

$$\text{pente} = m \quad \Leftrightarrow \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur}$$

$$\text{pente} = \frac{\Delta v}{\Delta h} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} \Delta h \\ \Delta v \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur}$$

Il est aussi possible de déterminer deux points  $A$  et  $B$  de la droite et d'utiliser le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  comme vecteur directeur.

**Exemple :** Trouver deux points de la droite  $d : 3x + 2y - 12 = 0$  et donner une équation vectorielle paramétrique de cette droite.

ex. 2.15 à 2.16

## 2.5 De l'équation vectorielle paramétrique à l'équation cartésienne

Pour pouvoir écrire l'équation cartésienne explicite, il faut trouver la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite.

La pente se trouve à l'aide du vecteur directeur :

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \Delta h \\ \Delta v \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{pente} = \frac{\Delta v}{\Delta h}$$

L'ordonnée à l'origine se trouve en trouvant le paramètre  $k$  qui donne une abscisse nulle.

**Exemple :** Soit la droite donnée par  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{R}.$

- a) Déterminer sa pente.
- b) Déterminer son ordonnée à l'origine.
- c) Donner l'équation cartésienne explicite de cette droite.
- d) Donner l'équation cartésienne canonique de cette droite.

Une autre manière d'obtenir une équation cartésienne d'une droite donnée par son équation vectorielle paramétrique est d'écrire le système d'équations et d'éliminer le paramètre par combinaison linéaire.

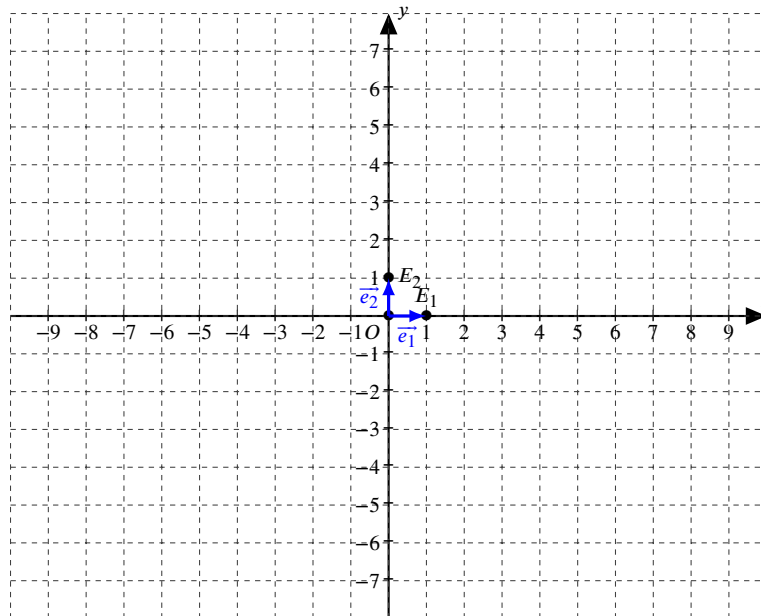
**Exemple :** Tester cette méthode sur l'exemple précédent.

ex. 2.17 à 2.19

## 2.6 Vecteur normal

Le vecteur  $\vec{d}_\perp$  est appelé **vecteur normal** à la droite  $d$  s'il est perpendiculaire au vecteur directeur de  $d$ .

**Exemple :** Représenter la droite  $d : 3x + 2y - 6 = 0$  et trois vecteurs normaux à cette droite. Donner leurs composantes.



$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } ax + by + c = 0 \text{ est une équation de } d \iff \vec{d}_\perp = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } d$$

**Preuve :** • si  $b \neq 0$ ,

$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } ax + by + c = 0 \text{ est une équation de } d \iff \exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \text{ est une équation de } d$

$\iff -\frac{a}{b}$  est la pente de la droite  $d \iff \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $d$

$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $d$

• si  $b = 0$ , alors  $a \neq 0$

$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } ax + c = 0 \text{ est une équation de } d \iff \exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = -\frac{c}{a} \text{ est une équation de } d$

$\iff$  la droite est verticale  $\iff \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $d$  #

**Exemples :**

a) Donner un vecteur normal à la droite d'équation  $d : 5x - 3y + 10 = 0$ .

b) Donner une équation vectorielle paramétrique de  $d$ .

c) Donner un vecteur normal à la droite d'équation  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ .

d) Donner un vecteur normal à la droite d'équation  $d' : y = 4x - 1$ .

e) Donner un vecteur normal à la droite passant par  $A(3;1)$  et  $B(1;4)$ .

|                 |
|-----------------|
| ex. 2.20 à 2.22 |
|-----------------|

## 2.7 Méthode "rapide" pour trouver une équation cartésienne

L'utilisation du vecteur normal permet de trouver rapidement une équation cartésienne si la droite est donnée par sa direction et un point ou par deux points.

On trouve d'abord le vecteur normal, ce qui nous permet d'écrire l'équation cartésienne avec ses premiers coefficients. Le dernier coefficient se trouve algébriquement en utilisant les coordonnées d'un point connu.

**Exemples :** Tester cette méthode sur les exemples ci-dessous.

a) La droite passant par  $A(1;8)$  et ayant  $\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$  pour vecteur directeur.

b) La droite passant par  $A(3;1)$  et  $B(1;4)$ .

c) La droite  $p$  perpendiculaire à  $d : x + 4y - 8 = 0$  et passant par  $A(1;8)$ .

|                 |
|-----------------|
| ex. 2.23 à 2.26 |
|-----------------|

## 2.8 Position relative de deux droites et intersection

**Exemples :** Trouver l'équation cartésienne canonique des droites ci-dessous.

a) La droite  $p$  parallèle à  $d : 3x + 2y - 8 = 0$  et passant par  $A\left(1; \frac{1}{20}\right)$ .

b) La droite  $p'$  parallèle à  $d : 3x + 2y - 8 = 0$  et passant par  $B(2; 1)$ .

c) Comparer les équations de  $d$ ,  $p$  et  $p'$ . Expliquer vos observations.

d) Utiliser ces observations pour déterminer l'équation cartésienne canonique de la droite  $p''$  parallèle à  $d : 3x + 2y - 8 = 0$  et passant par  $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ .

ex. 2.27 à 2.29

Lorsqu'on étudie la position relative de deux droites, on détermine si elles sont **confondues**, **parallèles** ou **sécantes**. Si elles sont sécantes, on précise si elles sont **perpendiculaires** ou non.

Si **les pentes sont égales** ou si **les vecteurs directeurs sont colinéaires** ou si **les vecteurs normaux sont colinéaires**, alors les droites sont confondues ou parallèles. Sinon elles sont sécantes.

Pour différencier les droites parallèles de celles qui sont confondues, on peut, par exemple, comparer les ordonnées à l'origine. On peut aussi comparer les équations cartésiennes canoniques.

**Exemples :** Étudier la position relative des droites ci-dessous.

a)  $d : y = 3x - 5$  et  $d' : y = 3x + 5$

b)  $d : 12x + 40y - 5 = 0$  et  $d' : 3x + 10y - 1 = 0$

c)  $d : 12x + 40y - 4 = 0$  et  $d' : 3x + 10y - 1 = 0$

**Exemples :**

a) Trouver les équations cartésiennes explicite et canonique de la droite  $p$  perpendiculaire à  $d : y = 4x + 1$  et passant par  $A\left(5; -\frac{1}{3}\right)$ .

b) Comparer les équations cartésiennes explicites de  $d$  et  $p$ . Expliquer vos observations.

c) Comparer les équations cartésiennes canoniques de  $d$  et  $p$ . Expliquer vos observations.

Pour reconnaître les droites perpendiculaires, on peut vérifier si **les vecteurs directeurs sont perpendiculaires** grâce au **produit scalaire**. Cela fonctionne aussi en utilisant les **vecteurs normaux**.

De plus, on a :

$$y = mx + h \text{ est perpendiculaire à } y = m'x + h' \iff m' = -\frac{1}{m} \iff m \cdot m' = -1$$

**Preuve :**  $y = mx + h$  est perpendiculaire à  $y = m'x + h'$   $\iff \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$  est perpendiculaire à  $\begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$

$$\iff 1 + m \cdot m' = 0 \iff m \cdot m' = -1 \iff m' = -\frac{1}{m} \quad \#$$

**Exemples :** Montrer que les droites ci-dessous sont sécantes, puis perpendiculaires.

a)  $d : 12x + 40y - 8 = 0$  et  $d' : 30x - 9y - 35 = 0$

b)  $d : y = \frac{5}{3}x - 1$  et  $d' : y = -\frac{3}{5}x + 9$

ex. 2.30 à 2.32

Pour calculer les **coordonnées du point d'intersection** de deux droites données par des équations cartésiennes, il faut résoudre le **système formé par ces deux équations**.

**Exemples :** Étudier la position relative des droites. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection.

a)  $d : y = -3x - 1$  et  $d' : 2x - 6y + 9 = 0$

b)  $d : 10x - 8y + 7 = 0$  et  $d' : 5x - 4y - 6 = 0$

c)  $d : x + 3y - 12 = 0$  et  $d' : y = -\frac{1}{3}x + 4$

Si les droites sont parallèles, le système n'a pas de solution.

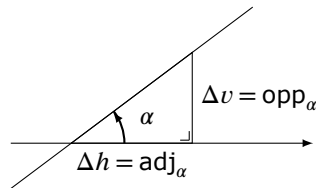
Si les droites sont confondues, le système est indéterminé.

Si les droites sont sécantes, le système a une unique solution : les coordonnées du point d'intersection.

|                 |
|-----------------|
| ex. 2.33 à 2.36 |
|-----------------|

## 2.9 Angle aigu orienté entre l'axe $Ox$ et une droite

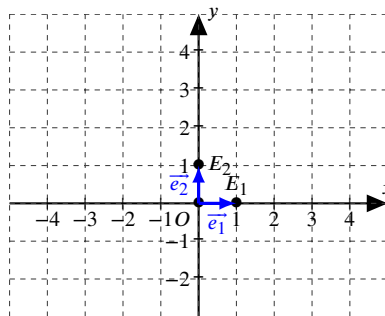
L'angle aigu orienté  $\alpha$  entre l'axe  $Ox$  et une droite  $d$  se calcule grâce à la pente  $m$  :  $m = \tan(\alpha)$ .



Il est positif si la pente est positive, donc si la droite "monte".

Il est négatif si la pente est négative, donc si la droite "descend".

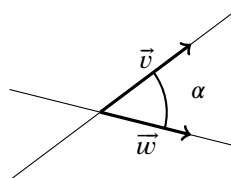
**Exemples :** Représenter et calculer l'angle aigu entre l'axe  $Ox$  et les droites  $d : x - y + 2 = 0$  et  $d' : y = -\frac{3}{2}x + 4$ .



## 2.10 Angle aigu entre deux droites sécantes

L'angle aigu  $\alpha$  entre deux droites se trouve en calculant l'angle entre les vecteurs directeurs grâce à la formule :

$$|\vec{v} \bullet \vec{w}| = \cos(\alpha) \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$



Les valeurs absolues permettent d'avoir l'angle aigu et non l'angle obtus.

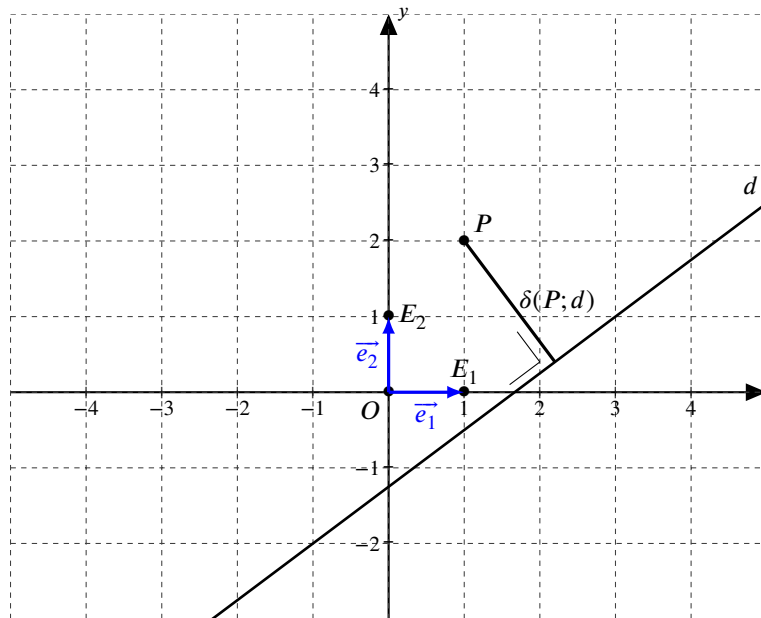
**Exemple :** Calculer l'angle aigu entre les droites  $d : x - y + 2 = 0$  et  $d' : y = -\frac{3}{2}x + 4$  et vérifier sur le dessin ci-dessus.

ex. 2.38

## 2.11 Distance d'un point à une droite

La distance  $\delta(P; d)$  entre un point  $P(p_1; p_2)$  et une droite  $d : ax + by + c = 0$  se trouve grâce à la formule :

$$\delta(P; d) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



**Exemple :** Calculer la distance de  $P(1; 2)$  à la droite  $d : 3x - 4y - 5 = 0$ .

**Preuve :** Appelons  $A(a_1; a_2)$  l'intersection de  $d$  avec l'axe  $Oy$  et  $\alpha$  l'angle aigu entre  $\overrightarrow{AP}$  et  $\overrightarrow{d}_\perp$ .

$$a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad ba_2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad A\left(0; -\frac{c}{b}\right)$$

$$\text{On a } \cos(\alpha) = \frac{\delta(P; d)}{\|\overrightarrow{AP}\|}.$$

Comme  $\alpha$  est l'angle aigu entre  $\overrightarrow{AP}$  et  $\overrightarrow{d}_\perp$ , on a :

$$|\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{d}_\perp| = \left| \overrightarrow{AP} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right| = \|\overrightarrow{AP}\| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(\alpha) = \|\overrightarrow{AP}\| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{\delta(P; d)}{\|\overrightarrow{AP}\|} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \delta(P; d)$$

$$\text{On en déduit que } \delta(P; d) = \frac{\left| \overrightarrow{AP} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 + \frac{c}{b} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \#$$

ex. 2.39 à 2.40

### 3 Géométrie analytique : les lignes principales du triangle

#### 3.1 Médiatrice d'un segment

La **médiatrice du segment**  $AB$ , notée  $m_{AB}$ , est la droite perpendiculaire à  $AB$  passant par  $M$  le milieu de  $AB$ .

Elle a aussi les propriétés suivantes :

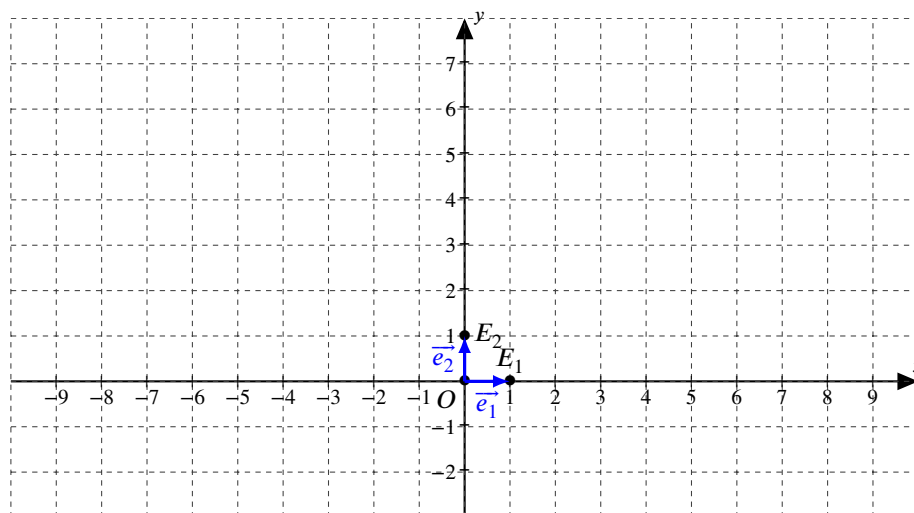
- C'est l'axe de symétrie du segment  $AB$ .
- $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$  pour tout point  $P$  de la médiatrice.
- C'est le lieu géométrique des centres des **cercles passant par  $A$  et  $B$** .
- L'intersection des médiatrices d'un triangle  $ABC$  donne le centre du **cercle circonscrit**, c'est-à-dire le cercle passant par  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

**Exemple :** Soit  $A(-4;3)$  et  $B(2;1)$ .

a) Calculer les coordonnées de  $M$  le milieu du segment  $AB$ . Vérifier sur la représentation graphique.

b) Donner une équation cartésienne de la médiatrice  $m_{AB}$  du segment  $AB$ . Vérifier sur la représentation graphique.

c) Mettre en évidence les propriétés de la médiatrice sur le dessin.



ex. 3.1 à 3.3

### 3.2 Médianes d'un triangle

Soit  $ABC$  un triangle.

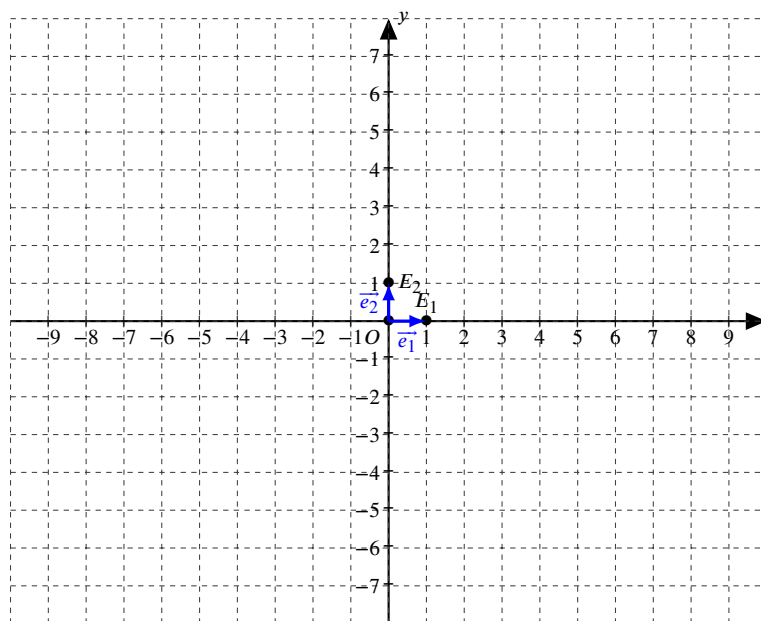
La **médiane issue de  $A$** , notée  $g_A$ , est la droite passant par  $A$  et  $M$  le milieu de  $BC$ .

Elle a aussi les propriétés suivantes :

- Une médiane partage le triangle en deux parties d'aires égales.
- L'intersection des médianes du triangle est  $G$  le **centre de gravité** du triangle  $ABC$ .
- $\|\overrightarrow{AG}\| = \frac{2}{3} \|\overrightarrow{AM}\|$

**Exemple :** Soit  $A(-4;8)$ ,  $B(3;6)$  et  $C(-8;-2)$ .

- Déterminer les coordonnées de  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ .
- Donner une équation cartésienne de la médiane  $g_A$  issue de  $A$ , en utilisant les coordonnées de  $G$ . Vérifier graphiquement.
- Donner une équation cartésienne de la médiane  $g_B$  issue de  $B$ , sans utiliser les coordonnées de  $G$ . Vérifier graphiquement.



ex. 3.4 à 3.7

### 3.3 Hauteurs d'un triangle

Soit  $ABC$  un triangle.

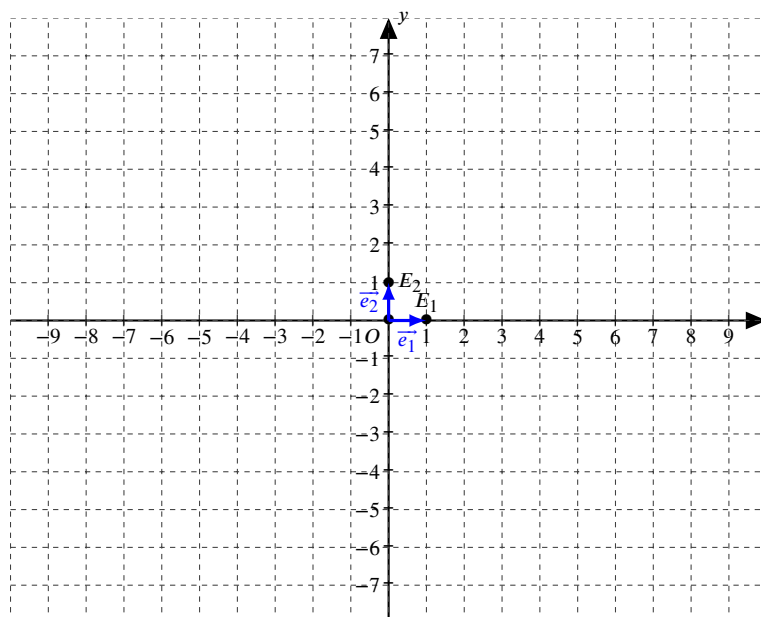
La **hauteur issue de  $A$** , notée  $h_A$ , est la droite perpendiculaire au côté  $BC$  passant par  $A$ .

L'intersection des hauteurs du triangle est l'**orthocentre** du triangle  $ABC$ .

**Exemple :** Soit  $A(0;7)$ ,  $B(2;1)$  et  $C(-7;-7)$ .

a) Donner une équation cartésienne de la hauteur  $h_A$  issue de  $A$ . Vérifier graphiquement.

b) Donner une équation cartésienne de la hauteur  $h_B$  issue de  $B$ . Vérifier graphiquement.



ex. 3.8 à 3.12

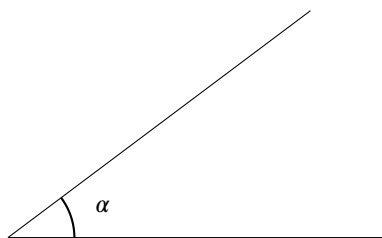
### 3.4 Bissectrice d'un angle

La **bissectrice d'un angle**  $\alpha$  est la droite qui partage l'angle en deux angles isométriques.

Elle a aussi les propriétés suivantes :

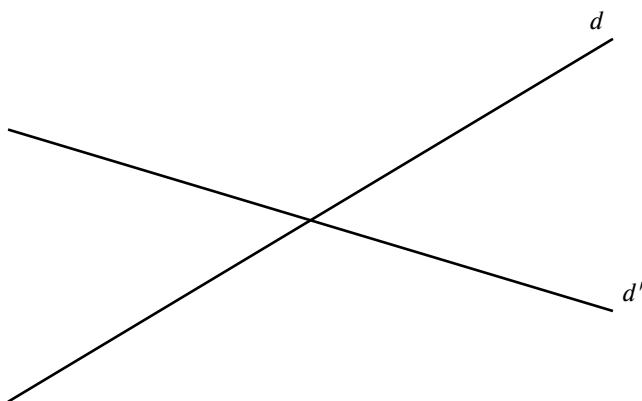
- C'est l'axe de symétrie de l'angle.
- Si  $a$  et  $b$  sont les côtés de l'angle,  $\delta(P; a) = \delta(P; b)$  pour tout point  $P$  de la bissectrice.
- C'est le lieu géométrique des centres des **cercles tangents à  $a$  et  $b$** .
- L'intersection des bissectrices d'un triangle  $ABC$  donne le centre du **cercle inscrit**, c'est-à-dire le cercle tangent à tous les côtés du triangle.

**Exemple :** Construire la bissectrice de cet angle et mettre en évidence les propriétés de la bissectrice sur le dessin.



On appelle **bissectrices des droites  $d$  et  $d'$**  les deux bissectrices des angles formés par  $d$  et  $d'$ .

**Exemple :** Construire les bissectrices des droites ci-dessous. Que peut-on observer ?

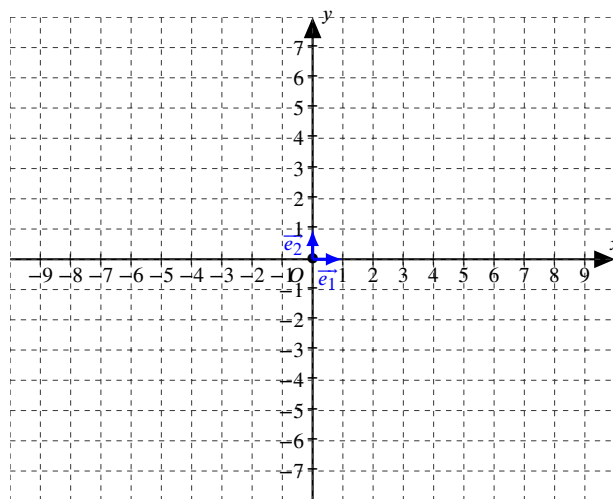


Pour déterminer les équations des bissectrices des droites  $d : ax + by + c = 0$  et  $d' : a'x + b'y + c' = 0$ , on utilise la propriété qui dit que  $\delta(P; d) = \delta(P; d')$  si  $P$  est sur une des bissectrice de  $d$  et  $d'$ . On part de l'équation ci-dessous :

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

**Exemple :** Déterminer les équations des bissectrices des droites  $d : 3x + 4y + 2 = 0$  et  $d' : 5x + 12y + 1 = 0$ .

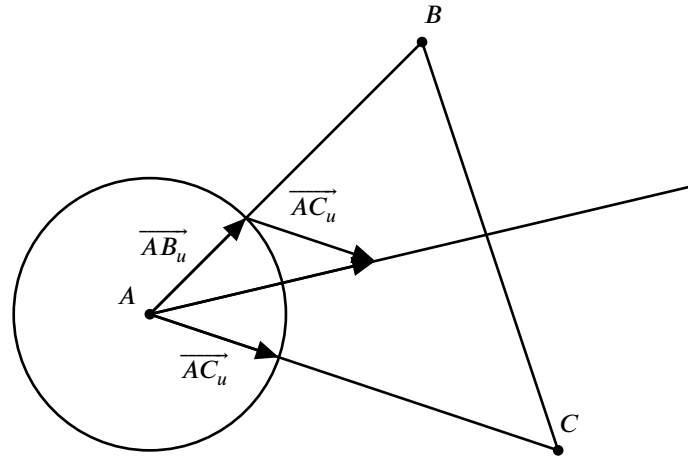
**Exemple :** Déterminer l'équation de la bissectrice intérieure de l'angle BAC du triangle  $ABC$  avec  $A(-4;-1)$ ,  $B(4;-1)$  et  $C(4;5)$ .



Pour **reconnaître les bissectrices intérieures**, un dessin est indispensable. Il permet de choisir les droites avec les bonnes pentes car pour chaque sommet on obtient une bissectrice de pente positive et une de pente négative.

Il est également possible de trouver les équations des bissectrices intérieures d'un triangle en utilisant l'observation suivante :

En additionnant un vecteur unitaire de  $d_{AB}$  avec un vecteur unitaire de  $d_{AC}$ , on obtient un vecteur directeur d'une bissectrice en  $A$ . Pour avoir la bissectrice intérieure, il faut prendre les vecteurs unitaires de même sens que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .



**Exemple :** A l'aide de cette méthode, déterminer l'équation de la bissectrice intérieure de l'angle BAC du triangle  $ABC$  avec  $A(-4;-1)$ ,  $B(4;-1)$  et  $C(4;5)$ .

ex. 3.13 à 3.14

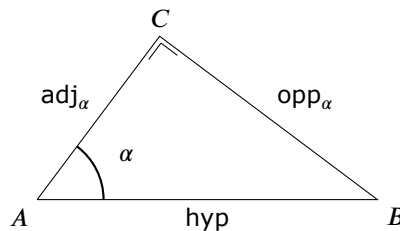
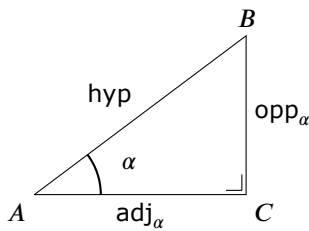
ex. 3.15 à 3.23

## 4 Fonctions et équations trigonométriques

### 4.1 Rappels : Rapports trigonométriques

Pour définir les rapports trigonométriques, nous avons procédé en deux temps.

Tout d'abord, nous avons défini le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle aigu, grâce aux triangles rectangles.

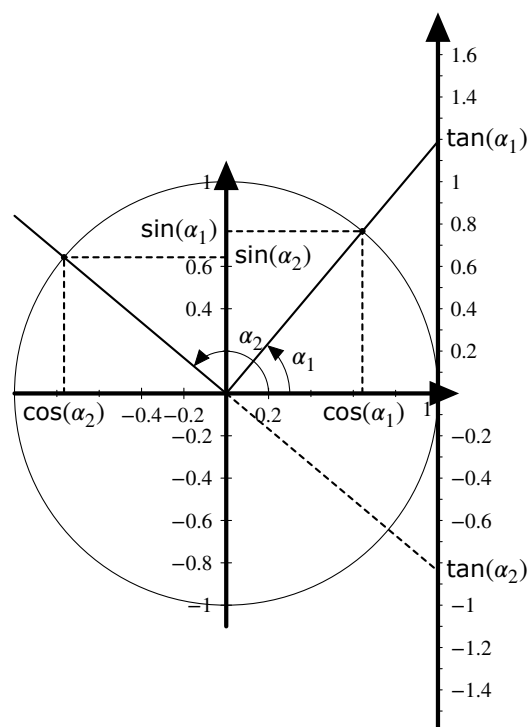


$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opp}_\alpha}{\text{hyp}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adj}_\alpha}{\text{hyp}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opp}_\alpha}{\text{adj}_\alpha}$$

Puis, nous avons donné une définition plus générale grâce au **cercle trigonométrique** (cercle de rayon 1, avec les axes gradués tels que ci-dessous), qui permet de définir le sinus, le cosinus et la tangente de tout angle, pas seulement des angles aigus. Pour ces derniers, les deux définitions sont équivalentes.



#### Remarques :

Cette définition induit que  $\cos(\alpha)$  et  $\sin(\alpha)$  donnent des valeurs comprises entre  $-1$  et  $1$ .

Par contre,  $\tan(\alpha)$  n'a pas de limitations.

Quelles sont les valeurs interdites de la fonction  $\tan$  ?

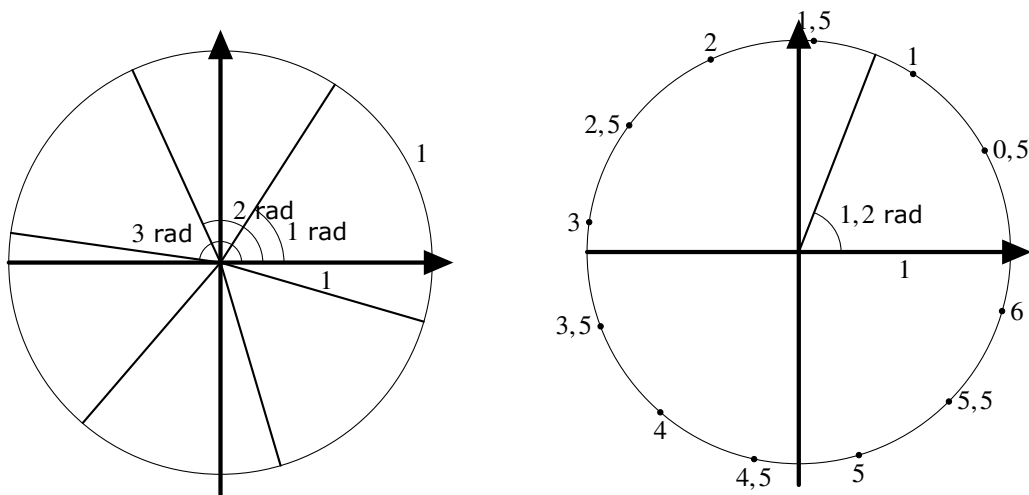
ex. 4.1

## 4.2 Rappels : Degrés et radians

Les angles peuvent être mesurés en degrés ou en radians.

La **mesure d'un angle en radians** est égale à la mesure de la longueur de l'arc du cercle trigonométrique intercepté par cet angle.

On peut donc obtenir un rapporteur en graduant le cercle à l'aide de l'unité de longueur.



La formule du périmètre du cercle implique que :  $180^\circ \equiv \pi \text{ rad}$ .

Cette équivalence permet, par proportionnalité, de transformer des mesures d'angles, de degrés en radians, et vice-versa.

### Exemples :

a) Transformer 2,5 rad en degrés et vérifier sur le rapporteur ci-dessus.

b) Transformer  $200^\circ$  en radians et vérifier sur le rapporteur ci-dessus.

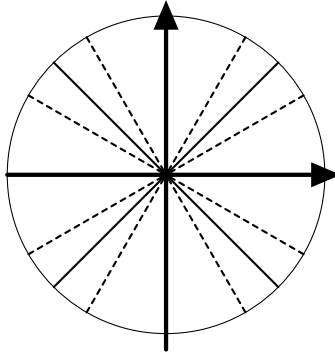
**Remarque :** Les mesures d'angles en radians sont souvent données sous forme de fractions de  $\pi$ .

**Exemples :** Compléter les tableaux ci-dessous en donnant les radians sous forme de fractions de  $\pi$ .

|         |           |            |            |             |             |            |             |
|---------|-----------|------------|------------|-------------|-------------|------------|-------------|
| radians |           |            |            |             |             |            |             |
| degrés  | $0^\circ$ | $45^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $270^\circ$ | $20^\circ$ | $400^\circ$ |

|         |                 |                 |                  |                  |                  |                   |                    |
|---------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|--------------------|
| radians | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{7\pi}{9}$ | $\frac{5\pi}{10}$ | $\frac{11\pi}{18}$ |
| degrés  |                 |                 |                  |                  |                  |                   |                    |

Noter les angles sur ce rapporteur, en degrés puis en radians sous forme de fractions de  $\pi$ .

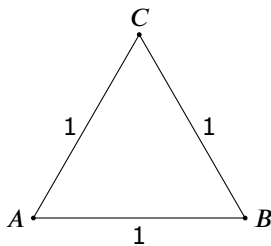


ex. 4.2 à 4.3

### 4.3 Rappels : Angles particuliers

A l'aide des triangles particuliers, il est possible de calculer la valeur exacte des rapports trigonométriques de certains angles, notamment  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $45^\circ$ .

- Calculer et justifier en utilisant le triangle équilatéral dont les côtés mesurent 1.



$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

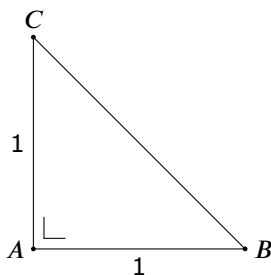
$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$

- Calculer et justifier en utilisant le triangle isocèle rectangle dont les cathètes mesurent 1.

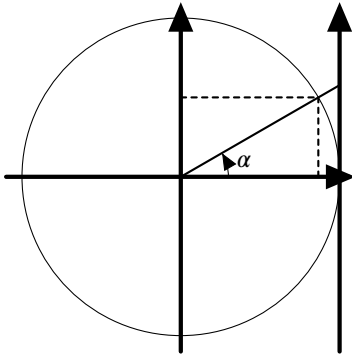


$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

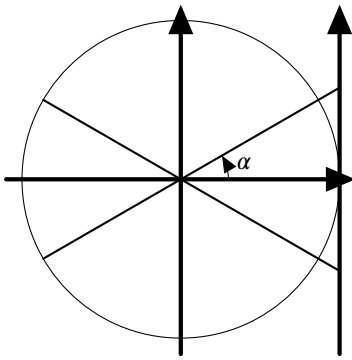
#### 4.4 Rappels : Propriétés



$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

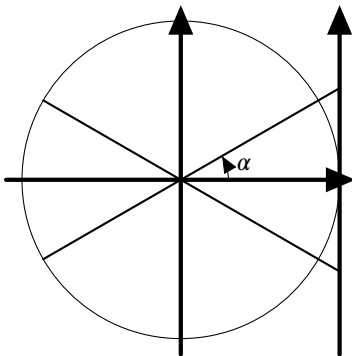
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

**Exemple :** Calculer  $\sin(\alpha)$  et  $\tan(\alpha)$ , sachant que  $\cos(\alpha) = 0,8$ .



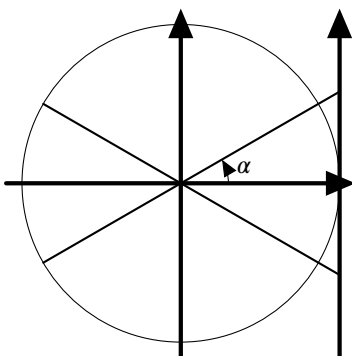
$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha) = -\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\pi + \alpha)$$

**Exemple :** Déterminer  $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$  sans calculatrice.



$$\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = -\sin(\pi + \alpha)$$

**Exemple :** Déterminer  $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$  sans calculatrice.



$$\tan(\alpha) = \tan(\pi + \alpha) = -\tan(-\alpha) = -\tan(\pi - \alpha)$$

**Exemple :** Déterminer  $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$  sans calculatrice.

ex. 4.4 à 4.8

## 4.5 Rappels : Résolution d'équations trigonométriques simples

Une équation trigonométrique a soit une infinité de solutions, soit aucune solution. Dès que l'on trouve une solution, il suffit d'ajouter un nombre entier de tours, donc  $k \cdot 2\pi$  en radians ou  $k \cdot 360^\circ$  en degrés avec  $k \in \mathbb{Z}$ , pour obtenir une autre solution.

La calculatrice permet de trouver une solution en utilisant les fonctions  $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$  et  $\tan^{-1}$ .

Les propriétés des rapports trigonométriques permettent d'en trouver d'autres.

- $\sin(\alpha) = c$  avec  $c > 1$  ou  $c < -1$   $\implies \mathcal{S} = \emptyset$
- $\cos(\alpha) = c$  avec  $c > 1$  ou  $c < -1$   $\implies \mathcal{S} = \emptyset$
- $\sin(\alpha) = c$  avec  $-1 \leq c \leq 1$   $\implies \mathcal{S} = \{\sin^{-1}(c) + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{180^\circ - \sin^{-1}(c) + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$   
ou en radians :  $\mathcal{S} = \{\sin^{-1}(c) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \sin^{-1}(c) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- $\cos(\alpha) = c$  avec  $-1 \leq c \leq 1$   $\implies \mathcal{S} = \{\cos^{-1}(c) + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\cos^{-1}(c) + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$   
ou en radians :  $\mathcal{S} = \{\cos^{-1}(c) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\cos^{-1}(c) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- $\tan(\alpha) = c$  avec  $c \in \mathbb{R}$   $\implies \mathcal{S} = \{\tan^{-1}(c) + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{180^\circ + \tan^{-1}(c) + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$   
 $= \{\tan^{-1}(c) + k \cdot 180^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$   
ou en radians :  $\mathcal{S} = \{\tan^{-1}(c) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + \tan^{-1}(c) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$   
 $= \{\tan^{-1}(c) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

**Exemples :** Résoudre pour  $\alpha$  en radians.

a)  $\cos(\alpha) = -0,3$

b)  $\sin(\alpha) = -0,3$

c)  $\tan(\alpha) = -0,3$

ex. 4.9 à 4.16

## 4.6 D'autres équations trigonométriques

**Exemples :** Résoudre pour  $\alpha$  en radians.

a)  $\cos(2\alpha) = 0,9$

ex. 4.17

b)  $\sin(2\alpha) = \sin(3\alpha)$

c)  $\tan\left(2\alpha + \frac{\pi}{5}\right) = 1$

ex. 4.18 à 4.19

d)  $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}$

ex. 4.20 à 4.21

e)  $4\cos^2(\alpha) - \cos(\alpha) - 3 = 0$

ex. 4.22

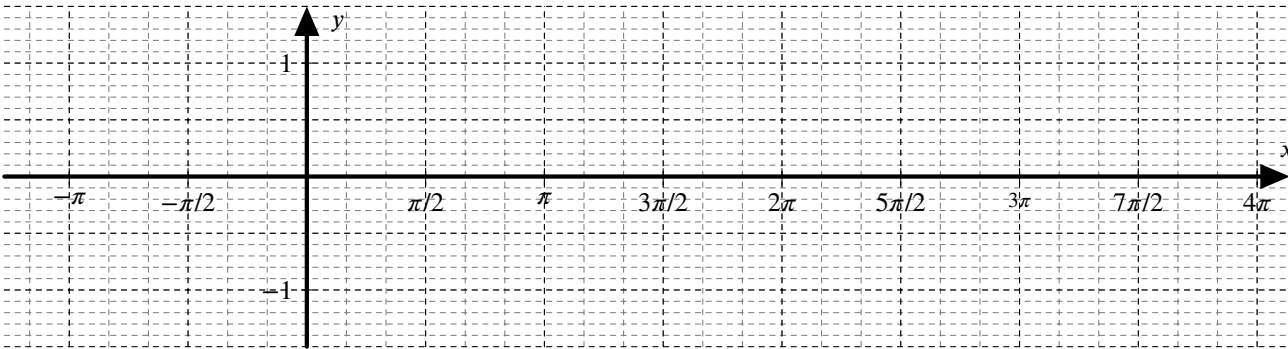
f)  $3\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) - 2 = 0$

ex. 4.23

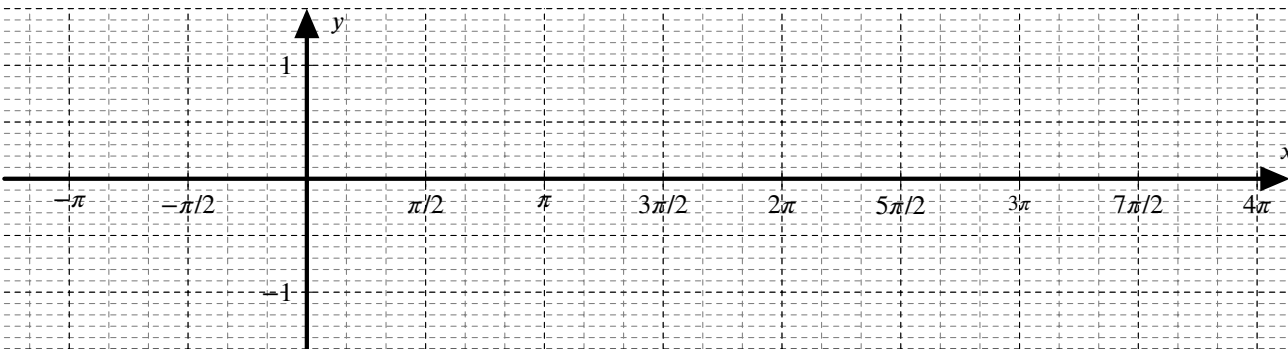
4.7 Les fonctions trigonométriques

Lorsqu'on parle de **fonctions trigonométriques**, la variable est **en radians**.

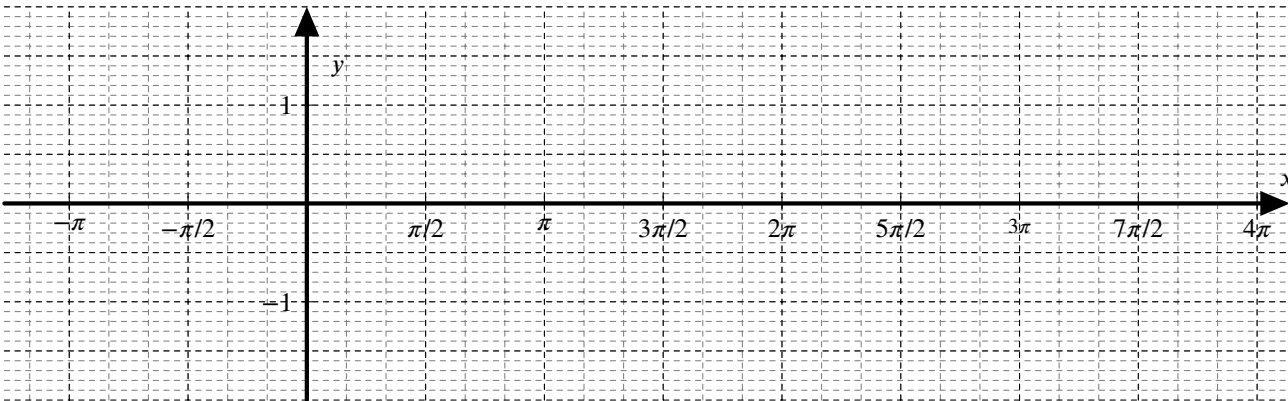
|        |        |                  |   |                 |       |                  |        |                  |        |                  |        |
|--------|--------|------------------|---|-----------------|-------|------------------|--------|------------------|--------|------------------|--------|
| x      | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\frac{5\pi}{2}$ | $3\pi$ | $\frac{7\pi}{2}$ | $4\pi$ |
| sin(x) |        |                  |   |                 |       |                  |        |                  |        |                  |        |



|        |        |                  |   |                 |       |                  |        |                  |        |                  |        |
|--------|--------|------------------|---|-----------------|-------|------------------|--------|------------------|--------|------------------|--------|
| x      | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\frac{5\pi}{2}$ | $3\pi$ | $\frac{7\pi}{2}$ | $4\pi$ |
| cos(x) |        |                  |   |                 |       |                  |        |                  |        |                  |        |



|        |                  |                  |                  |                  |   |                 |                 |                 |                 |                  |                  |                  |                  |
|--------|------------------|------------------|------------------|------------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| x      | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
| tan(x) |                  |                  |                  |                  |   |                 |                 |                 |                 |                  |                  |                  |                  |



Ces trois fonctions sont **périodiques**.  $\sin(x)$  a une **période** de  $2\pi$ .

En effet,  $\sin(x) = \sin(x + 2\pi) \forall x \in \mathbb{R}$  et il n'y a pas de nombre plus petit ayant cette propriété.

Donc ce qu'il se passe sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$  se répète sur l'intervalle  $[2\pi; 4\pi]$ , puis  $[4\pi; 6\pi]$ , etc...

Quelles sont les périodes de  $\cos(x)$  et  $\tan(x)$  ?

Lorsqu'on est en présence d'une fonction périodique, on peut restreindre l'étude de la fonction à un intervalle de longueur égal à la période.

**Exemple :** Soit la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = \sin(x)$ .

- Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
- Quels sont ses zéros ?
- Étudier le signe de  $f$ .
- D'après son graphe, trouver ses extremums et étudier sa croissance.
- Proposer une dérivée qui pourrait correspondre au tableau de croissance.

**Exemple :** Soit la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = \cos(x)$ .

- Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
- Quels sont ses zéros ?
- Étudier le signe de  $f$ .
- D'après son graphe, trouver ses extremums et étudier sa croissance.
- Proposer une dérivée qui pourrait correspondre au tableau de croissance.

**Exemple :** Soit la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = \tan(x)$ .

- Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
- Quels sont ses zéros ?
- Étudier le signe de  $f$ .
- D'après son graphe, trouver ses extremums et étudier sa croissance.

ex. 4.24 à 4.27

**Propriétés :** Soit la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = a \sin(bx + c)$ .

- Son ensemble de définition est  $\mathbb{R}$ .
- Sa période est de  $\frac{2\pi}{b}$ .
- Pour trouver les zéros, on résout  $bx + c = 0 + k\pi$ .
- Pour faire le tableau des signes, le plus simple est de tester une valeur de chaque intervalle entre les zéros.

**Propriétés :** Soit la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = a \cos(bx + c)$ .

- Son ensemble de définition est  $\mathbb{R}$ .
- Sa période est de  $\frac{2\pi}{b}$ .
- Pour trouver les zéros, on résout  $bx + c = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .
- Pour faire le tableau des signes, le plus simple est de tester une valeur de chaque intervalle entre les zéros.

**Propriétés :** Soit la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = a \tan(bx + c)$ .

- Pour trouver les valeurs interdites, on résout  $bx + c = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .
- Sa période est de  $\frac{\pi}{b}$ .
- Pour trouver les zéros, on résout  $bx + c = 0 + k\pi$ .
- Pour faire le tableau des signes, le plus simple est de tester une valeur de chaque intervalle entre les zéros et les valeurs interdites.

**Remarque :** Les fonctions périodiques ne peuvent avoir ni asymptote horizontale, ni asymptote oblique.

**Exemple :** Soit la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = \tan(10x)$ .

- Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
- Quels sont ses zéros ?
- Quelle est la période de  $f$  ?
- Étudier le signe de  $f$ .

**Exemple :** Soit la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = 10\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

- Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
- Quels sont ses zéros ?
- Quelle est la période de  $f$  ?
- Étudier le signe de  $f$ .

ex. 4.28 à 4.32

**Exemples :** Ces fonctions sont-elles périodiques ? Si non, justifier. Si oui, donner la période.

- $f(x) = x + \sin(x)$
- $f(x) = \tan\left(\frac{x}{3}\right) + \sin(x)$
- $f(x) = \cos(11x)$

ex. 4.33 à 4.36

## 4.8 Les dérivées de fonctions trigonométriques

**Règles du sinus :**

$$[\sin(x)]' = \cos(x)$$

$$[\sin(f(x))]' = f'(x) \cdot \cos(f(x))$$

**Exemples :**

a)  $[3 \sin(x) + \pi]' =$

b)  $[\sin(3x + \pi)]' =$

c)  $[\sin(x^2)]' =$

d)  $[\sin^9(x)]' =$

**Règles du cosinus :**

$$[\cos(x)]' = -\sin(x)$$

$$[\cos(f(x))]' = -f'(x) \cdot \sin(f(x))$$

**Exemples :**

a)  $\left[\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]' =$

b)  $[\sin(x) \cdot \cos(x)]' =$

c)  $\left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]' =$

**Règles de la tangente :**

$$[\tan(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$[\tan(f(x))]' = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} = f'(x) \cdot (1 + \tan^2(f(x)))$$

**Exemples :**

a)  $[x \cdot \tan(x)]' =$

b)  $\left[\frac{\tan(3x)}{x}\right]' =$

ex. 4.37 à 4.39

## 4.9 Étude de la croissance de fonctions trigonométriques

**Exemples :**

a)  $f(x) = \cos(3x + \pi)$

b)  $f(x) = \sin(2x) - x$

|          |
|----------|
| ex. 4.40 |
|----------|

### 4.10 Calculs de limites par le théorème de Bernoulli-l'Hospital

Lorsque l'on veut calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$  on est confronté à une indétermination car on obtient  $\frac{0}{0}$ .

Cette indétermination ne peut pas être levée grâce aux moyens que nous avons déjà vus. Nous utiliserons donc le théorème de Bernoulli-l'Hospital.

**Théorème 1 (Bernoulli-l'Hospital)** Soit  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$  et deux fonctions  $f$  et  $g$ , dérivables dans un voisinage de  $a$  avec  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , et telles que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Exemples :** Calculer les limites ci-dessous de deux manières différentes.

a)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{4x^3 - 20x^2 - x + 5} =$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} =$

**Remarques :**

- Il ne faut pas confondre  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  et  $\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]'$ .
- Ce théorème ne s'applique que lorsqu'on obtient  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Exemple :** Comparer  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$  avec  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  pour  $f(x) = x + 10$  et  $g(x) = 2x$ .

ex. 4.41 à 4.43

**Exemples :** Calculer les limites ci-dessous.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} =$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(5x) - 1}{x^2} =$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(5x) - 1}{x^4} =$

ex. 4.44

### 4.11 Étude de fonctions trigonométriques

**Exemple :** Étudier et esquisser la fonction  $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$ .

ex. 4.45

**Exemple :** Étudier et esquisser la fonction  $f(x) = \frac{\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$ .

|          |
|----------|
| ex. 4.46 |
|----------|

## 5 Exponentielles

### 5.1 Introduction

« Quand vous recevrez cette lettre, versez-moi CHF 10.– puis recopiez la lettre 10 fois et envoyez-la à 10 de vos amis. Ainsi vous gagnerez CHF 100.– après avoir donné seulement CHF 10.– Ne brisez pas la chaîne car sinon le malheur s'abattra sur vous ! »

Imaginons que toutes les personnes qui reçoivent cette lettre en renvoient 10 le jour-même et que le courrier ne mette qu'un jour pour arriver à ses destinataires, compléter le tableau ci-dessous.

| nb de jours depuis<br>le début de la chaîne | nb de lettres envoyées<br>ce jour-là |
|---------------------------------------------|--------------------------------------|
| 0                                           | 1                                    |
| 1                                           |                                      |
| 2                                           |                                      |
| 3                                           |                                      |
| 4                                           |                                      |
| $x$                                         |                                      |

Au bout de combien de temps, le nombre de lettres envoyées ce jour-là sera plus grand que la population mondiale (environ 8 milliards de personnes) ?

Les **problèmes de croissance exponentielle** sont des problèmes où **la quantité de départ est multipliée à chaque étape par une valeur constante**. C'est le cas, par exemple, avec les calculs d'intérêts composés ou la propagation d'une épidémie.

Pour les résoudre, nous allons avoir besoin de nouvelles fonctions : les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques.

ex. 5.1

## 5.2 Définition des fonctions exponentielles

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ . On appelle **exponentielle de base  $a$**  la fonction :

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$\exp_a(x) = a^x$$

### Exemples :

a) Compléter l'expression de la fonction :

$$\exp_2(x) =$$

$$\exp_{1,3}(x) =$$

$$\exp_{1/5}(x) =$$

b) Calculer :

$$\exp_4(2) =$$

$$\exp_4\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\exp_4(-1) =$$

$$\exp_4\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

Pourquoi  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  ?

- $a > 0$  pour éviter les problèmes du type " $(-1)^{1/2}$ " car  $(-1)^{1/2} =$
- $a \neq 1$  car  $1^x =$  . C'est une fonction , elle a donc des propriétés différentes des autres fonctions exponentielles.
- $a \neq 0$  car  $0^x =$  si  $x > 0$  et est non défini si  $x \leq 0$ .

### Bases privilégiées

Les calculatrices sont munies des touches exponentielles  $10^x = \exp_{10}$  et  $e^x = \exp_e$ . Lorsqu'on note exp sans précision de la base, il s'agit de la base e.

Le nombre e (pour Euler<sup>1</sup>), est un nombre très utilisé en mathématiques, au même titre que  $\pi$ .

$$e \approx 2,71828183$$

**Exemples :** Calculer à l'aide de la calculatrice :

$$a) e^3 \approx$$

$$b) \sqrt{e} \approx$$

$$c) \sqrt[10]{e^3} \approx$$

Une des propriétés remarquables de la fonction exponentielle  $f(x) = e^x$  est qu'elle est la seule fonction à être sa propre dérivée.

$$(e^x)' = e^x$$

ex. 5.2 à 5.5

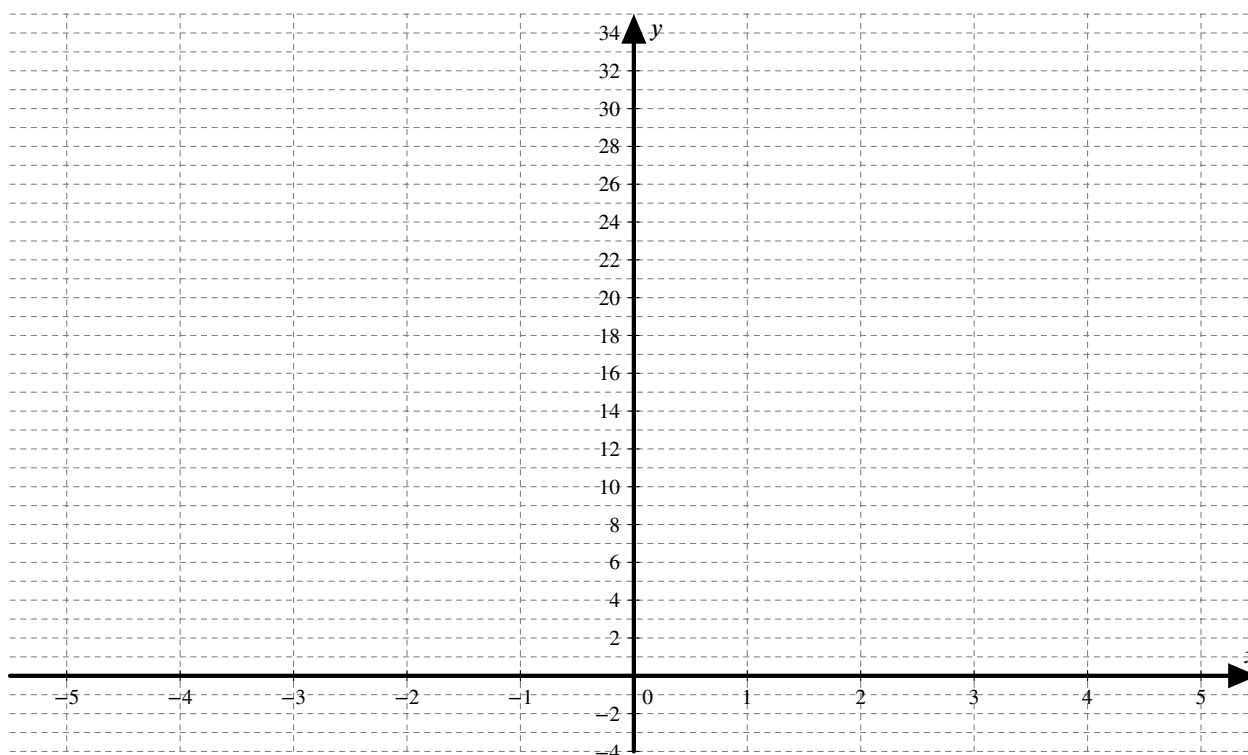
1. Léonard Euler, mathématicien suisse (1707-1783)

### 5.3 Représentation graphique et propriétés

Représenter les graphes des fonctions  $\exp_2$  et  $\exp_{1/2}$ .

|                   |    |    |    |   |   |   |   |   |   |
|-------------------|----|----|----|---|---|---|---|---|---|
| $x$               | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $\exp_2(x) = 2^x$ |    |    |    |   |   |   |   |   |   |

|                                              |    |    |    |    |    |   |   |   |   |
|----------------------------------------------|----|----|----|----|----|---|---|---|---|
| $x$                                          | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $\exp_{1/2}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ |    |    |    |    |    |   |   |   |   |



#### Propriétés :

- Pour  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ , la fonction exponentielle  $f(x) = \exp_a(x) = a^x$  est définie pour tout nombre réel  $x$ , donc  $D_f = \mathbb{R}$ .
- Son ordonnée à l'origine est toujours 1 car
- Elle n'a pas de zéros.
- Son tableau des signes est :
- Elle est strictement croissante si  $a > 1$  et strictement décroissante si  $0 < a < 1$ .

**Propriétés :** Soit  $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  et  $x, y \in \mathbb{R}$ . On a :

$$(i) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(iv) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(ii) \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(v) \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(iii) \quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

**Rappel :** Si  $x \neq 1$ ,  $(a+b)^x \neq a^x + b^x$      $(a-b)^x \neq a^x - b^x$     et     $k(a+b)^x \neq (ka+kb)^x$

**Exemples :**

$$a) \quad (3^x)^{x+1} =$$

$$b) \quad \frac{7^3}{7^x} =$$

$$c) \quad 3 \cdot \frac{12^{x-1}}{4^{x-1}} =$$

ex. 5.6 à 5.9

## 5.4 Équations exponentielles

Une **équation exponentielle** est une équation dans laquelle la variable apparaît en exposant.

Pour la résoudre, on peut utiliser la propriété :

$$a^x = a^y \iff x = y$$

**Exemples :** Résoudre les équations :

$$a) \quad e^x = \frac{1}{\sqrt[5]{e^3}}$$

$$c) \quad 2^{4x^2-1} - \sqrt{2} = 0$$

$$b) \quad 3^x = 9^{x-1}$$

$$d) \quad 4 \cdot 2^x - 8 \cdot 4^{x+3} = 0$$

ex. 5.10

**Exemple :** Résoudre l'équation  $2^{2x+2} - 14 \cdot 2^x = 8$ .

|          |
|----------|
| ex. 5.11 |
|----------|

**Exemple :** Résoudre l'équation  $9 \cdot 3^{-3x} - 10 \cdot 3^{-x} + 3^x = 0$ .

|                 |
|-----------------|
| ex. 5.12 à 5.13 |
|-----------------|

## 6 Logarithmes

### 6.1 Définition

Certaines équations exponentielles « simples » peuvent être résolues de tête mais d'autres non :

a)  $10^x = 1'000'000$

b)  $10^x = 2$

Il y a longtemps, les solutions de telles équations étaient listées dans des livres appelés « tables logarithmiques ». Maintenant, la calculatrice nous permet de les trouver rapidement grâce aux touches **LOG** et **LN**.

**Exemples :** Les solutions des équations ci-dessus se trouvent en calculant :

a)  $\text{Log}(1'000'000) =$

b)  $\text{Log}(2) =$

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ . On appelle **logarithme en base  $a$**  la fonction réciproque de la fonction  $\exp_a$ , notée :

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

On a donc :

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\exp_a} & a^x \\ \log_a(y) & \xleftarrow{\log_a} & y \end{array}$$

$$\boxed{x = \log_a(y) \iff a^x = y}$$

En d'autres termes, calculer  $\log_a(y)$  c'est se demander  $y = a^?$ .

**Exemples :** Compléter :

a)  $\log_3(81) =$  car

b)  $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) =$  car

c)  $\log_7(1) =$  car

On note  $\text{Log}$  ou  $\log$  au lieu de  $\log_{10}$ . C'est le **logarithme en base dix** ou **logarithme décimal**.

On note  $\ln$  au lieu de  $\log_e$ . C'est le **logarithme naturel** ou **logarithme népérien**<sup>2</sup>.

**Exemples :**

a)  $\text{Log}(0,01) =$

b)  $\ln(e^5) =$

ex. 6.1 à 6.5

2. John Néper, mathématicien britannique (1550-1617)

## 6.2 Propriétés

Calculer à l'aide de la définition et observer.

a)  $\log_7(7^3) =$

b)  $\log_7(49) =$

$7^{\log_7(49)} =$

c)  $\log_7(1) =$

d)  $\log_7(7) =$

e)  $\log_3(9) =$

$\log_3(81) =$

f)  $\log_3(9 \cdot 81) =$

$\log_3\left(\frac{9}{81}\right) =$

g)  $\text{Log}(100) =$

$\text{Log}(100^4) =$

h)  $\log_2(32) =$

$\log_2\left(\frac{1}{32}\right) =$

i)  $\text{Log}(1'000'000) =$

$\text{Log}(100) =$

j)  $\log_{100}(1'000'000) =$

**Propriétés :** Soit  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$  et  $q \in \mathbb{R}$ .

(i)  $\log_a(a^x) = x$

(v)  $a^{\log_a(y)} = y$

(ii)  $\log_a(1) = 0$

(vi)  $\log_a(a) = 1$

(iii)  $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(vii)  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

(iv)  $\log_a(x^q) = q \log_a(x)$

(viii)  $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

(ix)  $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\text{Log}(x)}{\text{Log}(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

**Exemples :** Calculer sans calculatrice.

a)  $\text{Log}(4) + 2 \text{Log}(5) =$

b)  $\text{Log}(30) - \text{Log}(3) =$

La propriété (ix) de la page précédente est appelée **formule de changement de base**. Elle permet de calculer les logarithmes dans n'importe quelle base à l'aide des touches LN et LOG de la calculatrice.

**Exemple :** À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approximative de  $\log_2(5)$ .

Les propriétés des logarithmes se déduisent des propriétés des exponentielles.

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$  nous dit qu'en base  $a$  l'exposant d'un produit est la somme des exposants.  
 $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$  exprime la même propriété.
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$  nous dit qu'en base  $a$  l'exposant d'un quotient est la différence des exposants.  
 $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$  exprime la même propriété.
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$  nous dit qu'en base  $a$  l'exposant d'une puissance de puissance est le produit des exposants.  
 $\log_a(x^q) = q \log_a(x)$  exprime la même propriété.

**Attention aux fausses propriétés !** Comparer  $\log(1000)$  et  $\log(100)$  avec  $\log(1000+100)$  et  $\log(1000-100)$ .

ex. 6.6 à 6.9

### 6.3 Retour sur les équations exponentielles

Pour résoudre ce genre d'équation, il est vivement conseillé **d'isoler l'exponentielle** avant d'appliquer le  $\log_a$ .

**Exemple :** Résoudre  $3^{2x+6} = 7$ .

**Exemples :** Résoudre.

a)  $8 \cdot 10^{3x+1} + 7 = 167$

b)  $e^{4-x} = 5e^x$

c)  $3^{2x+1} = 2^{x-4}$

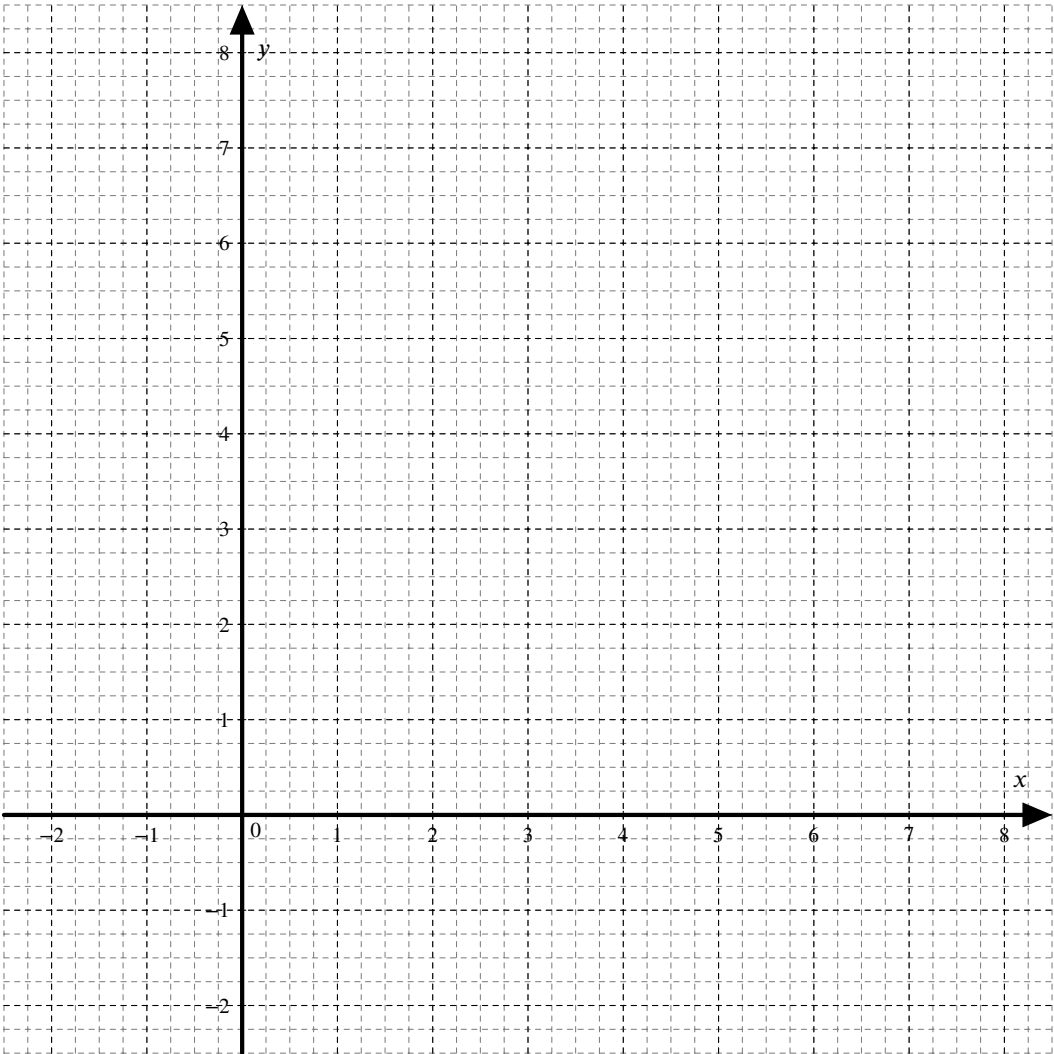
ex. 6.10 à 6.13

6.4 Représentation graphique

Représenter les graphes des fonctions  $\exp_2$  et  $\log_2$ .

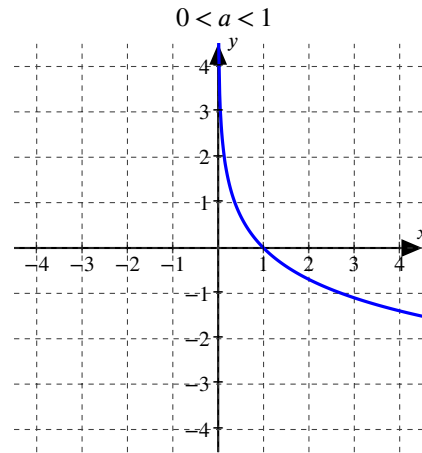
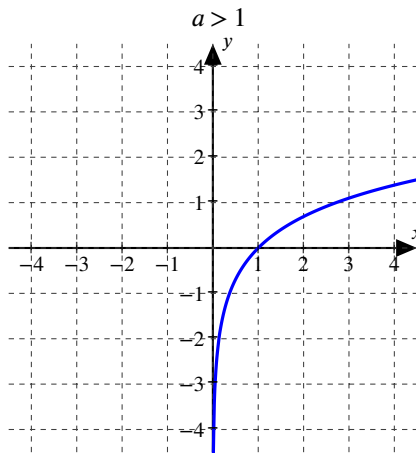
|             |    |    |   |   |   |   |
|-------------|----|----|---|---|---|---|
| $x$         | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $\exp_2(x)$ |    |    |   |   |   |   |

|             |    |   |               |               |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------------|----|---|---------------|---------------|---------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$         | -1 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $\log_2(x)$ |    |   |               |               |               |   |   |   |   |   |   |   |   |



- Comparer les deux graphes.
- Quel est l'ensemble de définition de la fonction  $\log_a$  ? Pourquoi ?
- Quel est le zéro de la fonction  $\log_a$  ? Pourquoi ?

- La fonction logarithme  $\log_a$  est strictement croissante si  $a > 1$  et strictement décroissante si  $0 < a < 1$ .



- Son tableau des signes est :

## 6.5 Équations logarithmiques

Une **équation logarithmique** est une équation dans laquelle la variable apparaît dans un logarithme.

**Exemples :** Résoudre les équations :

a)  $\ln(8 + 4x) = 12$

c)  $\log_x(81) = 4$

b)  $3\log_8(x) - 2 = 0$

d)  $\text{Log}(x) + \text{Log}(x - 3) = 1$

**Remarque :** Il ne faut pas oublier de contrôler que les réponses obtenues ne posent pas de problème dans l'équation de départ. Il faut que celles-ci soient dans l'ensemble de définition de l'équation de départ.

ex. 6.14 à 6.16

**Exemples :** Résoudre les équations :

a)  $\text{Log}(5+x) = \text{Log}(4-x) + 1$

b)  $\log_2(3x-4) + \log_2(10x-4) = 2\log_2(5x-2)$

|                 |
|-----------------|
| ex. 6.17 à 6.18 |
|-----------------|

## 7 Applications des exponentielles et des logarithmes

### 7.1 Les intérêts composés

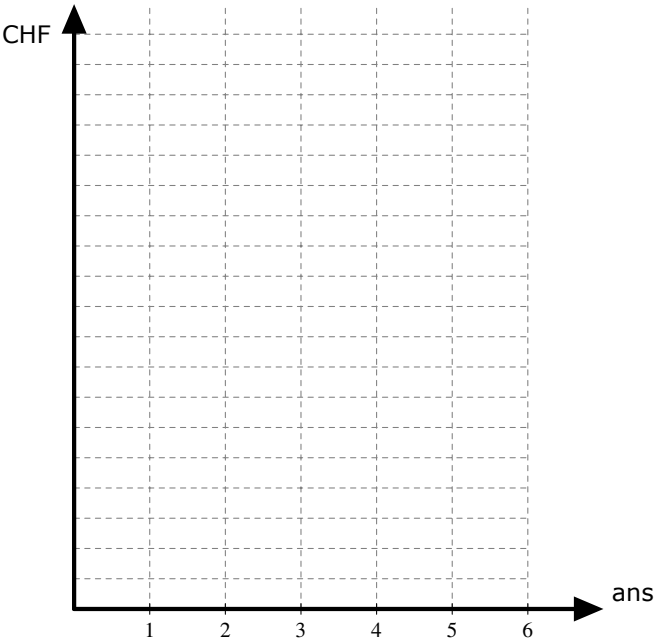
On place une somme de CHF 100'000.– dans un compte épargne au taux annuel  $i$  de 10%. Les intérêts sont capitalisés à la fin de chaque année.

On parle d'**intérêts composés** si les intérêts sont ajoutés au capital initial. Il y aura ainsi un capital plus grand la deuxième année et donc plus d'intérêts.

Calculons le capital disponible à la fin des prochaines années :

| Nombre d'années<br>$n$ | $C_n$ | Capital sur le compte 1er janvier<br>après $n$ années de placement | $I_n$ | Intérêts |
|------------------------|-------|--------------------------------------------------------------------|-------|----------|
| 0                      | $C_0$ | 100'000.–                                                          | $I_0$ |          |
| 1                      | $C_1$ |                                                                    | $I_1$ |          |
| 2                      |       |                                                                    |       |          |
| 3                      |       |                                                                    |       |          |
| 4                      |       |                                                                    |       |          |
| 5                      |       |                                                                    |       |          |

Représenter l'évolution du capital  $C_n$  sur le graphique ci-dessous :



On peut remarquer la progression suivante :

| Nombre d'années<br>$n$ | Capital sur le compte 1er janvier<br>$C_n$                                           | Intérêts<br>$I_n$   |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| 0                      | $C_0$                                                                                | $I_0 = C_0 \cdot i$ |
| 1                      | $C_1 = C_0 + I_0 = C_0 + C_0 \cdot i$<br>$= C_0 \cdot (1 + i)$                       | $I_1 = C_1 \cdot i$ |
| 2                      | $C_2 = C_1 + I_1 = C_1 + C_1 \cdot i$<br>$= C_1 \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^2$ | $I_2 = C_2 \cdot i$ |
| 3                      | $C_3 = C_2 + I_2 = C_2 + C_2 \cdot i$<br>$= C_2 \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^3$ | $I_3 = C_3 \cdot i$ |

On a donc :

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

### Exemples :

- On place une somme de CHF 100'000.– dans un compte épargne au taux d'intérêts composés annuels  $i$  de 10%. Combien aura-t-on sur le compte dans 5 ans si on ne retire rien entre-temps ? Utiliser la formule et comparer au résultat obtenu dans le tableau de la page précédente.
- Quelle somme initiale aurais-je dû placer avec ce taux d'intérêts pour pouvoir retirer 200'000.– 5 ans plus tard ?
- Quel taux d'intérêt faut-il avoir pour placer CHF 100'000.– et retirer CHF 200'000.– 5 ans plus tard ?
- Actuellement, les taux d'intérêts des comptes épargne sont au mieux de 0,5%.  
En combien d'années passe-t-on de CHF 100'000.– à CHF 200'000.– ?

ex. 7.1 à 7.5

## 7.2 Processus de croissance et de décroissance

On dit qu'une quantité **croît de façon exponentielle**, si elle est multipliée par un facteur  $a$  à chaque intervalle de temps  $T$ .

On appellera :

- $Q_0$  la quantité initiale
- $Q(t)$  la quantité à la fin du temps  $t$

Pour trouver combien de fois la quantité  $Q_0$  a été multipliée par  $a$  durant le temps  $t$ , il faut diviser  $t$  par  $T$ , en faisant attention d'avoir les mêmes unités.

On a donc :

$$Q(t) = Q_0 \cdot a^{t/T}$$

**Exemple :** On a observé expérimentalement que le nombre de bactéries dans une culture double toutes les 30 minutes. Au départ, il y a 100 bactéries.

a) Quel est le nombre de bactéries après 5h30 ?

b) Exprimer le nombre de bactéries en fonction du temps écoulé  $t$  en minutes. Et si  $t$  est en heures ?

c) Au bout de combien de minutes le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?

ex. 7.6 à 7.7

**Remarque :** Au lieu de donner le facteur  $a$ , on indique parfois le pourcentage d'augmentation ou de diminution (décroissance).

Si  $i$  est le **taux d'augmentation**, on a  $Q(t) = Q_0 \cdot (1+i)^{t/T}$ .

Si  $i$  est le **taux de décroissance**, on a  $Q(t) = Q_0 \cdot (1-i)^{t/T}$ .

Dans les problèmes d'intérêts composés, on donne le taux d'intérêt qui correspond au taux d'augmentation/décroissance.

**Exemples :**

A) En 1867, les USA ont acheté l'Alaska à la Russie pour la somme de CHF 7'200'000.

a) En supposant que la valeur du terrain augmente régulièrement de 3% par an, quelle aurait été sa valeur en 2018 ?

b) Que représente l'augmentation totale en % du prix de départ ?

B) J'ai acheté ma voiture au prix de CHF 30'000.– il y a 5 ans.

a) Que vaut-elle maintenant, s'il on compte qu'elle perd 15% de sa valeur chaque année ?

b) Quand ne vaudra-t-elle plus que CHF 5'000.– ?

c) Avec ce taux de dévaluation, quelle est la valeur d'achat d'un véhicule qui vaut CHF 20'000.– après 5 ans ?

d) Quel est le taux de dévaluation si la valeur est passée de 30'000.– à CHF 20'000.– en 3 ans ?

|                |
|----------------|
| ex. 7.8 à 7.19 |
|----------------|

### 7.3 Décomposition d'une substance radioactive

Une substance radioactive n'est pas stable. Au cours du temps elle se transforme en d'autres substances : ce phénomène est appelé **décomposition radioactive**. Lorsqu'on étudie la désintégration radioactive, on constate que le taux de désintégration est proportionnel à la quantité de matière présente. A l'aide du modèle exponentiel, si  $Q(t)$  désigne la quantité de substance radioactive restante après un temps  $t$ , on a la relation :

$$Q(t) = Q_0 e^{ct}$$

où  $Q_0$  est la quantité initiale de substance et  $c$  est un nombre réel qui dépend de la substance.  $c$  est négatif puisque la quantité de matière diminue avec le temps.

On appelle **demi-vie** d'un isotope, noté  $T$ , le temps nécessaire pour que la moitié de l'échantillon de départ se désintègre. Elle est la principale caractéristique utilisée pour distinguer une substance radioactive d'une autre. Voici un tableau donnant les demi-vies de quelques isotopes :

|                            |            |                               |                       |
|----------------------------|------------|-------------------------------|-----------------------|
| $^{91}\text{Kr}$ (krypton) | 10 s       | $^{90}\text{Sr}$ (strontium)  | 28,1 ans              |
| $^{55}\text{Cr}$ (chrome)  | 18,2 h     | $^{238}\text{Pu}$ (plutonium) | 86 ans                |
| $^{51}\text{Cr}$ (chrome)  | 27,8 jours | $^{14}\text{C}$ (carbone)     | 5'730 ans             |
| $^{141}\text{Ce}$ (cérium) | 32,5 jours | $^{239}\text{Pu}$ (plutonium) | 24'400 ans            |
| $^{60}\text{Co}$ (cobalt)  | 5,3 ans    | $^{238}\text{U}$ (uranium)    | $4,51 \cdot 10^9$ ans |

**Exemple :** Un physicien possède 20 g d'une substance radioactive inconnue. Après 10 ans, il constate qu'il n'en reste plus que 18,45 g. Quelle est la nature de cette substance ?

## 7.4 pH

On note  $[H^+]$  la concentration d'ions d'hydrogène présents dans une substance (en mole par litre). Le pH (potentiel hydrogène) d'une substance est déterminé à partir de la concentration par la formule :

$$pH = -\log([H^+])$$

Le pH sert en particulier à déterminer si une solution est acide ( $pH < 7$ ), neutre ( $pH = 7$ ) ou basique ( $pH > 7$ ).

### Exemples :

a) Pour les tomates  $[H^+] = 6,3 \cdot 10^{-5}$ . Font-elles partie des aliments acides ? Même question pour le lait pour lequel  $[H^+] = 4 \cdot 10^{-7}$ .

b) Calculer la concentration en ions d'hydrogène d'une crème de corps ayant un pH égal à 5,5.

## 7.5 Échelle de Richter

L'échelle de Richter donne la magnitude  $M$  d'un séisme en fonction de l'énergie  $E$  dissipée par le séisme. Cette échelle est définie par la relation :

$$\log(E) = 1,5M + 4,4$$

où  $E$  est mesurée en Joules.

### Exemples :

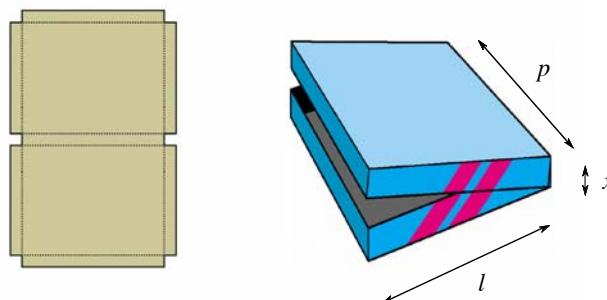
a) Calculer le rapport de l'énergie dissipée lors du séisme qui détruisit San Francisco en 1906 ( $M_{SF} = 8,3$ ) par l'énergie de celui de Los Angeles en janvier 1994 ( $M_{LA} = 6,6$ ).

b) Quelle est la magnitude sur l'échelle de Richter correspondant à l'explosion d'une bombe H de 10 mégatonnes, c'est-à-dire d'une bombe libérant une énergie équivalente à celle qui est dégagée par l'explosion de 10 millions de tonnes de TNT ? Un kilo de TNT libère en explosant une énergie de  $4,2 \cdot 10^7$  Joule.

## 8 Exercices

### 8.1 Optimisation

**Exercice 1.1** On désire construire une boîte en carton à partir d'une feuille rectangulaire en coupant 6 carrés comme représentés ci-dessous des côtés et en pliant les côtés.



La feuille de carton mesure 45 cm sur 30 cm. Quelles sont les dimensions de la boîte fermée admettant un volume maximum et quel est ce volume ?

**Exercice 1.2** On désire construire un garage en forme de parallélépipède rectangle. La paroi du fond, les deux parois latérales, ainsi que le toit du garage sont en tôle. La porte est en bois. Le garage doit avoir une profondeur de 6 mètres et un volume de  $75 \text{ m}^3$ .

On sait que le prix de la tôle est de 20 francs le  $\text{m}^2$ , alors que le prix de la porte en bois est de 30 francs le  $\text{m}^2$ .

Quelles sont les dimensions du garage de coût minimum et quel est ce prix ?

**Exercice 1.3** Une cabine de douche est en forme de parallélépipède rectangle. Son socle est carré. Elle n'a pas de toit. Elle est fabriquée à partir de deux matériaux différents :

- le socle revient à Frs 500.– par  $\text{m}^2$  ;
- les quatre autres parois coûtent Frs 100.– par  $\text{m}^2$ .

Le coût total des matériaux est de Frs 1500.–.

Quelles doivent être les dimensions de la cabine si l'on veut que son volume soit le plus grand possible ?

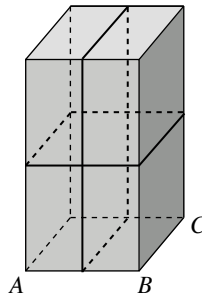
**Exercice 1.4** L'entreprise de portes et fenêtres qui vous emploie projette la construction d'un entrepôt de  $450 \text{ m}^2$  de surface au sol.

Les exigences municipales de la commune sur l'esthétisme des rues commerciales obligent les commerçants à recouvrir la façade de leurs édifices avec des matériaux de première qualité alors que les côtés et l'arrière peuvent être recouverts avec des matériaux de moindre qualité. Les coûts ont été estimés à Fr. 800.– le mètre carré pour la façade et de Fr. 100.– le mètre carré pour les côtés et l'arrière.

Sachant que la hauteur de l'édifice sera de 3 mètres, déterminer le coût minimum possible pour recouvrir les 4 parois de l'entrepôt.

**Exercice 1.5** Un aquarium (ouvert au-dessus) de 15 cm de haut doit avoir une contenance de  $600 \text{ cm}^3$ . Déterminer les dimensions de cet aquarium permettant de minimiser la surface de verre.

**Exercice 1.6** On se propose d'envoyer un colis de volume égal à  $12 \text{ dm}^3$  dont la forme est celle d'un parallélépipède rectangle de base carrée ( $AB = BC$ ). Son emballage est maintenu à l'aide d'une ficelle comme le montre la figure.



Trouver les dimensions du colis permettant d'utiliser le moins de ficelle possible.

**Exercice 1.7** On veut clôturer un champ de forme rectangulaire, devant avoir une superficie de 100 ha. Une route rectiligne longe un des côtés de ce champ. Il faut une clôture particulière pour ce côté, qui coûte 500.– frs le km, soit 200.– frs de plus le km que celle qu'on utilise pour les trois autres côtés. Quelles sont les dimensions du champ qui minimisent les coûts ?

## 8.2 Géométrie analytique : les droites

### Rappels de géométrie vectorielle

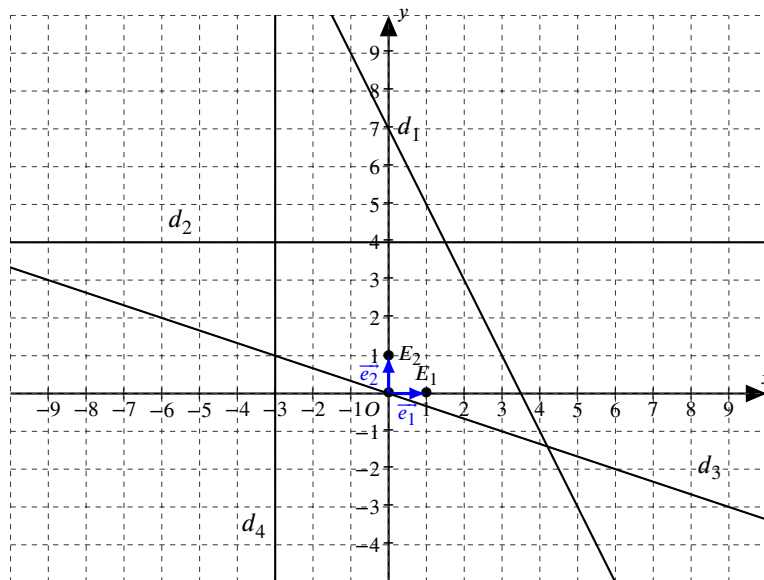
**Exercice 2.1** Soit  $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2)$  un repère cartésien et sa base associée  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  où  $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$  et  $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ .

Soit les points  $A(2; -3)$ ,  $B(-6; 3)$  et  $C(7; 4)$ .

- Calculer les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AC}$  relativement à  $\mathcal{B}$ .
- Calculer les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{AB_u}$ ,  $\overrightarrow{BC_\perp}$  et  $\overrightarrow{BC'_\perp}$ .
- Calculer les coordonnées de  $M$  le milieu de  $AB$  et  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ .
- Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .
- Calculer les coordonnées du point  $D$  tel que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme.
- Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont-ils perpendiculaires ? Justifier par un calcul.
- Soit le point  $F(3; y)$ . Calculer la valeur de  $y$  pour que  $\overrightarrow{OF}$  soit perpendiculaire à  $\overrightarrow{AB}$ .
- Calculer la distance  $\delta(A; C)$  entre  $A$  et  $C$ .
- Calculer la mesure de l'angle  $\alpha = \angle ABC$ .
- Soit le point  $E(m; m)$ . Calculer la valeur du paramètre  $m$  afin que le point  $E$  soit sur la droite  $d_{AB}$  passant par  $A$  et  $B$ .
- Calculer les coordonnées du point  $F$  tel que  $B$  soit le point milieu du segment  $AF$ .

### Équation vectorielle paramétrique de la droite

**Exercice 2.2** Donner une équation vectorielle paramétrique des droites dessinées ci-dessous.



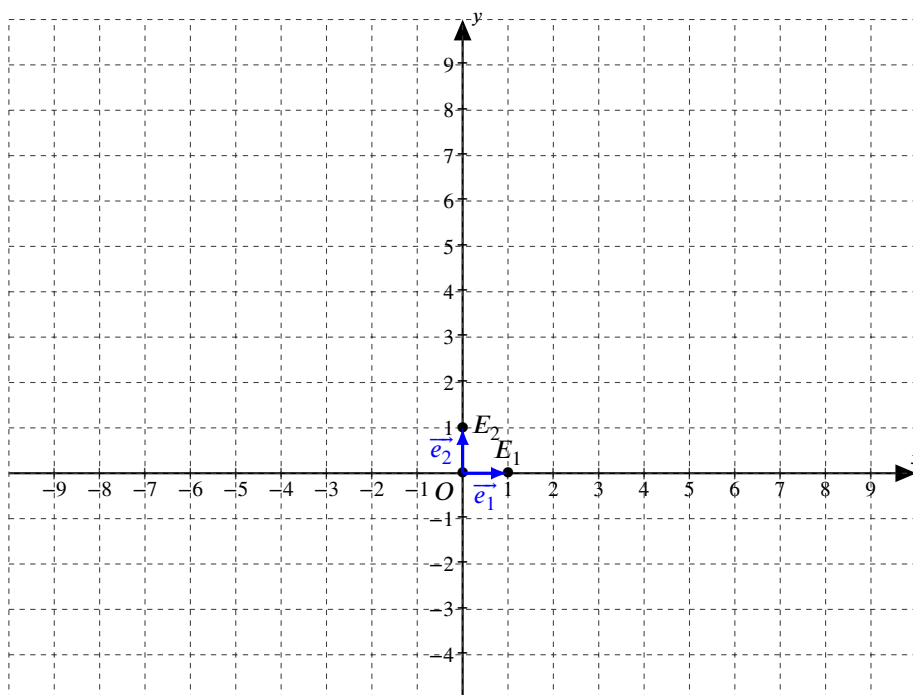
**Exercice 2.3** Représenter les droites données par les équations vectorielles paramétriques :

a)  $d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

c)  $d_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b)  $d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

d)  $d_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$



**Exercice 2.4** On détermine des droites à l'aide d'un système d'équations paramétriques. Pour chaque droite, donner une équation vectorielle paramétrique.

$$\text{a) } \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = -4 + k \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = -2 - 2k \\ y = 3k \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x = -2k \\ y = 3 \end{cases}$$

**Exercice 2.5** Que peut-on dire des deux droites suivantes ? Donner un système d'équations paramétriques pour chacune d'elles.

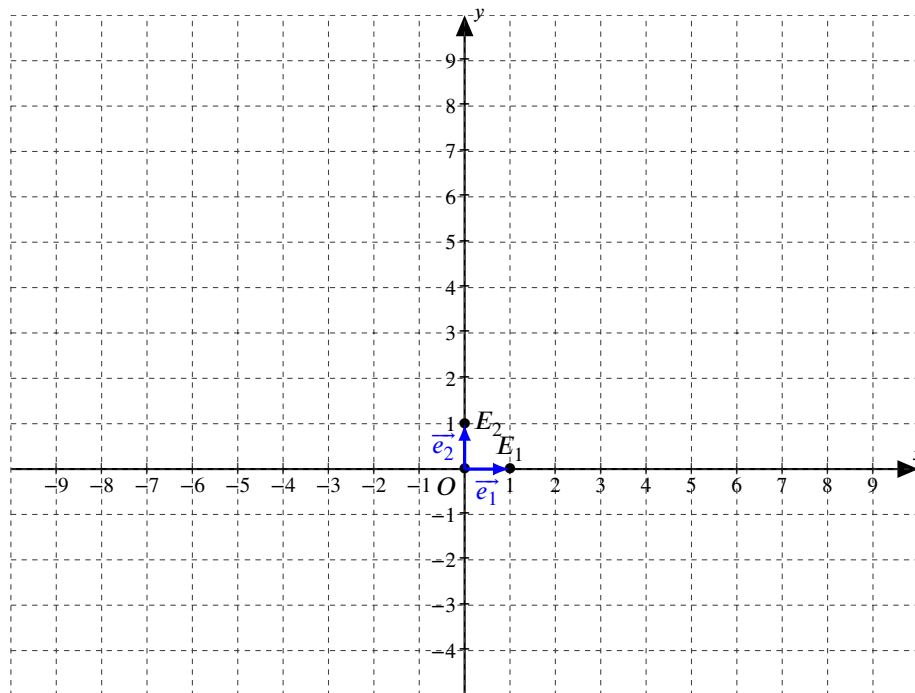
$$\text{a) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.6** Représenter les droites  $a$  et  $b$  données par les systèmes d'équations paramétriques :

$$\text{a : } \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - 3k \end{cases}$$

$$\text{b : } \begin{cases} x = k \\ y = 5 \end{cases}$$



**Exercice 2.7** On considère la droite  $d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer une équation paramétrique de la droite parallèle à  $d$  et passant par  $P(8; -9)$ .
- Que peut-on affirmer au sujet des vecteurs directeurs de deux droites parallèles ?
- Déterminer une équation paramétrique de la droite perpendiculaire à  $d$  et passant par  $P(8; -9)$ .
- Que peut-on affirmer au sujet des vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires ?
- Les points  $A(14; -18)$  et  $B(-1; \frac{8}{5})$  appartiennent-ils à la droite  $d$  ? Justifier.
- Quelle est la coordonnée manquante de  $C(\dots; 1)$  si  $C$  est un point de  $d$  ?

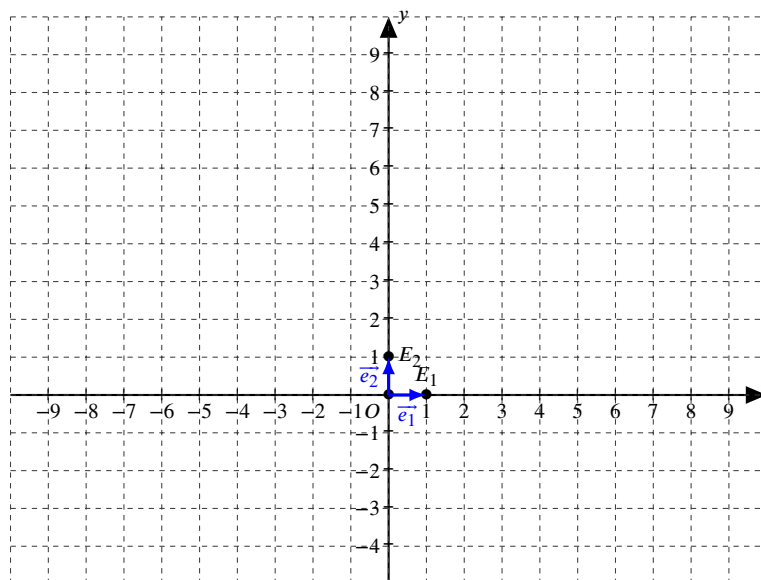
**Exercice 2.8** On donne les coordonnées des points  $A$  et  $B$ . Calculer une équation vectorielle paramétrique de la droite  $d_{AB}$  passant par les points  $A$  et  $B$ .

- $A(0; 2)$  et  $B(2; 3)$
- $A(2; -1)$  et  $B(6; 1)$
- $A(1; 3)$  et  $B(3; 4)$

### Équations cartésiennes de la droite

**Exercice 2.9** Représenter les droites suivantes et donner pour chacune une équation paramétrique vectorielle.

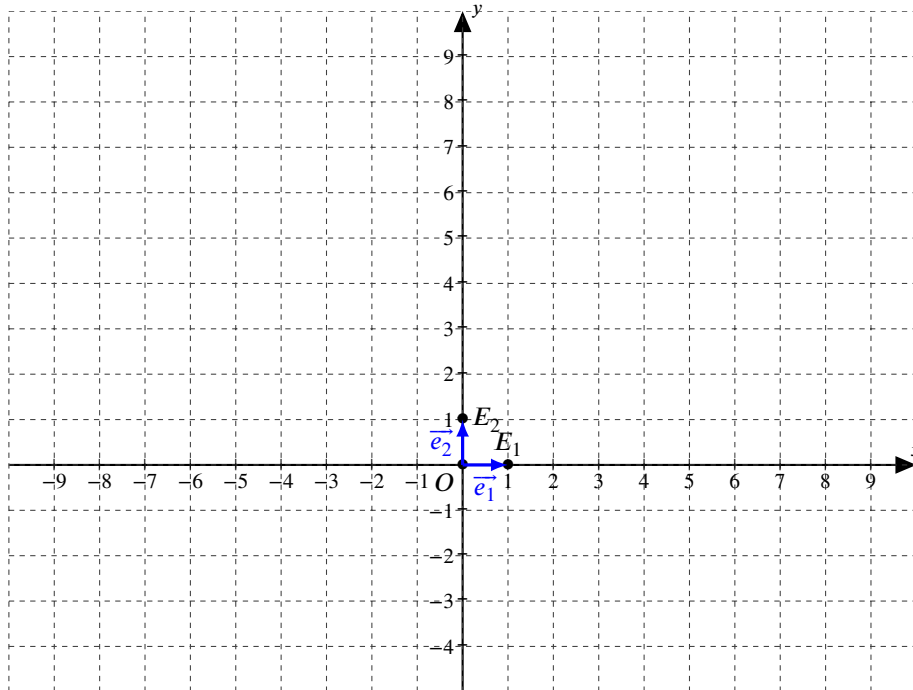
- $d_1 : y = \frac{2}{3}x - 1$
- $d_2 : y = 2x + 6$
- $d_3 : y = -\frac{5}{4}x$
- $d_4 : x = 2$



**Exercice 2.10** Donner les équations cartésiennes canoniques des droites de l'exercice précédent.

**Exercice 2.11** Représenter les droites suivantes et donner pour chacune une équation paramétrique vectorielle.

- a)  $d_1 : -3x + 2y - 12 = 0$     b)  $d_2 : 2x - 3y + 5 = 0$     c)  $d_3 : x + 6y + 18 = 0$     d)  $d_4 : x = -y$



**Exercice 2.12** Donner les équations cartésiennes explicites des droites de l'exercice précédent.

**Exercice 2.13** Les points suivants appartiennent-ils à la droite  $d$  d'équation  $3x - 8y + 2 = 0$ ? Justifier.

$$P_1(5; -1) \quad P_2(2; 1) \quad P_3(-1; 7) \quad P_4\left(0; \frac{1}{4}\right)$$

**Exercice 2.14** Calculer les coordonnées manquantes des points suivants qui sont tous sur la droite d'équation :

$$d : -3x + 2y - 6 = 0$$

- |                                 |                                                            |
|---------------------------------|------------------------------------------------------------|
| a) $A(4; \dots)$                | d) $D$ est situé sur l'axe $Oy$                            |
| b) $B(\dots; -3)$               | e) les deux coordonnées du point $E$ sont identiques       |
| c) $C$ est situé sur l'axe $Ox$ | f) $F$ est sur la droite d'équation $d' : 2x - 5y - 7 = 0$ |

**De l'équation cartésienne à l'équation vectorielle paramétrique****Exercice 2.15** Soit la droite  $d$  d'équation  $d : 3x + 4y - 8 = 0$ .

- a) Calculer l'équation cartésienne explicite de la droite  $d$ .
- b) Donner une équation vectorielle paramétrique de la droite  $d$ .

**Exercice 2.16** Soit les droites définies par les équations cartésiennes ci-dessous. Pour chaque droite, déterminer une équation vectorielle paramétrique.

- a)  $y = 5x - 6$
- c)  $5x - 4y - 28 = 0$
- e)  $y = 3x$
- b)  $y = \frac{1}{4}x + 2$
- d)  $x = 4$
- f)  $y = -3$

**De l'équation vectorielle paramétrique à l'équation cartésienne****Exercice 2.17**

- a) Donner une équation vectorielle paramétrique de la droite  $d$  de vecteur directeur  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et passant par le point de coordonnées  $(-4; 5)$ .
- b) Calculer sa pente.
- c) Calculer son ordonnée à l'origine.
- d) Calculer l'équation cartésienne explicite de cette droite.
- e) Calculer l'équation cartésienne canonique de cette droite.

**Exercice 2.18** Déterminer les équations cartésiennes canonique et explicite des droites :

- a) de pente  $m = -\frac{1}{7}$  et d'ordonnée à l'origine  $h = -2$
- b) de vecteur directeur  $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ , passant par  $H(0; \frac{1}{2})$

**Exercice 2.19** Pour chaque droite, déterminer ses équations cartésiennes explicites et canoniques.

- a)  $\begin{cases} x = 4 + 5k \\ y = 2 - 3k \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = -4 + k \end{cases}$
- e)  $\begin{cases} x = -2 - 2k \\ y = 3k \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - 3k \end{cases}$
- d)  $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 3 \end{cases}$
- f)  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3k \end{cases}$

**Vecteur normal**

**Exercice 2.20** Calculer les composantes d'un vecteur normal aux droites définies par les équations suivantes :

a)  $2x + 3y - 5 = 0$

e)  $x = 9$

b)  $4x - 10y - 3 = 0$

f)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

c)  $y = \frac{5}{3}x + 2$

d)  $7y = 2$

**Exercice 2.21** Calculer un vecteur normal de la droite passant par les points de coordonnées  $A(5;2)$  et  $B(1;-3)$ .

**Exercice 2.22** Montrer que toutes les équations ci-dessous caractérisent la même droite.

a)  $3x + 2y = 11$

c)  $\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 1 - 3k \end{cases}$

e)  $\frac{9-x}{2} = \frac{y+8}{3}$

b)  $\begin{cases} x = 5 - 6k \\ y = -2 + 9k \end{cases}$

d)  $6x + 4y = 22$

f)  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$

**Méthode "rapide" pour trouver une équation cartésienne**

**Exercice 2.23** Calculer l'équation cartésienne canonique de la droite  $d$  sachant que  $\vec{d}_\perp = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  est un de ses vecteurs normaux et qu'elle passe par le point de coordonnées  $A(-5;4)$ .

**Exercice 2.24** Calculer l'équation cartésienne canonique de la droite  $d_{AB}$  passant par les points  $A(-2;1)$  et  $B(4;-7)$ .

**Exercice 2.25** Calculer les équations cartésiennes canoniques des côtés  $AB$  et  $AC$  d'un triangle rectangle de sommet  $A$ , sachant que les coordonnées sont  $A(5;3)$  et  $B(-2;-2)$ .

**Exercice 2.26** On donne les coordonnées de trois sommets  $A(1;2)$ ,  $B(6;0)$  et  $C(9;2)$  d'un parallélogramme  $ABCD$ . Calculer les coordonnées de son quatrième sommet  $D$ , puis les équations cartésiennes canoniques des quatre côtés et des deux diagonales du parallélogramme.

**Position relative de deux droites et intersection****Exercice 2.27** Soit les droites d'équation :

$$d_1 : 4x - 3y + 7 = 0$$

$$d_2 : -3x + 5y + 15 = 0$$

- a) Calculer une équation cartésienne de la droite  $e_1$  parallèle à  $d_1$  et passant par le point  $P_1(-7;8)$ .
- b) Calculer une équation cartésienne de la droite  $e_2$  parallèle à  $d_2$  et passant par le point  $P_2(-2;3)$ .

**Exercice 2.28** Soit les droites d'équation :

$$d_1 : 4x - 3y + 7 = 0$$

$$d_2 : -3x + 5y + 15 = 0$$

- a) Calculer une équation cartésienne de la droite  $e_1$  perpendiculaire à  $d_1$  et passant par le point  $P_1(-7;8)$ .
- b) Calculer une équation cartésienne de la droite  $e_2$  perpendiculaire à  $d_2$  et passant par le point  $P_2(-2;3)$ .

**Exercice 2.29** Soit les points  $A(2;1)$  et  $B(4;5)$ .

- a) Calculer une équation cartésienne de la droite  $d_{AB}$  passant par les points  $A$  et  $B$ .
- b) Calculer une équation cartésienne de la droite  $p_A$  perpendiculaire au segment  $AB$  et passant par  $A$ .
- c) Calculer une équation cartésienne de la droite  $p_B$  perpendiculaire au segment  $AB$  et passant par  $B$ .

**Exercice 2.30** Les droites d'équations suivantes sont-elles perpendiculaires ?

a)  $d : 2x - 3y + 5 = 0$

$d' : 6x - 4y - 1 = 0$

b)  $d : x = 4$

$d' : y = 3$

c)  $d : x - 2y + 4 = 0$

$d' : 2x + y - 7 = 0$

d)  $d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d' : y = 2x + 5$

e)  $d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d' : y = -\frac{1}{2}x + 5$

f)  $d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d' : 6x + 4y - 1 = 0$

**Exercice 2.31**a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre  $t$ , les droites ci-dessous sont-elles parallèles ?

$$d : y = (t-2)x + 3$$

$$d' : 3x - ty = 0$$

b) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre  $t$ , les droites ci-dessous sont-elles perpendiculaires ?

**Exercice 2.32** Etudier la position relative des paires de droites suivantes :

a)  $d : 4x - 2y = 1$   
 $d' : -2x + y = 5$

d)  $d : -x + 2y = 3$   
 $d' : \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 1 + k \end{cases}$

g)  $d : \begin{cases} x = 7 + k \\ y = 8 - k \end{cases}$   
 $d' : \begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 10 + 3t \end{cases}$

i)  $d : \begin{cases} x = 2k \\ y = 3 + 5k \end{cases}$   
 $d' : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

b)  $d : 3x + y = 8$   
 $d' : 6x - 2y = 3$

e)  $d : 3x + 2y = 7$   
 $d' : \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = 3 - 3k \end{cases}$

h)  $d : \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = k \end{cases}$

j)  $d : 4(x - 2) = 3(y + 3)$   
 $d' : 3x + 4y = 5$

c)  $d : 8x - 4y = 2$   
 $d' : -4x + 2y = -1$

f)  $d : 6x + y = 5$   
 $d' : \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 3 + 2k \end{cases}$

$d' : \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$

**Exercice 2.33** Calculer les points d'intersection des paires de droites définies par les équations suivantes :

a)  $d : 4x - 3y - 6 = 0$   
 $d' : 6x + y - 20 = 0$

c)  $d : 5x + 4y = 7$   
 $d' : \begin{cases} x = 7 - 4k \\ y = 1 + k \end{cases}$

e)  $d : \begin{cases} x = -2 + k \\ y = -5 + 2k \end{cases}$   
 $d' : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$

b)  $d : 3x - 7y = 57$   
 $d' : 2x + 3y = -8$

d)  $d : 2x - 9y = 8$   
 $d' : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Exercice 2.34** Calculer les coordonnées des sommets du triangle  $ABC$  sachant que :

$$d_{AB} : 4x + 3y = 5$$

$$d_{AC} : -x + 3y = 10$$

$$d_{BC} : x = 2$$

**Exercice 2.35** Calculer les points d'intersection des paires de droites définies par les équations suivantes :

a)  $4(x + 3) = 3(6 - y)$   
 $3x + 2y - 4 = 0$

b)  $4x - 6y = 3$   
 $-2x + 3y = 5$

c)  $x + y = 3$   
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

**Exercice 2.36** Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites  $d_{AB}$  et  $d_{CD}$ .

a)  $A(0;2)$

$B(2;3)$

$C\left(\frac{1}{2};4\right)$

$D\left(2;-\frac{1}{2}\right)$

b)  $A(0;2)$

$B(2;3)$

$C(1;0)$

$D(3;1)$

c)  $A(1;3)$

$B(3;4)$

$C(5;5)$

$D(-1;2)$

**Angle aigu orienté entre l'axe  $Ox$  et une droite****Exercice 2.37** Calculer l'angle aigu entre l'axe  $Ox$  et les droites ci-dessous.

a)  $y = 3x - 4$

c)  $6x + 5y - 10 = 0$

b) 
$$\begin{cases} x = 7 + 2k \\ y = 4 - 3k \end{cases}$$

d) 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Angle aigu entre deux droites sécantes****Exercice 2.38** Calculer l'angle aigu formé par chaque paire de droites.

a)  $d : 3x - 5y + 4 = 0$

$d' : x + y - 2 = 0$

b)  $d : y = -x + 5$

$d' : y = -2x + 1$

**Distance d'un point à une droite****Exercice 2.39** Calculer la distance du point  $P$  à la droite  $d$  :

a)  $P(2; -1)$

$d : 4x + 3y + 10 = 0$

c)  $P(-2; 3)$

$d : 4y = 3x - 2$

b)  $P(0; -3)$

$d : 5x = 12y + 23$

d)  $P(1; -2)$

$d : x = 2y + 5$

**Exercice 2.40** Calculer la distance du point  $P$  à la droite  $d_{AB}$  :

a)  $A(1; 2)$

$B(4; 6)$

$P(2; 1)$

b)  $A(-1; 6)$

$B(4; -6)$

$P(3; 2)$

**8.3 Géométrie analytique : les lignes principales du triangle****Médiatrice d'un segment****Exercice 3.1** Soit les points  $A(13; 4)$  et  $B(11; 10)$ .

- Calculer l'équation cartésienne canonique de la médiatrice du segment  $AB$ .
- Déterminer les coordonnées du point  $P$  situé sur la médiatrice et sur la droite  $d : 2x + y - 10 = 0$
- Calculer la distance de  $P$  au point  $A$ , ainsi que celle au point  $B$  et comparer.

**Exercice 3.2** Soit les points  $A(1; 3)$  et  $B(-3; 5)$ .

- Calculer l'équation cartésienne canonique de la médiatrice  $m$  du segment  $AB$ .
- Quelles sont les coordonnées des points  $P_1$  et  $P_2$  de la médiatrice situés à une distance de  $\sqrt{10}$  du point  $A$  ?
- Quelles sont les coordonnées des points  $C_1$  et  $C_2$  de la médiatrice situés à une distance de  $\sqrt{20}$  de la droite  $d_{AB}$  ?

**Exercice 3.3** Soit le triangle  $ABC$  où  $A(0;-4)$ ,  $B(12;2)$  et  $C(5;11)$ .

- Calculer une équation cartésienne canonique pour chaque médiatrice du triangle  $ABC$ .
- Vérifier que les médiatrices se coupent en un seul point  $D$ .
- Que peut-on dire des longueurs des segments  $AD$ ,  $BD$  et  $CD$ ?

### Médianes d'un triangle

**Exercice 3.4** Soit le triangle  $ABC$  où  $A(5;-7)$ ,  $B(1;3)$  et  $C(-3;5)$ .

- Calculer l'équation cartésienne canonique de la médiane  $g_A$  issue du sommet  $A$ .
- Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .
- Calculer l'angle  $ABC$ .

**Exercice 3.5** Soit le triangle  $ABC$  où  $A(0;-4)$ ,  $B(12;2)$  et  $C(5;11)$ .

- Calculer l'équation cartésienne canonique pour chaque médiane du triangle  $ABC$ .
- Vérifier que les médianes se coupent en un seul point  $G$ .
- Vérifier que  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ .

**Exercice 3.6** Si  $d_{AB} : 2x+3y=0$  et  $d_{AC} : x+3y+3=0$ , est-il possible que  $d : 5x+9y+7=0$  soit la médiane du triangle  $ABC$  issue de  $A$ ?

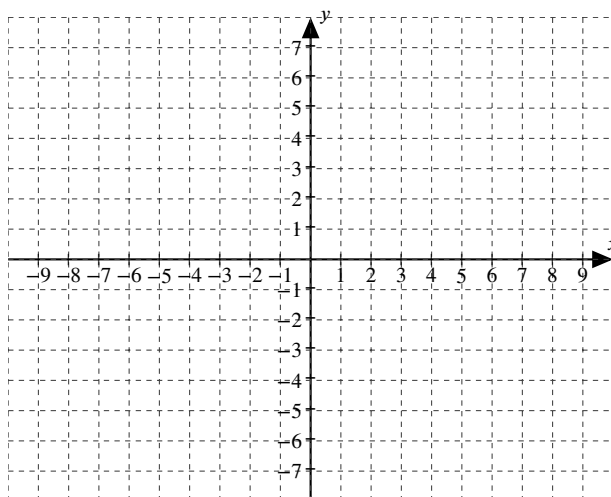
**Exercice 3.7** Soit le triangle  $ABC$  dont on connaît les équations de deux droites formant ses côtés et celle de la médiane  $g_A$  issue de  $A$  :

$$d_{AC} : -3x - y + 13 = 0$$

$$d_{BC} : x - 2y = 2$$

$$g_A : 4x - y = 1$$

- Représenter cette situation et indiquer les noms des 3 points d'intersection.
- Calculer les coordonnées de ces points d'intersection puis vérifier sur le dessin.
- Calculer les coordonnées du sommet manquant du triangle  $ABC$ .



**Hauteurs d'un triangle****Exercice 3.8** Soit le triangle  $ABC$  où  $A(5; -7)$ ,  $B(4; 4)$  et  $C(-3; 5)$ .

- a) Calculer l'équation cartésienne canonique de la hauteur  $h_A$  issue du sommet  $A$ .
- b) Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .
- c) Calculer l'aire du quadrilatère  $ABCO$ .

**Exercice 3.9** Soit le triangle  $ABC$  où  $A(0; -4)$ ,  $B(12; 2)$  et  $C(5; 11)$ .

- a) Calculer une équation cartésienne canonique pour chaque hauteur du triangle  $ABC$ .
- b) Vérifier que les hauteurs se coupent en un seul point  $H$ .

**Exercice 3.10** On considère le triangle de sommets  $A(1; -1)$ ,  $B(5; 2)$  et  $C(-1; 5)$ .

- a) Calculer l'aire du triangle  $ABC$  et l'utiliser pour calculer la mesure de la hauteur issue de  $A$ .
- b) Calculer l'équation de  $h_A$  et les coordonnées de  $H$ , le pied de cette hauteur. Les utiliser pour calculer la mesure de la hauteur issue de  $A$ .
- c) Calculer l'équation de  $d_{BC}$  et l'utiliser pour calculer la mesure de la hauteur issue de  $A$ .

**Exercice 3.11** De quel point puis-je calculer les coordonnées grâce aux équations de ces droites ?

- |                      |                         |                   |                         |
|----------------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|
| a) $m_{BC}$ et $g_A$ | c) $d_{AB}$ et $h_C$    | e) $h_A$ et $g_A$ | g) $m_{BC}$ et $d_{BC}$ |
| b) $d_{AB}$ et $h_B$ | d) $m_{AB}$ et $m_{AC}$ | f) $h_A$ et $h_B$ | h) $g_A$ et $g_C$       |

**Exercice 3.12** De quelle(s) droite(s) puis-je calculer l'équation grâce à ces informations ?

- |                                                      |                                                          |
|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| a) les coordonnées de $G$ et celles de $M_{AB}$      | g) l'équation de $m_{AB}$ et les coordonnées de $C$      |
| b) les coordonnées de $A$ et celles de $B$           | h) l'équation de $m_{AB}$ et les coordonnées de $A$      |
| c) les coordonnées de $C$ et celles de $G$           | i) l'équation de $h_C$ et les coordonnées de $B$         |
| d) les coordonnées de $A$ et celles de $M_{AB}$      | j) l'équation de $d_{AB}$ et les coordonnées de $C$      |
| e) les coordonnées de $C$ et celles de $M_{AB}$      | k) l'équation de $m_{AB}$ et les coordonnées de $M_{AB}$ |
| f) les coordonnées de $M_{BC}$ et celles de $M_{AB}$ | l) l'équation de $h_C$ et les coordonnées de $M_{AB}$    |

**Bissectrice d'un angle****Exercice 3.13** Soit les droites d'équation

$$d_1 : 3x + 4y + 6 = 0$$

$$d_2 : y + 6 = 0$$

Calculer les équations cartésiennes canoniques de leurs bissectrices et vérifier qu'elles sont perpendiculaires.

**Exercice 3.14** Soit le triangle  $ABC$  où  $A\left(-\frac{10}{3}; 2\right)$ ,  $B(10; -8)$  et  $C(10; 12)$ .

- Calculer une équation cartésienne canonique pour chaque bissectrice intérieure du triangle  $ABC$ .
- Vérifier que les bissectrices internes se coupent en un seul point  $E$ .
- Que peut-on dire de la distance du point  $E$  avec les côtés du triangle  $ABC$ ?

**Problèmes divers****Exercice 3.15** Soit le triangle  $ABC$  où  $A(0; -4)$ ,  $B(12; 2)$  et  $C(5; 11)$ .

Montrer que les points suivants sont alignés et calculer une équation cartésienne de la droite passant par ces points :

- $D$  : centre du cercle circonscrit
- $G$  : centre de gravité
- $H$  : orthocentre

**Exercice 3.16** Calculer l'aire d'un carré dont l'un des sommets est  $A(2; -5)$  et une de ses arêtes a pour support la droite d'équation  $d : x = 2y + 7$ .**Exercice 3.17** Calculer l'aire du parallélogramme  $ABCD$  tel que :

- $A(2; 1)$                        $B(5; 3)$                        $D(4; 7)$
- $A(4; -1)$                        $B(3; 3)$                        $C(-2; 1)$

**Exercice 3.18** Calculer l'aire du polygone dont les sommets sont :

- $A(3; 0)$                        $B(1; 4)$                        $C(-5; -1)$                        $D(0; -6)$
- $A(2; 4)$                        $B(-4; 0)$                        $C(0; -7)$                        $D(9; -1)$                        $E(1; 1)$

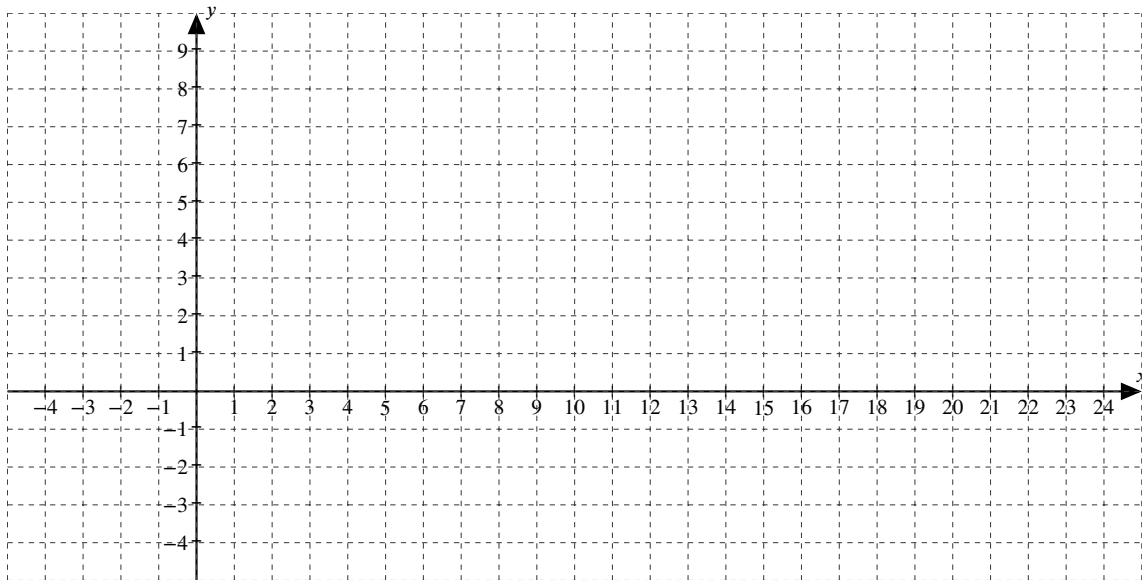
**Exercice 3.19** Soit un parallélogramme  $ABCD$  dont on connaît le sommet  $A(10;1)$ , les équations de deux droites formant deux de ses côtés :

$$a : x - 2y + 5 = 0$$

$$b : -x + 2y + 8 = 0$$

ainsi que l'équation d'une de ses diagonales :  $d : 6x - 25y = -43$

Faites un dessin de la situation puis calculer les coordonnées des sommets  $B$ ,  $C$  et  $D$ .



**Exercice 3.20** Soit les droites d'équations :

$$a : 4x + y = 3$$

$$b : y = \frac{1}{2}x + 2$$

- Calculer l'angle formé par la droite  $a$  et l'axe  $Ox$ .
- Calculer l'angle formé par la droite  $b$  et l'axe  $Oy$ .
- Calculer l'angle formé par les droites  $a$  et  $b$ .

**Exercice 3.21** On considère un trapèze isocèle  $ABCD$  de base  $AD$  et les points de coordonnées

$$A(-4; -1)$$

$$B(-3; 2)$$

$$C(1; 4)$$

Calculer les coordonnées du sommet  $D$ .

**Exercice 3.22** Soit le triangle  $ABC$  dont les sommets sont les points de coordonnées :

$$A(4; -1)$$

$$B(-2; -3)$$

$$C(5; 2)$$

Calculer les équations de  $m_{BC}$ ,  $b_A$ ,  $h_A$  et  $g_A$ .

**Exercice 3.23** Soit le triangle  $ABC$ . On donne :

$$h_A : x + 2y - 8 = 0$$

$$g_C : 6x - 7y - 31 = 0$$

$$m_{AB} : x - 2y - 6 = 0$$

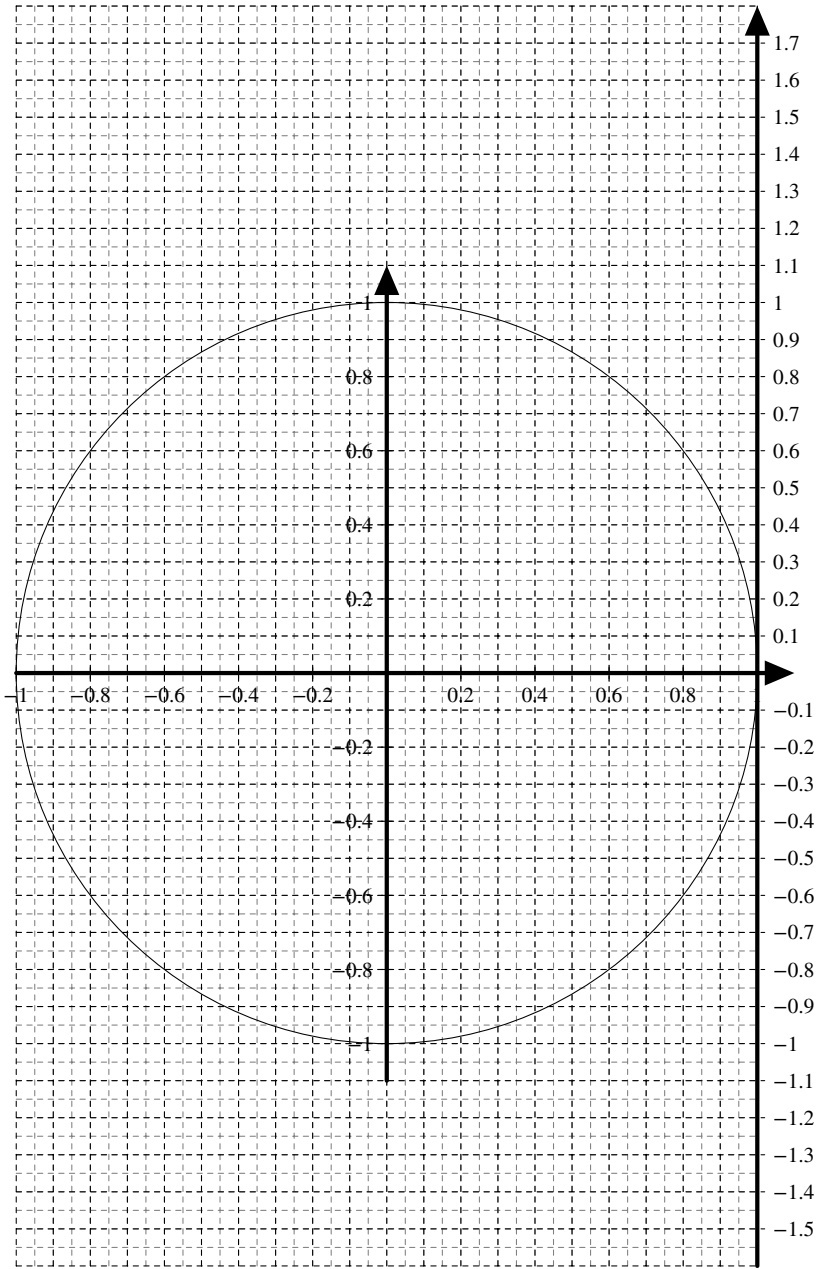
Déterminer les coordonnées des sommets de ce triangle.

8.4 Fonctions et équations trigonométriques

Rappels : Rapports trigonométriques

**Exercice 4.1** Estimer les rapports trigonométriques des angles ci-dessous grâce au cercle trigonométrique. Comparer ensuite aux valeurs données par la calculatrice.

|       |     |      |      |      |      |       |      |
|-------|-----|------|------|------|------|-------|------|
| angle | 50° | 320° | 225° | 130° | 450° | −540° | 410° |
| sin   |     |      |      |      |      |       |      |
| cos   |     |      |      |      |      |       |      |
| tan   |     |      |      |      |      |       |      |



**Rappels : Degrés et radians****Exercice 4.2** Les angles suivants sont donnés par leur mesure en radians. Calculer leur mesure en degrés.

a)  $\frac{5\pi}{6}$

d)  $4\pi$

g) 1

b)  $\frac{7\pi}{3}$

e)  $-\frac{\pi}{6}$

h)  $-0,75$

c)  $\frac{11\pi}{10}$

f)  $\frac{5\pi}{4}$

i) 3,8

**Exercice 4.3** Les angles suivants sont donnés par leur mesure en degrés. Calculer leur mesure en radians. Répondre sous forme de fractions de  $\pi$ .

a)  $70^\circ$

c)  $810^\circ$

e)  $336^\circ$

b)  $85^\circ$

d)  $-10^\circ$

f)  $900^\circ$

**Rappels : Propriétés****Exercice 4.4** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier dans chaque cas à l'aide d'un petit cercle trigonométrique.

a)  $\sin(10^\circ) = \sin(170^\circ)$

d)  $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

b)  $\cos(140^\circ) = -\cos(40^\circ)$

e)  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

c)  $\cos(70^\circ) = \sin(20^\circ)$

f)  $\tan(40^\circ) = \tan(220^\circ)$

**Exercice 4.5** Déterminer, sans machine à calculer, les valeurs exactes des rapports trigonométriques des angles suivants :

a)  $120^\circ$

b)  $945^\circ$

c)  $270^\circ$

**Exercice 4.6** Déterminer, sans machine à calculer, les valeurs exactes des rapports trigonométriques des angles suivants :

a)  $-\frac{\pi}{3}$

b)  $-\frac{5\pi}{6}$

c)  $6\pi$

**Exercice 4.7** A l'aide du cercle trigonométrique, comparer les rapports trigonométriques de  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  avec ceux de  $\alpha$ .**Exercice 4.8** A l'aide du cercle trigonométrique, comparer les rapports trigonométriques de  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  avec ceux de  $\alpha$ .

**Rappels : Résolution d'équations trigonométriques simples****Exercice 4.9** Résoudre et répondre en degrés.

a)  $\cos(\alpha) = 0,25$

c)  $\tan(\alpha) = 2$

e)  $\cos(\alpha) = 0$

b)  $\sin(\alpha) = -0,7$

d)  $\sin(\alpha) = 2$

f)  $\tan(\alpha) = 0$

**Exercice 4.10** Quelles sont les solutions de l'équation  $\cos(\alpha) = -0,4$  entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$  ?**Exercice 4.11** Quelles sont les solutions de l'équation  $\sin(\alpha) = -0,4$  entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$  ?**Exercice 4.12** Quelles sont les solutions de l'équation  $\tan(\alpha) = -0,4$  entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$  ?**Exercice 4.13** Résoudre et répondre en radians.

a)  $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$

c)  $\sin(\alpha) = 0$

e)  $\cos(\alpha) = 0,2$

b)  $\tan(\alpha) = 4$

d)  $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f)  $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$

**Exercice 4.14** Quelles sont les solutions de l'équation  $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  entre 0 et  $2\pi$  ?**Exercice 4.15** Quelles sont les solutions de l'équation  $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$  entre 0 et  $2\pi$  ?**Exercice 4.16** Quelles sont les solutions de l'équation  $\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  entre 0 et  $2\pi$  ?**D'autres équations trigonométriques****Exercice 4.17**

a) Résoudre  $\sin(5\alpha) = -\frac{1}{2}$  et répondre en radians.

b) Quelles sont les solutions de cette équation qui sont entre 0 et  $2\pi$  ?

**Exercice 4.18**

a) Résoudre  $\tan\left(11\alpha + \frac{\pi}{5}\right) = 1$  et répondre en radians.

b) Quelles sont les solutions de cette équation qui sont entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  ?

c) Résoudre  $\cos\left(7\alpha - \frac{\pi}{10}\right) = 0$  et répondre en radians.

d) Quelles sont les solutions de cette équation qui sont entre 0 et  $\pi$  ?

**Exercice 4.19** Résoudre en radians.

a)  $\cos(3\alpha) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

b)  $\sin(3\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

**Exercice 4.20** Résoudre les équations suivantes et répondre en radians.

a)  $\cos^2(\alpha) = 1$

b)  $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{4}$

c)  $\tan^2(\alpha) = 3$

**Exercice 4.21** Résoudre les équations suivantes et répondre en radians.

a)  $\sin^2(\alpha) = \frac{3}{4}$

b)  $\tan^2(\alpha) = 1$

c)  $\sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha)$

**Exercice 4.22** Résoudre les équations suivantes et répondre en radians.

a)  $2\sin^2(\alpha) - 5\sin(\alpha) + 2 = 0$

b)  $2\cos^2(\alpha) - 3\cos(\alpha) + 1 = 0$

c)  $\tan^2(\alpha) + 2\tan(\alpha) = -1$

**Exercice 4.23** Résoudre les équations suivantes et répondre en radians.

a)  $2\cos^2(\alpha) - \sin(\alpha) = 1$

b)  $5\sin(\alpha) = 6\cos^2(\alpha)$

### Les fonctions trigonométriques

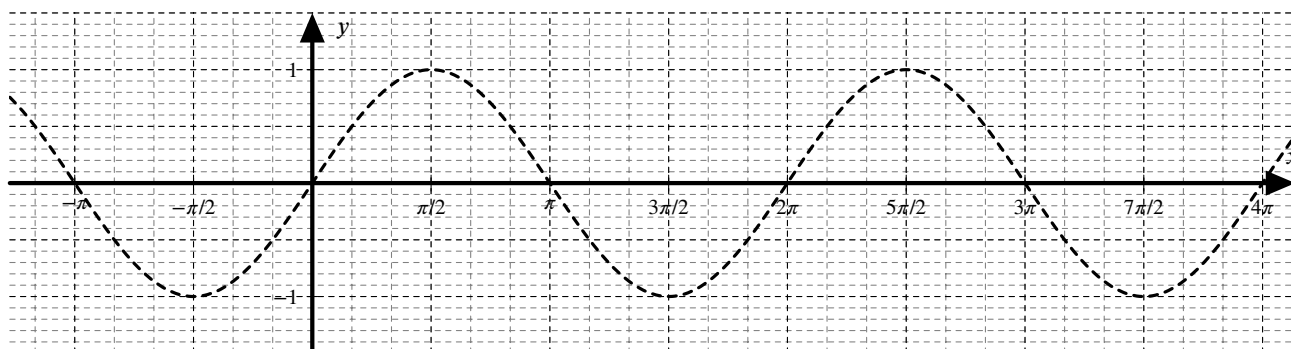
**Exercice 4.24**

a) Compléter le tableau de valeurs à l'aide de celui de  $\sin(x)$ .

|           |   |                 |                 |                 |                  |                  |       |                  |                  |                  |                  |                   |        |
|-----------|---|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|--------|
| $x$       | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
| $\sin(x)$ | 0 | 0,5             | 0,87            | 1               | 0,87             | 0,5              | 0     | -0,5             | -0,87            | -1               | -0,87            | -0,5              | 0      |

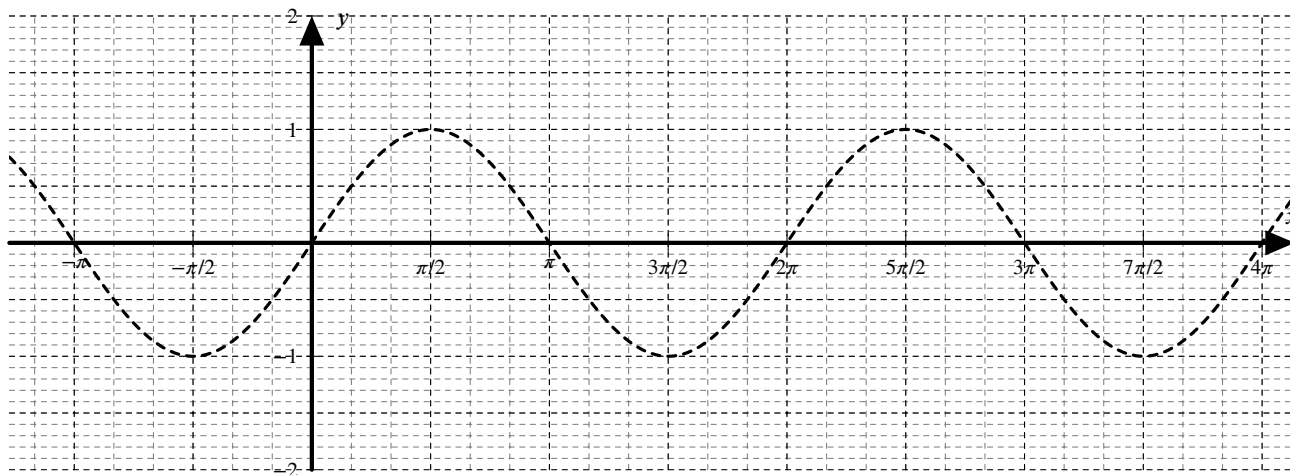
|            |   |                 |                 |                 |                  |                  |       |
|------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-------|
| $x$        | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
| $\sin(2x)$ |   |                 |                 |                 |                  |                  |       |

b) Représenter graphiquement la fonction  $f(x) = \sin(2x)$  et comparer au graphe de la fonction  $g(x) = \sin(x)$  qui est déjà dessiné.



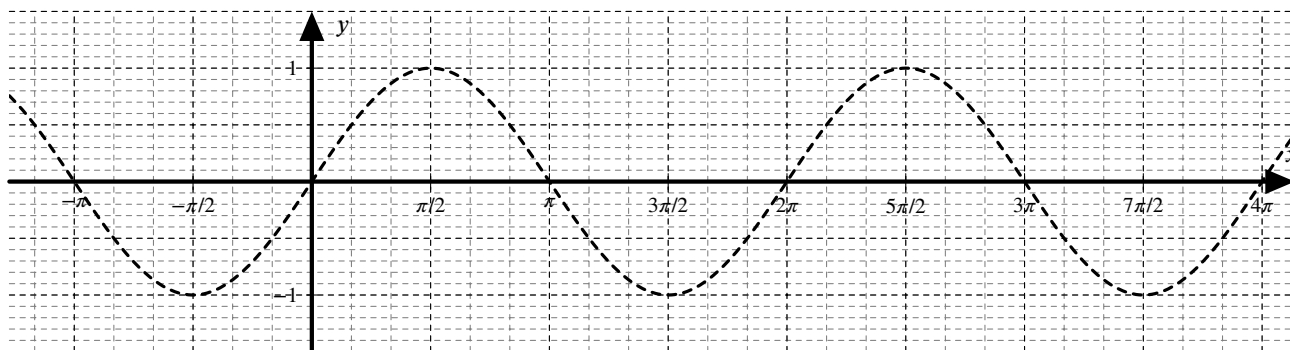
**Exercice 4.25** Mêmes consignes qu'à l'exercice précédent.

|            |   |                 |                 |                 |                  |                  |       |                  |                  |                  |                  |                   |        |
|------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|--------|
| $x$        | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
| $2\sin(x)$ |   |                 |                 |                 |                  |                  |       |                  |                  |                  |                  |                   |        |



**Exercice 4.26** Mêmes consignes qu'à l'exercice précédent.

|                                      |   |                 |                 |                 |                  |                  |       |                  |                  |                  |                  |                   |
|--------------------------------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|
| $x$                                  | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ |
| $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ |   |                 |                 |                 |                  |                  |       |                  |                  |                  |                  |                   |



**Exercice 4.27** En observant le graphe de  $\sin(x)$ , déterminer si ces égalités sont vraies ou fausses. Justifier.

a)  $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

c)  $\sin(-x) = -\sin(x)$

b)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

d)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$

**Exercice 4.28** Soit la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = \cos(7x)$ .

- a) Quel est l'ensemble de définition de  $f$ ?
- b) Quels sont ses zéros?
- c) Quelle est la période de  $f$ ?
- d) Étudier le signe de  $f$ .

**Exercice 4.29** Soit la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{5}\right)$ .

- a) Quel est l'ensemble de définition de  $f$ ?
- b) Quels sont ses zéros?
- c) Quelle est la période de  $f$ ?
- d) Étudier le signe de  $f$ .

**Exercice 4.30** Soit la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = -3\tan(x)$ .

- a) Quel est l'ensemble de définition de  $f$ ?
- b) Quels sont ses zéros?
- c) Quelle est la période de  $f$ ?
- d) Étudier le signe de  $f$ .

**Exercice 4.31** Soit la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

- a) Quel est l'ensemble de définition de  $f$ ?
- b) Quels sont ses zéros?
- c) Quelle est la période de  $f$ ?
- d) Étudier le signe de  $f$ .

**Exercice 4.32** Soit la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = -7\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{5}\right)$ .

- a) Quel est l'ensemble de définition de  $f$ ?
- b) Quels sont ses zéros?
- c) Quelle est la période de  $f$ ?
- d) Étudier le signe de  $f$ .

**Exercice 4.33** Ces fonctions sont-elles périodiques ? Si oui, donner la période.

a)  $f(x) = 8 \sin(5x + \pi)$

c)  $f(x) = \cos(x) + 3$

e)  $f(x) = \cos(x) + \sin(3x)$

b)  $f(x) = \tan^2(x)$

d)  $f(x) = \cos(x) + 3x$

f)  $f(x) = \cos(x) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

**Exercice 4.34** Que peut-on dire sur le signe des fonctions ci-dessous ?

a)  $f(x) = \sin(x) + 1$

c)  $f(x) = \sin(3x) + 1$

e)  $f(x) = \sin(x) - 2$

g)  $f(x) = \sin^2(x) + 1$

b)  $f(x) = \sin(x) + 2$

d)  $f(x) = \sin(x) - 1$

f)  $f(x) = \sin^2(x)$

h)  $f(x) = \sin^2(x) - 1$

**Exercice 4.35** Donner l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous.

a)  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

c)  $f(x) = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sin(x) + \frac{1}{2}}$

e)  $f(x) = \frac{x - 15\pi}{\sin\left(\frac{x}{5}\right)}$

b)  $f(x) = \frac{x - \pi}{2\sin^2(x) - 1}$

d)  $f(x) = \frac{8x + 2}{\tan(x) + 1}$

f)  $f(x) = \frac{\tan(x) - \sqrt{3}}{8x + 2}$

**Exercice 4.36** Quels sont les zéros des fonctions de l'exercice précédent ?

### Les dérivées de fonctions trigonométriques

**Exercice 4.37** Déterminer la dérivée des fonctions données par les expressions ci-dessous.

a)  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

c)  $f(x) = x^5 \sin(x)$

e)  $f(x) = 7 \sin(x^5)$

b)  $f(x) = 8 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

d)  $f(x) = \sin^5(x)$

f)  $f(x) = \sin^5(x^5)$

**Exercice 4.38** Déterminer la dérivée des fonctions données par les expressions ci-dessous.

a)  $f(x) = 10 \cos(5x + \pi)$

c)  $f(x) = 2 \cos^3(x)$

e)  $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

b)  $f(x) = x^2 \cos(x)$

d)  $f(x) = \cos^5(x^2)$

f)  $f(x) = 5x \cos(x^2)$

**Exercice 4.39** Déterminer la dérivée des fonctions données par les expressions ci-dessous.

a)  $f(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

c)  $f(x) = \tan\left(\frac{7}{x^3}\right)$

e)  $f(x) = x^4 \tan(x)$

b)  $f(x) = 3 \tan(x) + 5$

d)  $f(x) = \sin(x) \cos(x) \tan(x)$

f)  $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \sin(x)}$

**Étude de la croissance de fonctions trigonométriques****Exercice 4.40** Étudier la croissance des fonctions données par les expressions ci-dessous.

a)  $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

b)  $f(x) = \tan(x) - x$

c)  $f(x) = \frac{\cos(x)+2}{\cos(x)+3}$

**Calculs de limites par la théorème de Bernouilli-l'Hospital****Exercice 4.41** Calculer les limites.

a)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^3 - 5x^2 - x + 5}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-4}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 7x + 6}{5x^2 + 15x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{8x^3 - x + 3}$

**Exercice 4.42** Calculer les limites.

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 2x + 1}{x^8 - 1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - x - 30}{x^2 - 3x + 2}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^6 - x^4 - 1}{3x^6 - 3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^7 - 2x + 1}{x^8 - 1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - x - 30}{x^2 - 3x + 2}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^6 - x^4 - 1}{3x^6 - 3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 - 2x + 1}{x^8 - 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x - 30}{x^2 - 3x + 2}$

i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6 - x^4 - 1}{3x^6 - 3}$

**Exercice 4.43** Calculer les limites.

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{1 - x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1} - 4}{x^2 - 25}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt[3]{x+4} - 2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 5}{5 - x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-6} + 4}{x+3}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1} - 2}$

**Exercice 4.44** Calculer les limites.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin(x)}{\cos^2(x)}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin(x)}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin(x)}{\cos^2(x)}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x - \tan(x)}$

### Étude de fonctions trigonométriques

**Exercice 4.45** Étudier les fonctions données par les expressions ci-dessous et esquisser leurs graphes.

a)  $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

b)  $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$

c)  $f(x) = \frac{\sin(x) + 1}{1 - \sin(x)}$

**Exercice 4.46** Étudier les fonctions données par les expressions ci-dessous et esquisser leurs graphes.

a)  $f(x) = \sin^2(x) - 2\cos(x)$

b)  $f(x) = 4\cos(x)(1 + \sin(x))$

c)  $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}$

## 8.5 Exponentielles

### Introduction

**Exercice 5.1** Je plie une feuille de 0,1 mm d'épaisseur en deux, puis je replie en deux, et je continue de la même manière.

a) Compléter le tableau ci-dessous :

| n° de l'étape | nb de couches<br>de papier | épaisseur totale<br>en mm |
|---------------|----------------------------|---------------------------|
| 0             | 1                          | 0,1                       |
| 1             |                            |                           |
| 2             |                            |                           |
| 3             |                            |                           |
| 4             |                            |                           |
| $x$           |                            |                           |

b) Combien de fois faut-il plier pour dépasser 1 km d'épaisseur ?

### Définition

**Exercice 5.2** Donner l'expression de la fonction.

a)  $\exp_3(x)$

c)  $\exp_{1/3}(-x)$

b)  $\exp_x(3)$

d)  $\exp(x)$

Est-ce que toutes les fonctions ci-dessus sont des fonctions exponentielles ?

**Exercice 5.3** Calculer sans calculatrice.

- |                                         |                             |                                            |
|-----------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------------|
| a) $\exp_{15}(2)$                       | h) $\exp(-5)$               | o) $\exp(0)$                               |
| b) $\exp_7(-2)$                         | i) $\exp_{4/5}(-1)$         | p) $\exp_{1/2}(2)$                         |
| c) $\exp_2(-7)$                         | j) $\exp_{100'000}(0,2)$    | q) $\exp_2\left(\frac{1}{2}\right)$        |
| d) $\exp_{27}\left(\frac{1}{3}\right)$  | k) $\exp_{1/100'000}(0,2)$  | r) $\exp_{1/2}(-2)$                        |
| e) $\exp_{16}\left(-\frac{1}{4}\right)$ | l) $\exp_{100'000}(-0,2)$   | s) $\exp_2\left(-\frac{1}{2}\right)$       |
| f) $\exp_{10}(2)$                       | m) $\exp_{1/100'000}(-0,2)$ | t) $\exp_{36/49}\left(-\frac{1}{2}\right)$ |
| g) $\exp_2(10)$                         | n) $\exp(1)$                | u) $\exp_7\left(\frac{1}{3}\right)$        |

**Exercice 5.4** Compléter le tableau de valeurs, sans utiliser de calculatrice.

|                 |    |                |    |                |   |               |   |               |   |
|-----------------|----|----------------|----|----------------|---|---------------|---|---------------|---|
| $x$             | -2 | $-\frac{3}{2}$ | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 |
| $\exp_{100}(x)$ |    |                |    |                |   |               |   |               |   |

**Exercice 5.5** Compléter le tableau de valeurs, sans utiliser de calculatrice.

|                  |    |                |                |   |               |               |   |               |               |
|------------------|----|----------------|----------------|---|---------------|---------------|---|---------------|---------------|
| $x$              | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{3}$ | 1 | $\frac{7}{6}$ | $\frac{4}{3}$ |
| $\exp_{1/64}(x)$ |    |                |                |   |               |               |   |               |               |

### Propriétés

**Exercice 5.6** Remplacer les "... " par un nombre entier ou une fraction irréductible.

- |                                          |                                                            |                                                           |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| a) $2^5 \cdot 8^3 = 2^{\dots}$           | d) $\frac{3^5 \cdot 3^4}{3^{-6}} \cdot 3^{-3} = 3^{\dots}$ | g) $\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[5]{3^4}} = 3^{\dots}$      |
| b) $3^5 \cdot \frac{1}{3^3} = 3^{\dots}$ | e) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = 5^{\dots}$                | h) $\left(\sqrt{7^3}\right)^5 \cdot \sqrt{7} = 7^{\dots}$ |
| c) $(3^3)^2 = 9^{\dots}$                 | f) $\sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt{4^3} = 4^{\dots}$            | i) $\frac{\sqrt[4]{7^2}}{7^3} \sqrt[3]{7^4} = 7^{\dots}$  |

**Exercice 5.7** Simplifier les expressions suivantes.

a)  $9 \cdot 3^{4x-2}$

c)  $\frac{32^x \cdot 2^5}{16^{x+1}}$

e)  $\frac{1}{49} (7^{x+1})^x$

b)  $\frac{5^{2x+7}}{5^{x-3}}$

d)  $\frac{2^x + 6^x}{2^x}$

f)  $(3^x \cdot 3)^2 \cdot 3^{4x-2}$

**Exercice 5.8** Écrire sous la forme  $k \cdot a^{bx}$  avec  $a, b$  et  $c \in \mathbb{Z}$ .  $a$  doit être positif et le plus petit possible.

a)  $\exp_2(x) \cdot \exp_5(x)$

e)  $\exp_4(x+1) \cdot \exp_4(x+1)$

b)  $\exp_2(x) \cdot \exp_2(3x+5)$

f)  $(\exp_3(5x-1))^2$

c)  $\frac{\exp_5(4x+1)}{\exp_5(5-x)}$

g)  $\left(\frac{\exp_9(1+x)}{3}\right)^2$

d)  $\exp_4(x+1) \cdot \exp_3(x+1)$

h)  $\exp_4(x+1) + \exp_4(x+1)$

**Exercice 5.9** Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Compléter les expressions suivantes.

a)  $\frac{a^x}{a^3} = a^{(\dots)} = \frac{1}{a^{(\dots)}}$

e)  $\frac{a^x}{a^{x+3}} = a^{(\dots)}$

b)  $\frac{a}{\sqrt[5]{a^x}} = a^{(\dots)}$

f)  $a^{2x} \cdot (a^x)^{x+3} = a^{(\dots)}$

c)  $\sqrt{a} \cdot a^{x+2} = a^{(\dots)}$

g)  $\left(\frac{a^{x+1}}{a^2}\right)^{x-4} = a^{(\dots)}$

d)  $(a^{2x+1})^{2x+1} = a^{(\dots)}$

h)  $(a-3)^x \cdot (a+3)^x = (\dots)^x$

## Équations exponentielles

**Exercice 5.10** Résoudre.

a)  $25^{x+3} = 625$

f)  $(10^{x+5})^2 = 0,001$

k)  $5^{2x+4} - 125^x = 0$

b)  $13^{3x-6} = 1$

g)  $(2^{x-1})^x - 4 = 0$

l)  $4^{3x} \cdot 16^{2x} = \sqrt{2}$

c)  $2^{5x-2} = 4^{8-x}$

h)  $3^{x-1} + 27 = 0$

m)  $(5^{x-1})^x - 125^x = 0$

d)  $\frac{6^{4-x}}{3^{4-x}} = 1024$

i)  $\frac{11^{2x}}{121^x} = 1$

n)  $2^{3x-2} \cdot 5^{3x-2} = 10'000$

e)  $\frac{9^{3+x}}{3^x} = 0$

j)  $\frac{7^{4x+5}}{49^{x-9}} = 7$

o)  $6^{3x-2} - 6^{3x-4} = 0$

**Exercice 5.11** Résoudre.

a)  $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 20 = 0$

c)  $16^x - 20 \cdot 4^x + 64 = 0$

b)  $10 \cdot 3^x + 9^x = -90$

d)  $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} = 32$

**Exercice 5.12** Résoudre.

a)  $2 \cdot 5^{-x} - 5^x = 1$

b)  $4 \cdot 2^{-3x} - 5 \cdot 2^{-x} + 2^x = 0$

**Exercice 5.13** Résoudre les équations suivantes.

a)  $2^{x+6} = 2^{3x+4}$

e)  $2^x - 16 \cdot 2^{3x+2} = 0$

i)  $3 \cdot 2^{2(x+1)} - 10 \cdot 2^{x+2} = 32$

b)  $7^{8x^2+4} = 7^{(2-3x)^2}$

f)  $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

j)  $2 \cdot 2^{6x-1} + 3 \cdot 2^{3x+1} + 9 = 0$

c)  $4^x = 16^{2x+5}$

g)  $27^{x+2} = 3^{5x+8}$

k)  $3^x + 9^x = 90$

d)  $7^{2x+1} = 1$

h)  $\frac{16^x \cdot 125^x}{5} = \frac{10^4}{5^{x+1}}$

l)  $3^{x+1} + 3^{-x} = 4$

**8.6 Logarithmes****Définition****Exercice 6.1** Calculer sans calculatrice.

a)  $\log_2(64)$

c)  $\log_{11}(121)$

e)  $\log_9(3)$

b)  $\log_5(625)$

d)  $\log_7(1)$

f)  $\log_2(0,5)$

**Exercice 6.2** Calculer sans calculatrice.

a)  $\text{Log}(1'000'000)$

c)  $\text{Log}(1)$

e)  $\text{Log}(\sqrt{10})$

g)  $\text{Log}(10)$

b)  $\text{Log}(0,01)$

d)  $\text{Log}\left(\frac{1}{1000}\right)$

f)  $\text{Log}\left(\sqrt[5]{1000}\right)$

h)  $\text{Log}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right)$

**Exercice 6.3** Calculer sans calculatrice.

a)  $\text{Log}(10'000)$

d)  $\log_2(1024)$

g)  $\log_7(\sqrt{7})$

j)  $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$

b)  $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$

e)  $\log_2(512)$

h)  $\log_3\left(\sqrt[5]{3^2}\right)$

k)  $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[5]{64}}\right)$

c)  $\log_5(1)$

f)  $\log_3(3)$

i)  $\log_4\left(\sqrt[5]{64}\right)$

l)  $\text{Log}(0,001)$

**Exercice 6.4** Calculer sans calculatrice.

a)  $\ln(e^2)$

c)  $\ln(\sqrt[4]{e})$

e)  $\ln(1)$

b)  $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$

d)  $\ln(e)$

f)  $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^7}}\right)$

**Exercice 6.5** Calculer sans calculatrice.

a)  $\log_2(8)$

c)  $\log_5(-5)$

e)  $\log_4(8)$

b)  $\log_8(2)$

d)  $\log_{64}(4)$

f)  $\log_{625}(125)$

### Propriétés

**Exercice 6.6** Calculer sans calculatrice.

a)  $\log_2(40) + \log_2(3) - \log_2(15) =$

c)  $3\log_{25}(40) - \log_{25}(64) - \log_{25}(8) =$

b)  $\text{Log}(14) - \text{Log}(2000) - \text{Log}(70) =$

d)  $4\log_3(10) - 2\log_3(8100) =$

**Exercice 6.7** Résoudre sans calculatrice.

a)  $\text{Log}(12) + \text{Log}(5) = \text{Log}(x)$

c)  $\ln(16) + 2\ln(3) - 2\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(9) = \ln(x)$

b)  $2\ln(5) - 3\ln(2) = \ln(x)$

d)  $\frac{\text{Log}(20) + \text{Log}(100) - \text{Log}(2)}{\text{Log}(5000) - \text{Log}(5) + \text{Log}(0,1)} = \text{Log}(x)$

**Exercice 6.8** À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approximative.

a)  $\log_2(40)$

b)  $\log_{40}(2)$

c)  $\text{Log}(70)$

d)  $\ln(3)$

**Exercice 6.9** Sachant que  $\log_5(2) \approx 0,4307$  et  $\log_5(3) \approx 0,6826$  calculer.

a)  $\log_5(6)$

c)  $\log_5(\sqrt{2})$

e)  $\log_5(36)$

b)  $\log_5(16)$

d)  $\log_5(0,5)$

f)  $\log_5\left(\frac{8}{27}\right)$

### Retour aux équations exponentielles

**Exercice 6.10** Résoudre en donnant la réponse sous forme exacte.

a)  $17^x + 1 = 10$

d)  $4 \cdot e^{5x-2} = 1$

g)  $5^{x+8} = 3 \cdot 5^{2x}$

b)  $17^{x+1} = 10$

e)  $5 \cdot 2^{3x+1} - 3 = 167$

h)  $7^{3x} = \frac{7^{x+1}}{8}$

c)  $7 + 10^{3x-6} = 9$

f)  $7 \cdot e^{3-x} = e^5$

i)  $3 = 5^{x^2+2}$

**Exercice 6.11** Résoudre en donnant la réponse sous forme exacte puis au centième près.

a)  $5 \cdot (1+x)^3 = 1000$

d)  $5 \cdot (1+0,2)^3 = x$

g)  $7 \cdot (1+x)^4 = 300$

b)  $x \cdot (1+0,2)^3 = 1000$

e)  $5 \cdot (1+0,2)^{3/x} = 1000$

h)  $7 \cdot (1+0,5)^{4x} = 300$

c)  $5 \cdot (1+0,2)^x = 1000$

f)  $5 \cdot (1+0,2)^{x/3} = 1000$

i)  $7 \cdot (1+0,5)^{x/4} = 300$

**Exercice 6.12** Expliquer pourquoi l'ensemble des solutions de l'équation :

$$5^x = 3^{x+2}$$

peut s'écrire des différentes manières ci-dessous :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{2 \log_5(3)}{1 - \log_5(3)} \right\} = \left\{ \frac{2}{\log_3(5) - 1} \right\} = \left\{ \frac{2 \operatorname{Log}(3)}{\operatorname{Log}(5) - \operatorname{Log}(3)} \right\} = \left\{ \frac{\operatorname{Log}(9)}{\operatorname{Log}\left(\frac{5}{3}\right)} \right\}$$

**Exercice 6.13** Résoudre (en valeur exacte) les équations suivantes.

a)  $2^{5x-3} = 5^{2x-3}$

b)  $3^{-x+2} = 7^{2x}$

### Équations logarithmiques

**Exercice 6.14** Résoudre les équations.

a)  $x = \log_2(32)$

c)  $\log_x(256) = 4$

e)  $\log_4(x) = 3$

b)  $\log_2(x) = 4$

d)  $x = \log_5(125)$

f)  $\log_x(1000) = 3$

**Exercice 6.15** Résoudre.

a)  $\ln(2x+1) = 5$

b)  $2 \log_{25}(x) - 3 = 0$

c)  $3 \log_{64}(x+1) = -1$

d)  $\log_7(2x) = 0$

**Exercice 6.16** Résoudre.

a)  $\operatorname{Log}(x-4) = \operatorname{Log}(10-x)$

c)  $2 \operatorname{Log}(x-3) = \operatorname{Log}(25-6x)$

b)  $\log_2(x-4) = \log_2(2-x)$

d)  $\ln(x^2+3) = \ln(4x)$

**Exercice 6.17** Résoudre.

a)  $\operatorname{Log}(x-3) + \operatorname{Log}(x) = 1$

c)  $\log_3(x+10) - \log_3(x) = 1$

b)  $\log_2(5-x) + \log_2(x+5) = 4$

d)  $\log_3(x-10) - \log_3(x) = 1$

**Exercice 6.18** Résoudre.

- |                                                                         |                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\text{Log}(x+2) - \text{Log}(3) = \text{Log}(2x-1) + \text{Log}(7)$ | e) $\log_3(35 - x^3) = 3 \log_3(5 - x)$                                            |
| b) $\text{Log}(x+2) + \text{Log}(x-1) = \text{Log}(18)$                 | f) $\text{Log}(x^2 - 7) = 2 \text{Log}(x+3)$                                       |
| c) $\text{Log}(2x-3) + \text{Log}(3x+10) = 4 \text{Log}(2)$             | g) $\ln(20) + \ln(x^2 - 9) - \ln(x+3) = 1 + \ln(2x+6)$                             |
| d) $\log_2(x^2 - 4) = 2 \log_2(x+3)$                                    | h) $\text{Log}(20) + \text{Log}(x^2 - 9) - \text{Log}(x+3) = 1 + \text{Log}(2x+6)$ |

**8.7 Applications des exponentielles et des logarithmes****Les intérêts composés**

**Exercice 7.1** En 1980, les banques proposaient des comptes-épargnes pour les jeunes avec un taux d'intérêts annuel fixe 5%.

- a) Mes parents ont déposé CHF 2000.– sur un tel compte à ma naissance et n'y ont plus touché. Quelle somme vais-je pouvoir retirer à mes 20 ans ?
- b) Au bout de combien d'années la somme sur le compte a-t-elle dépassé le double de la somme de départ ?
- c) Avec ce taux d'intérêts, quelle somme auraient-ils dû déposer pour que je puisse retirer CHF 10'000.– ?
- d) Pour ce versement de CHF 2000.–, quel taux d'intérêts aurait-il fallu pour que je puisse retirer CHF 10'000.– à mes 20 ans ?
- e) Si je fais la même chose pour mon enfant avec le taux d'intérêts actuel de 0,5%, quelle somme aura-t-il à ses 20 ans ?

**Exercice 7.2** Un capital de CHF 5'000.– a été placé il y a 15 ans. Ce capital et les intérêts produits font aujourd'hui CHF 8'019,85. Quel était le taux annuel, si le placement était à intérêts composés ?

**Exercice 7.3** Quelle serait la valeur acquise en 2000 ans par un capital de CHF 1.–, placé à intérêts composés au taux annuel de 3,5%.

**Exercice 7.4** A quel taux faut-il placer un capital pour qu'il double en 12 ans ?

**Exercice 7.5** En combien d'années une somme placée à 6% triple-t-elle ?

**Processus de croissance et de décroissance**

**Exercice 7.6** Au début d'une épidémie, on a constaté que le nombre de malades triple toutes les 5 heures.

- Comment calcule-t-on le nombre de malades  $t$  heures après l'apparition du premier ?
- Au bout de combien de temps dépasse-t-on le millier de malades ?

**Exercice 7.7** On étudie la propagation d'une rumeur sur les réseaux sociaux. On constate qu'il y a plusieurs phases. Tout d'abord, le nombre de personnes ayant partagé l'information double toutes les 6 minutes, jusqu'à atteindre 1'000'000 de partages. Ensuite, il faut 4 heures pour passer à 2'000'000 de partages. Finalement, la croissance continue encore lentement pendant des dizaines d'années.

- Combien de temps dure la première phase ?
- Si la deuxième phase est aussi une croissance exponentielle, quel est le taux de croissance par heure, en % ? Et par minute ?

**Exercice 7.8** Si la population des insectes décroît de 1% chaque année, en combien de temps aura-t-elle diminué de moitié ?

**Exercice 7.9** Une firme d'informatique vient d'acquérir de nouveaux ordinateurs au coût de CHF 400'000.– et ces équipements se déprécient de 20% par année. Après combien d'années ces équipements ne vaudront-ils plus que le quart de leur valeur initiale.

**Exercice 7.10** Une forêt renferme aujourd'hui 200'000 m<sup>3</sup> de bois. Combien en contenait-elle il y a 15 ans si l'accroissement annuel de la quantité de bois est de 3,25% ?

**Exercice 7.11** Depuis 1990, la population d'une région rurale diminue régulièrement année après année. En 1990, on y décomptait 25'000 personnes alors qu'en 2000, il n'y avait plus que 15'000 personnes.

- Modéliser cette situation à l'aide d'une formule donnant la population  $P(t)$  en fonction du temps  $t$ , en partant d'un modèle de décroissance exponentielle.
- Au bout de combien d'années cette population sera-t-elle pour la première fois inférieure à 10'000 habitants.

**Exercice 7.12** Quel est le placement le plus avantageux 10 ans à 5% puis 10 ans à 3% ou 20 ans à 4% ? Calculer l'augmentation totale en % du montant de départ de chaque variante .

**Exercice 7.13** Quelle est l'augmentation exprimée en % du capital initial d'un placement :

- à 3% pendant 21 ans ?
- à 4% pendant 26 ans ?

**Exercice 7.14** Quel est le placement le plus avantageux...

- Placer pendant 10 ans la moitié de son argent à 3% et l'autre moitié à 5%.
- Placer le tout à 4% pendant le même temps ?

**Exercice 7.15** En 2012, un marchand a fabriqué un million de bicyclettes pour la consommation intérieure d'un pays et 250'000 pour l'exportation. Depuis le 1er janvier 2013, les augmentations annuelles de la demande sont en moyenne de 11% pour la consommation intérieure et de 40% pour l'exportation.

- a) Calculer le nombre de bicyclettes qu'il faudra produire en 2015 pour satisfaire la demande.
- b) Au bout de combien d'années les exportations dépasseront-elles la consommation intérieure ?

**Exercice 7.16** Sur une parcelle de  $1\text{m}^2$  de champs de colza, on mesure une population de 100 pucerons. Une semaine plus tard, la population est de 120 pucerons.

- a) Combien de pucerons y aurait-il 3 semaines après la première mesure s'il s'agit d'un modèle de croissance exponentielle ?
- b) Après combien de temps la population aura doublé ?

**Exercice 7.17** En 1990, la population de Babaorum était de 3'000 habitants. L'année suivante, on y a enregistré 90 naissances et 30 décès. On n'a constaté aucune immigration, et aucune émigration, si bien que les naissances et les décès ont été les seules causes de variation de la population. Si cette tendance se poursuit, à quelle population les habitants de Babaorum peuvent-ils s'attendre en 2002 s'il s'agit d'un modèle de croissance exponentielle ?

**Exercice 7.18** Les biologistes réalisent volontiers des expériences en utilisant des drosophiles (mouches du vinaigre) car la durée de vie courte de ces animaux permet d'étudier facilement leurs caractères sur plusieurs générations. Un jour, une colonie comportait 2'510 mouches, et trois jours plus tard, il y en avait 5'380.

- a) De combien d'unités la population aura-t-elle augmenté après une semaine s'il s'agit d'un modèle de croissance exponentielle ?
- b) En combien de temps la population doublera-t-elle ?

**Exercice 7.19** En physique, les puissances sont généralement mesurées en Watts [W]. Pour des raisons pratiques, en acoustique, on préfère utiliser le décibell [dBm] pour mesurer la puissance du son. Dans ce cas, on l'appelle mesure du signal.

Pour convertir une puissance sonore  $P_{\text{mW}}$  exprimée en milliWatts en un signal  $P_{\text{dBm}}$  exprimé en décibel, on utilise la relation suivante :

$$P_{\text{dBm}} = 10 \cdot \text{Log}(P_{\text{mW}})$$

- a) Quelle est la mesure d'un signal sonore dont la puissance est de 1W ?
- b) Quelle est la puissance en milliWatts d'un signal sonore mesuré à 20 dBm ?
- c) Même question pour des signaux sonores mesurés à 17 dBm, 23 dBm, 30 dBm et 10 dBm ?
- d) Dans les concerts et discothèques, la puissance est limitée légalement à 100 dbm. Quelle est la puissance du signal exprimée en Watts ?
- e) L'ingénieur du son d'un concert mesure un signal de 103 dBm. Les conséquences de ce dépassement de la limite légale est-elle négligeable ? (Comparer les puissances en Watts.)

## 9 Solutions

### 9.1 Solutions - optimisation

- 
- 1.1**  $V = l \cdot p \cdot x$        $p = 30 - 2x$        $l = \frac{45-3x}{2}$        $E_V = ]0; 15[$        $V(x) = 3x^3 - 90x^2 + 675x$   
 Le volume maximum est des 1500 cm<sup>3</sup>. Il est atteint quand  $x = 5$  cm,  $p = 20$  cm et  $l = 15$  cm.
- 

- 1.2**  $C = 50xh + 120x + 240h$        $L = \frac{25}{2h}$        $E_V = \mathbb{R}_+$        $C(x) = 625 + 120x + \frac{3000}{x}$   
 Le coût minimum est de 1825.–. Le garage mesure alors 6 m sur 5 m sur 2,5m.
- 

- 1.3**  $V = x^2 \cdot h$        $h = \frac{15-5x^2}{4x}$        $E_V = ]0; \sqrt{3}[$        $V(x) = -\frac{5}{4}x^3 + \frac{15}{4}x$ .  
 Le volume est maximal lorsque la base de la cabine mesure 1 m et la hauteur 2,5 m.
- 

- 1.4**  $C(x) = \frac{2700x^2 + 270'000}{x}$ .      Le coût minimum sera de 54'000.– frs.
- 

- 1.5**  $S(x) = 30x + \frac{1200}{x} + 40$   
 La surface est minimale lorsque la base de l'aquarium est un carré de  $2\sqrt{10}$  cm.
- 

- 1.6** Le colis mesurera 2 dm sur 2 dm sur 3 dm.
- 

- 1.7**  $P = 600x + 800y$        $y = \frac{1}{x}$        $E_V = \mathbb{R}_+^*$        $P(x) = 600x + \frac{800}{x}$ .  
 Le champ mesurera  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  km sur  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  km.
-

## 9.2 Solutions - Géométrie analytique : les droites

$$\text{a) } \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \|\overrightarrow{AB}\| = 10 \quad \overrightarrow{AB}_u = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC}_\perp = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC}_\perp' = \begin{pmatrix} 1 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } M\left(\frac{2-6}{2}; \frac{-3+3}{2}\right) \quad M(-2; 0) \quad G\left(\frac{2-6+7}{3}; \frac{-3+3+4}{3}\right) \quad G\left(1; \frac{4}{3}\right)$$

$$\text{d) } \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} |-56 - 30| = 43$$

$$\text{e) } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-7 \\ y-4 \end{pmatrix} \quad x = 15 \text{ et } y = -2 \quad D(15; -2)$$

### 2.1

$$\text{f) } \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = -40 + 42 = 2 \text{ donc non}$$

$$\text{g) } \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{OF} = -24 + 6y = 0 \quad F(3; 4)$$

$$\text{h) } \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{74}$$

$$\text{i) } \cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OC}\|} = \frac{2}{\sqrt{13} \cdot 65} \quad \alpha = 86,05^\circ$$

$$\text{j) } \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} m-2 \\ m+3 \end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad 6m - 12 + 8m + 24 = 0 \quad m = -\frac{6}{7} \quad E\left(-\frac{6}{7}; -\frac{6}{7}\right)$$

$$\text{k) } \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 9 \end{pmatrix} \quad F(-14; 9).$$

Par exemple :

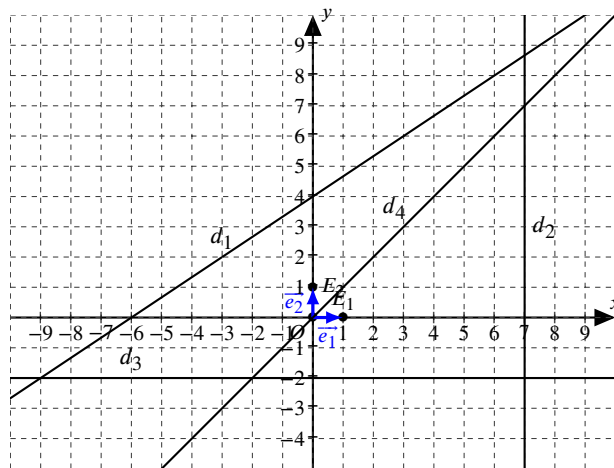
### 2.2

$$\text{a) } d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } d_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{d) } d_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**2.3**

Par exemple :

**2.4**

$$\text{a) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

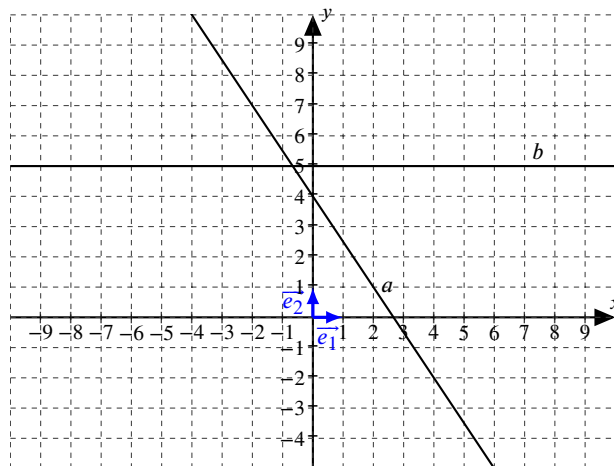
$$\text{b) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**2.5**

$$\text{a) La droite est horizontale. } \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) La droite est verticale. } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2k \end{cases}$$

**2.6**

a) par ex. :  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

b) Leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

**2.7**

c) Par ex. :  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) Leurs vecteurs directeurs sont perpendiculaires.

e) A non car  $14 = -2 + 5k$  et  $-18 = 3 - 7k$  n'ont pas la même solution (respectivement  $\frac{16}{5}$  et 3)

B oui car  $-1 = -2 + 5k$  et  $\frac{8}{5} = 3 - 7k$  ont la même solution ( $k = \frac{1}{5}$ )

f)  $1 = 3 - 7k \Rightarrow k = \frac{2}{7} \Rightarrow -2 + 5 \cdot \frac{2}{7} = -\frac{4}{7} \Rightarrow C\left(-\frac{4}{7}; 1\right)$

Par exemple :

**2.8**

a)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par exemple :

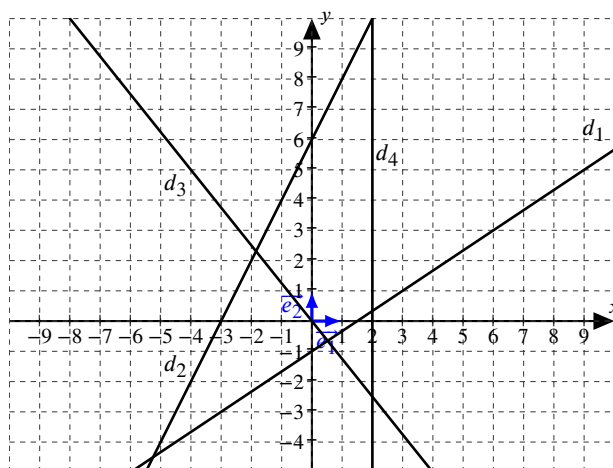
a)  $d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

c)  $d_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b)  $d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d)  $d_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**2.9**



**2.10**

a)  $d_1 : 2x - 3y - 3 = 0$

b)  $d_2 : 2x - y + 6 = 0$

c)  $d_3 : 5x + 4y = 0$

d)  $d_4 : x - 2 = 0$

Par exemple :

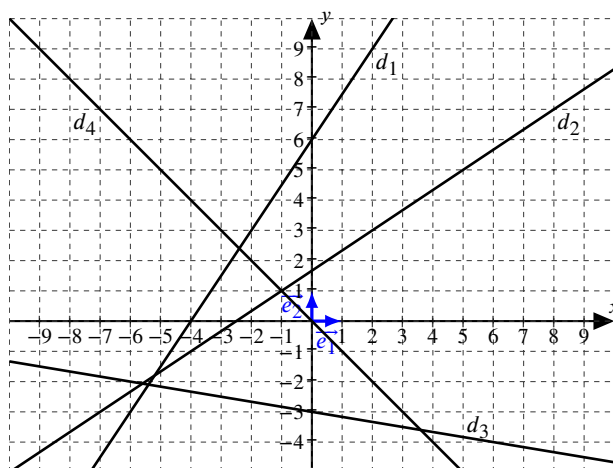
$$\text{a) } d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } d_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } d_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**2.11**



**2.12**

$$\text{a) } d_1 : y = \frac{3}{2}x + 6$$

$$\text{b) } d_2 : y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\text{c) } d_3 : y = -\frac{1}{6}x - 3$$

$$\text{d) } d_4 : y = -x$$

**2.13**

$$3 \cdot 5 - 8 \cdot (-1) + 2 = 25 \Rightarrow P_1 \notin d$$

$$3 \cdot (-1) - 8 \cdot 7 + 2 = -57 \Rightarrow P_3 \notin d$$

$$3 \cdot 2 - 8 \cdot 1 + 2 = 0 \Rightarrow P_2 \in d$$

$$3 \cdot 0 - 8 \cdot \frac{1}{4} + 2 = 0 \Rightarrow P_4 \in d$$

**2.14**

$$\text{a) } A(4;9)$$

$$\text{d) } D(0;3)$$

$$\text{b) } B(-4;-3)$$

$$\text{e) } E(-6;-6)$$

$$\text{c) } C(-2;0)$$

$$\text{f) } F(-4;-3)$$

**2.15**

$$\text{a) } d : y = -\frac{3}{4}x + 2$$

$$\text{b) par ex. } d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Par exemple :

**2.16**

$$\text{a) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**2.17** a) par ex.  $d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) 11

d)  $d : y = \frac{3}{2}x + 11$

b)  $\frac{3}{2}$

e)  $3x - 2y + 22 = 0$

**2.18** a)  $y = -\frac{1}{7}x - 2$        $x + 7y + 14 = 0$

b)  $y = -3x + \frac{1}{2}$        $6x + 2y - 1 = 0$

**2.19** a)  $3x + 5y - 22 = 0$        $y = -\frac{3}{5}x + \frac{22}{5}$

d)  $y - 3 = 0$        $y = 3.$

b)  $3x + 2y - 8 = 0$        $y = -\frac{3}{2}x + 4$

e)  $3x + 2y + 6 = 0$        $y = -\frac{3}{2}x - 3$

c)  $x + 2y + 5 = 0$        $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

f)  $x + 2 = 0$       pas possible ( $x = -2$ )

Par exemple :

**2.20** a)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$       c)  $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$       d)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$       e)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$       f)  $\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$

**2.21** Par exemple  $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

**2.22** Ils ont tous  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  comme vecteur directeur et passe par le point  $(0; \frac{11}{2})$ .

**2.23**  $d : 3x - 2y + 23 = 0$

**2.24**  $d_{AB} : 4x + 3y + 5 = 0$

**2.25**  $d_{AB} : 5x - 7y - 4 = 0$        $d_{AC} : 7x + 5y - 50 = 0$

**2.26**  $D(4;4)$        $d_{AC} : y = 2$        $d_{CB} : 2x - 3y - 12 = 0$        $d_{BD} : 2x + y - 12 = 0$   
 $d_{AB} : 2x + 5y - 12 = 0$        $d_{AD} : 2x - 3y + 4 = 0$        $d_{CD} : 2x + 5y - 28 = 0$

**2.27** a)  $e_1 : 4x - 3y + 52 = 0$       b)  $e_2 : 3x - 5y + 21 = 0$

**2.28** a)  $e_1 : 3x + 4y - 11 = 0$       b)  $e_2 : 5x + 3y + 1 = 0$

---

**2.29** a)  $d_{AB} : 2x - y - 3 = 0$       b)  $p_A : x + 2y - 4 = 0$       c)  $p_B : x + 2y - 14 = 0$

---

**2.30** a) non      b) oui      c) oui      d) non      e) oui      f) oui

---

**2.31** a)  $t = -1$  ou  $t = 3$       b)  $t = \frac{3}{2}$

---

**2.32** a) parallèles      c) confondues      e) parallèles      g) confondues      i) sécantes  
b) sécantes      d) confondues      f) sécantes      h) parallèles      j) perpendiculaires

---

**2.33** a) (3;2)      b) (5;-6)      c) (-1;3)      d) (4;0)      e) (2;3)

---

**2.34**  $A(-1;3)$        $B(2;-1)$        $C(2;4)$

---

**2.35** a) (0;2)      b) Les droites sont parallèles.      c) Les droites sont confondues.

---

**2.36** a)  $\left(1; \frac{5}{2}\right)$       b) Les droites sont parallèles      c) Les droites sont confondues.

---

**2.37** a)  $\sim 71,6^\circ$       b)  $\sim 56,31^\circ$       c)  $\sim 50,2^\circ$       d)  $\sim 53,13^\circ$

---

**2.38** a)  $\sim 75,96^\circ$       b)  $\sim 18,43^\circ$

---

**2.39** a)  $\delta(P;d) = 3$       b)  $\delta(P;d) = 1$       c)  $\delta(P;d) = 4$       d)  $\delta(P;d) = 0$

---

**2.40** a)  $d_{AB} : 4x - 3y + 2 = 0$        $\delta(P;d_{AB}) = \frac{7}{5}$       b)  $d_{BC} : 12x + 5y - 18 = 0$        $\delta(P;d_{BC}) = \frac{28}{13}$

---

### 9.3 Solutions - Géométrie analytique : les lignes principales du triangle

a)  $m : x - 3y + 9 = 0$

b)  $P(3;4)$

3.1

c)  $\delta(P; A) = \sqrt{(13-3)^2 + (4-4)^2} = 10$        $\delta(P; B) = \sqrt{(11-3)^2 + (10-4)^2} = 10$

On obtient la même distance car  $P$  est sur  $m_{AB}$ .

a)  $m : 2x - y + 6 = 0$

b)  $2x - y + 6 = 0 \implies y = 2x + 6$

$\delta(A; P) = \sqrt{(1-x)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{10}$        $(1-x)^2 + (3-(2x+6))^2 = 10$        $5x^2 + 10x = 0$        $x = 0$  ou  $x = -2$

3.2

$P_1(0;6)$  et  $P_2(-2;2)$

c)  $d_{A;B} : x + 2y - 7 = 0$        $\delta(C; d_{A;B}) = \frac{|x+2y-7|}{\sqrt{5}} = \sqrt{20}$

$|x+2y-7| = 10$        $|x+2(2x+6)-7| = 10$        $|5x+5| = 10$   
 $5x+5 = 10$        $x = 1$        $C_1(1;8)$        $5x+5 = -10$        $x = -3$        $C_2(-3;0)$

a)  $m_{AB} : 2x + y - 11 = 0$

$m_{AC} : x + 3y - 13 = 0$

$m_{BC} : 7x - 9y - 1 = 0$

3.3

b)  $D = m_{AB} \cap m_{AC} : \begin{cases} 2x + y - 11 = 0 \\ x + 3y - 13 = 0 \end{cases} \quad D(4;3)$       On vérifie que  $D \in m_{BC} : 7 \cdot 4 - 9 \cdot 3 - 1 = 0$

c)  $\|\overline{AD}\| = \sqrt{65}$        $\|\overline{BD}\| = \sqrt{65}$        $\|\overline{CD}\| = \sqrt{65}$

Les trois segments sont isométriques.  $D$  est le centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$ .

3.4

a)  $g_A : 11x + 6y - 13 = 0$

b) 16

c)  $\sim 138,37^\circ$

a)  $g_A : 21x - 17y - 68 = 0$

$g_B : 3x + 19y - 74 = 0$

$g_C : 12x + y - 71 = 0$

3.5

b)  $G = g_A \cap g_C : \begin{cases} 21x - 17y - 68 = 0 \\ 12x + y - 71 = 0 \end{cases} \quad G\left(\frac{17}{3}; 3\right)$       On vérifie que  $G \in g_B : 3 \cdot \frac{17}{3} + 19 \cdot 3 - 74 = 0$

c)  $G\left(\frac{0+12+5}{3}; \frac{-4+2+11}{3}\right) = G\left(\frac{17}{3}; 3\right)$

3.6

$d_{AB} \cap d_{AC}$  donne  $A(3; -2)$ .

Or ce point n'est pas sur la droite  $d$  car  $15 - 18 + 7 = 4 \neq 0$ .  $d$  ne peut donc pas être  $g_A$ .

3.7

b)  $d_{AC} \cap d_{BC} = C(4;1)$

c)  $B(-4; -3)$

$d_{AC} \cap g_A = A(2;7)$

$d_{BC} \cap g_A = M_{BC}(0; -1)$

3.8

a)  $h_A : 7x - y - 42 = 0$

b) 38

c) 40

---

**3.9** a)  $h_A : 7x - 9y - 36 = 0$        $h_B : x + 3y - 18 = 0$        $h_C : 2x + y - 21 = 0$   
 b)  $H = h_B \cap h_C : \begin{cases} x + 3y - 18 = 0 \\ 2x + y - 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(9;3)$       On vérifie que  $H \in h_A : 7 \cdot 9 - 9 \cdot 3 - 36 = 0$

---

**3.10** a) aire = 15       $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{45}$        $\delta(A; d_{BC}) = 15 \cdot 2 : \sqrt{45} = 2\sqrt{5}$   
 b)  $h_A : 2x - y - 3 = 0$        $h_A \cap d_{BC} = H(3;3)$        $\|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5}$   
 c)  $d_{BC} : x + 2y - 9 = 0$        $\delta(A; d_{BC}) = 2\sqrt{5}$

---

**3.11** a)  $m_{BC} \cap g_A = M_{BC}$       d)  $m_{AB} \cap m_{AC} =$  centre du cercle circonscrit      g)  $m_{BC} \cap d_{BC} = M_{BC}$   
 b)  $d_{AB} \cap h_B = B$       e)  $h_A \cap g_A = A$       h)  $g_A \cap g_C = G$   
 c)  $d_{AB} \cap h_C =$  pieds de la hauteur issue de C      f)  $h_A \cap g_A =$  orthocentre

---

**3.12** a)  $g_C$       d)  $d_{AB}$       g)  $h_C$       j)  $h_C$   
 b)  $d_{AB}$  et  $m_{AB}$       e)  $g_C$       h)  $d_{AB}$       k)  $d_{AB}$   
 c)  $g_C$       f) segment moyen parallèle à  $d_{AC}$       i)  $d_{AB}$       l)  $m_{AB}$  et  $d_{AB}$

---

**3.13**  $\frac{3x+4y+6}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm \frac{y+6}{\sqrt{0^2+1^2}}$        $3x+4y+6 = \pm 5(y+6)$        $b_1 : 3x - y - 24 = 0 \perp b_2 : x + 3y + 12 = 0$

---

**3.14** a)  $b_A : y - 2 = 0$        $b_B : 2x + y - 12 = 0$        $b_C : 2x - y - 8 = 0$   
 b)  $E(5;2)$   
 c)  $d_{AB} : 3x + 4y + 2 = 0$        $d_{BC} : x - 10 = 0$        $d_{AC} : 3x - 4y + 18 = 0$   
 $\delta(E; d_{AB}) = \frac{|15+8+2|}{\sqrt{25}} = 5$        $\delta(E; d_{BC}) = \frac{|5-10|}{\sqrt{1}} = 5$        $\delta(E; d_{AC}) = \frac{|15-8+18|}{\sqrt{25}} = 5$

$E$  est équidistant aux côtés du triangle. C'est donc le centre du cercle inscrit au triangle  $ABC$ .

---

**3.15**  $m_{AB} : 2x + y - 11 = 0$        $m_{BC} : x + 3y - 13 = 0$        $m_{AC} : 7x - 9y - 1 = 0$        $D(4;3)$   
 $h_A : 7x - 9y - 36 = 0$        $h_B : x + 3y - 18 = 0$        $h_C : 2x + y - 21 = 0$        $H(9;3)$   
 $d_{DH} : y = 3$        $G\left(\frac{17}{3}; 3\right)$  est aussi sur  $d_{GH}$ .  
 Cette droite est appelée la *droite d'Euler* du triangle  $ABC$ .

---

**3.16** 5

---

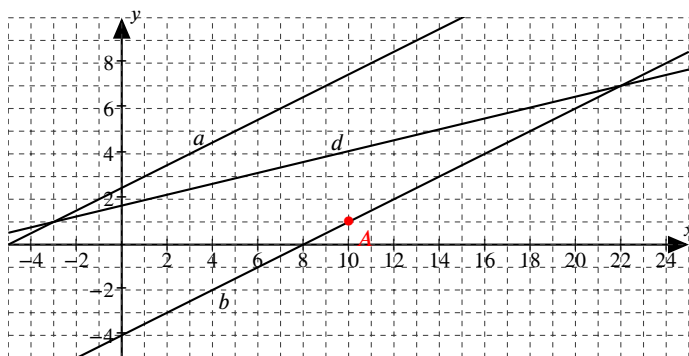
**3.17** a) 14      b) 22

---

**3.18** a)  $\frac{79}{2}$       b)  $\frac{119}{2}$

---

3.19



Le sommet  $A$  est sur la droite  $b$ , mais pas sur les autres :  $-10 + 2 + 8 = 0$ .

Les droites  $a$  et  $b$  sont parallèles. Elles forment donc deux côtés opposés.

$$b \cap d = B(22, 7) \quad a \cap d = D(-3; 1)$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 22 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C(9; 7)$$

3.20 a)  $\sim 14,04^\circ$ b)  $\sim 63,43^\circ$ c)  $\sim 49,40^\circ$ 

3.21

$$M_{BC}(-1; 3)$$

$$\text{axe de symétrie : } 2x + y - 1 = 0 \quad d_{AD} : x - 2y + 2 = 0$$

$$M_{AD}(0; 1)$$

$$D(4; 3)$$

3.22  $M_{BC}\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ 

$$m_{BC} : 7x + 5y - 8 = 0$$

$$b_A : x + y - 3 = 0$$

$$h_A : 7x + 5y - 23 = 0$$

$$g_A : x + 5y + 1 = 0$$

$$g_C \cap m_{AB} = M_{AB}(4; -1)$$

$$d_{AB} : \text{perpendiculaire à } m_{AB} \text{ passant par } M_{AB} \Rightarrow d_{AB} : 2x + y - 7 = 0$$

3.23  $h_A \cap d_{AB} = A(2; 3) \quad B(6; -5)$ 

$$d_{BC} : \text{perpendiculaire à } h_A \text{ passant par } B \Rightarrow d_{BC} : 2x - y - 17 = 0$$

$$g_C \cap BC = C(11; 5)$$

## 9.4 Solutions - fonctions et équations trigonométriques

4.1 correction à la calculatrice

4.2

a)  $150^\circ$

c)  $198^\circ$

e)  $-30^\circ$

g)  $\sim 57,3^\circ$

i)  $\sim 217,7^\circ$

b)  $420^\circ$

d)  $720^\circ$

f)  $225^\circ$

h)  $\sim -43,0^\circ$

4.3

a)  $\frac{7\pi}{18}$

b)  $\frac{17\pi}{36}$

c)  $\frac{9\pi}{2}$

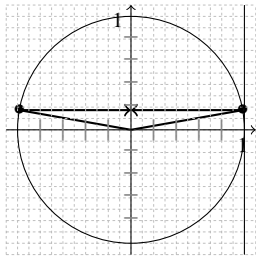
d)  $-\frac{\pi}{18}$

e)  $\frac{28\pi}{15}$

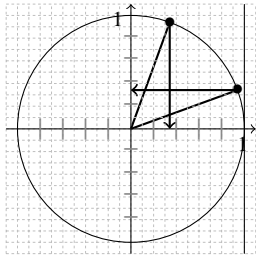
f)  $5\pi$

4.4

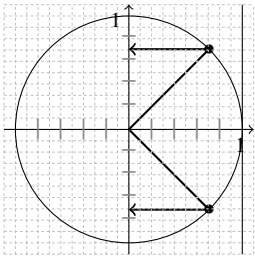
a) oui par sym. d'axe  $Oy$



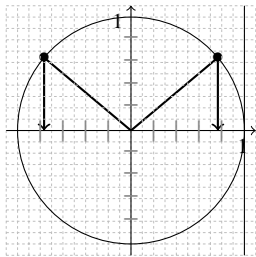
c) oui par sym. d'axe  $y = x$



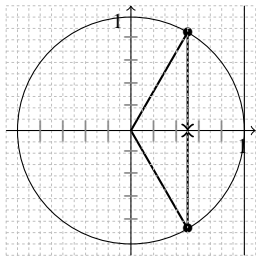
e) non par sym. d'axe  $Ox$   
 $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$



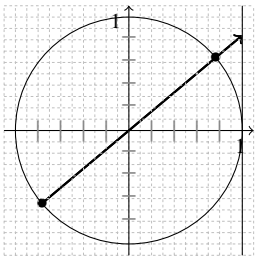
b) oui par sym. d'axe  $Oy$



d) non par sym. d'axe  $Ox$   
 $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$



f) oui par sym. de centre  $O$



4.5

| $\alpha$    | $\cos(\alpha)$        | $\sin(\alpha)$        | $\tan(\alpha)$ |
|-------------|-----------------------|-----------------------|----------------|
| $120^\circ$ | $-\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $-\sqrt{3}$    |
| $945^\circ$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1              |
| $270^\circ$ | 0                     | -1                    | /              |

4.6

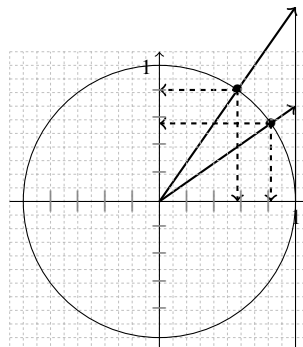
| $\alpha$          | $\cos(\alpha)$        | $\sin(\alpha)$        | $\tan(\alpha)$       |
|-------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| $-\frac{\pi}{3}$  | $\frac{1}{2}$         | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\sqrt{3}$          |
| $-\frac{5\pi}{6}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $6\pi$            | 1                     | 0                     | 0                    |

Par sym. d'axe  $y = x$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

**4.7**  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

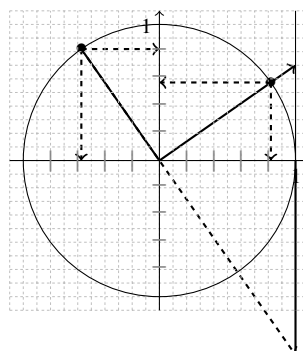


Par rotation de centre  $O$ , d'angle  $\frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$$

**4.8**  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\cos(\alpha)}{-\sin(\alpha)} = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$$



a)  $\mathcal{S} = \{75,5^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-75,5^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$  d)  $\mathcal{S} = \emptyset$

**4.9** b)  $\mathcal{S} = \{-44,4^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{224,4^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$  e)  $\mathcal{S} = \{90^\circ + k \cdot 180^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$

c)  $\mathcal{S} = \{63,4^\circ + k \cdot 180^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$  f)  $\mathcal{S} = \{0^\circ + k \cdot 180^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$

**4.10**  $\sim 113,6^\circ$  et  $\sim 246,4^\circ$

**4.11**  $\sim 203,6^\circ$  et  $\sim 336,4^\circ$

**4.12**  $\sim 158,2^\circ$  et  $\sim 338,2^\circ$

a)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

d)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

**4.13** b)  $\mathcal{S} = \{ \sim 1,3 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

e)  $\mathcal{S} = \{ \sim 1,4 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \sim -1,4 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

c)  $\mathcal{S} = \{ 0 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

f)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

**4.14**  $\frac{3\pi}{4}$  et  $\frac{5\pi}{4}$

---

**4.15**  $\frac{7\pi}{6}$  et  $\frac{11\pi}{6}$

---

**4.16**  $\frac{\pi}{6}$  et  $\frac{7\pi}{6}$

---

**4.17** a)  $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{30} + k\frac{2\pi}{5} \mid \forall k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{7\pi}{30} + k\frac{2\pi}{5} \mid \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$  b)  $\frac{7\pi}{30}, \frac{11\pi}{30}, \frac{19\pi}{30}, \frac{23\pi}{30}, \frac{31\pi}{30}, \frac{35\pi}{30}, \frac{43\pi}{30}, \frac{47\pi}{30}, \frac{55\pi}{30}, \frac{59\pi}{30}$

---

**4.18** a)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{220} + k\frac{\pi}{11} \mid \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$  c)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\pi}{35} + k\frac{\pi}{7} \mid \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 b)  $\frac{\pi}{220}, \frac{21\pi}{220}, \frac{41\pi}{220}, \frac{61\pi}{220}, \frac{81\pi}{220}, \frac{101\pi}{220}$  d)  $\frac{3\pi}{35}, \frac{8\pi}{35}, \frac{13\pi}{35}, \frac{18\pi}{35}, \frac{23\pi}{35}, \frac{28\pi}{35}, \frac{33\pi}{35}$

---

Les " $\forall k \in \mathbb{Z}$ " n'ont pas été écrits afin d'alléger l'écriture.

**4.19** a)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$  b)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$

---

Les " $\forall k \in \mathbb{Z}$ " n'ont pas été écrits afin d'alléger l'écriture.

**4.20** a)  $\mathcal{S} = \{0 + 2k\pi\} \cup \{\pi + 2k\pi\} = \{0 + k\pi\}$   
 b)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\}$   
 c)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi \right\}$

---

Les " $\forall k \in \mathbb{Z}$ " n'ont pas été écrits afin d'alléger l'écriture.

**4.21** a)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\} = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi \right\}$   
 b)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$   
 c) même question que la précédente...

---

**4.22** Les " $\forall k \in \mathbb{Z}$ " n'ont pas été écrits afin d'alléger l'écriture. b)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\} \cup \{2k\pi\}$   
 a)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$  c)  $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$

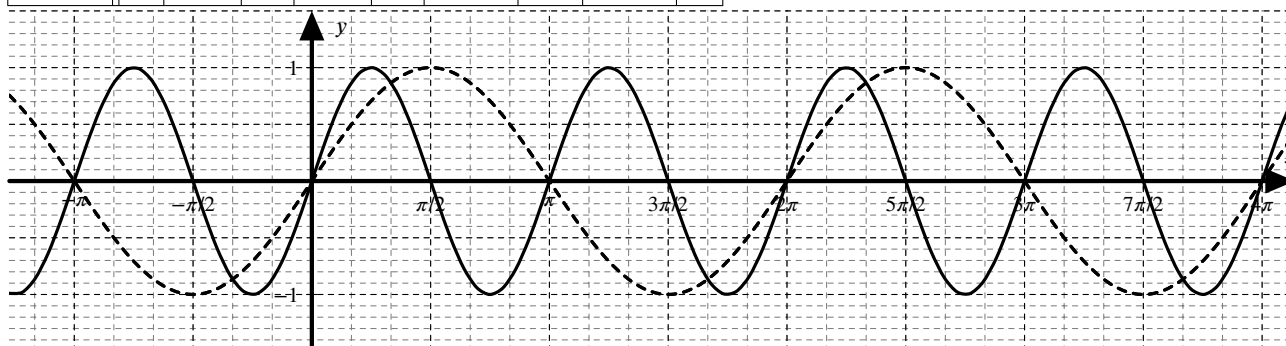
---

Les " $\forall k \in \mathbb{Z}$ " n'ont pas été écrits afin d'alléger l'écriture.

**4.23** a)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \right\}$   
 b)  $\mathcal{S} = \{\sim 0,73 + 2k\pi\} \cup \{\sim 2,41 + 2k\pi\}$

|            |   |                 |                 |                 |                 |                  |                  |                  |       |
|------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|
| $x$        | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
| $\sin(2x)$ | 0 | 0,87            | 1               | 0,87            | 0               | -0,87            | -1               | -0,87            | 0     |

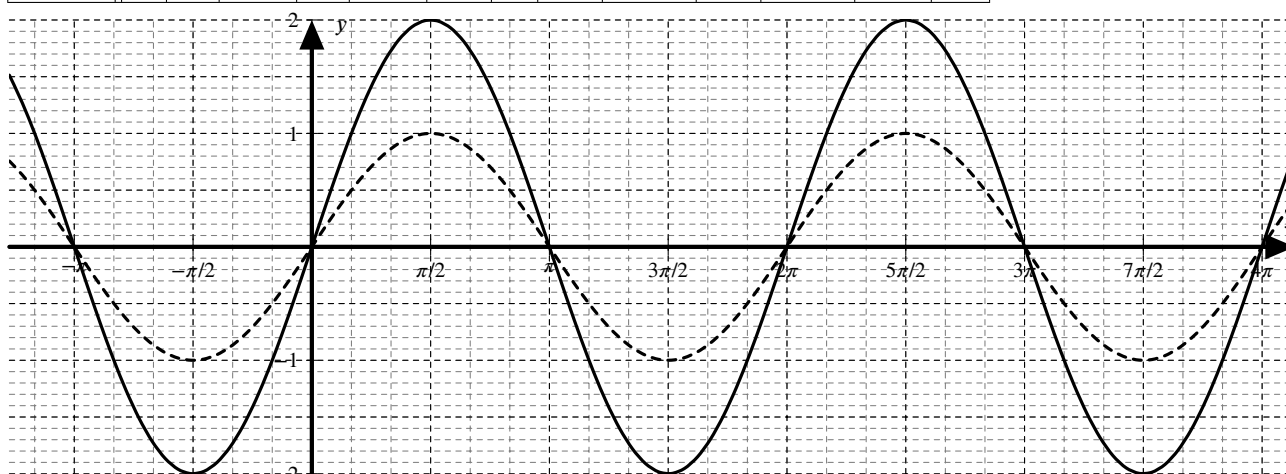
4.24



La forme générale n'a pas changé. Les valeurs maximales et minimales sont toujours de 1 et  $-1$ , mais période a été divisée par 2. Elle est maintenant de  $\pi$ .

|            |   |                 |                 |                 |                  |                  |       |                  |                  |                  |                  |                   |        |
|------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|--------|
| $x$        | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
| $2\sin(x)$ | 0 | 1               | 1,73            | 2               | 1,73             | 1                | 0     | -1               | -1,73            | -2               | -1,73            | -1                | 0      |

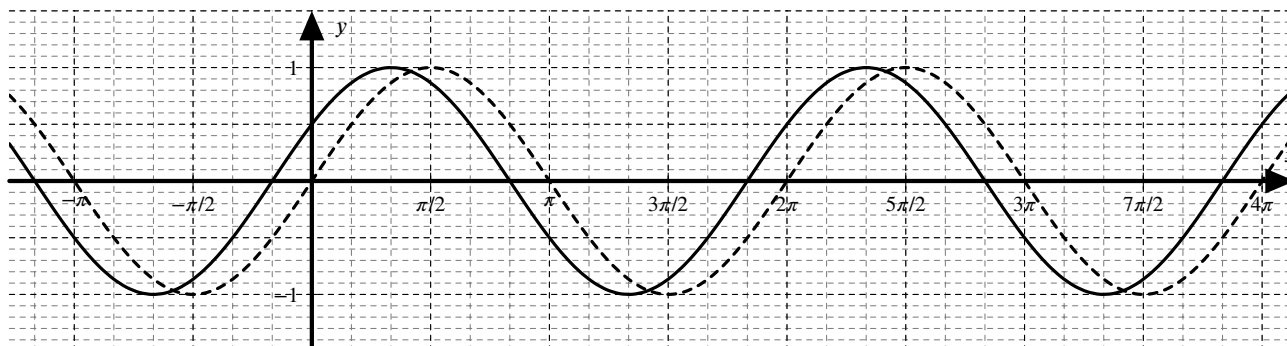
4.25



La forme générale n'a pas changé. La période est resté la même, on a les mêmes zéros. Les valeurs maximales et minimales ont, par contre, été doublées.

| $x$                       | 0   | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ |
|---------------------------|-----|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|
| $\sin(x + \frac{\pi}{6})$ | 0,5 | 0,87            | 1               | 0,87            | 0,5              | 0                | -0,5  | -0,87            | -1               | -0,87            | -0,5             | 0                 |

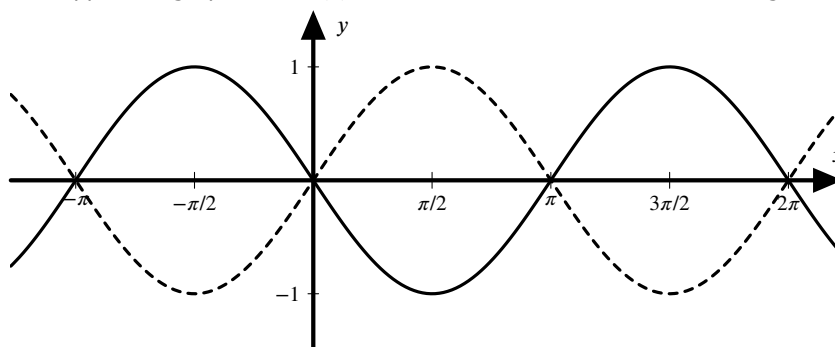
4.26



Le graphe a été translaté horizontalement de  $\frac{\pi}{6}$  vers la gauche.

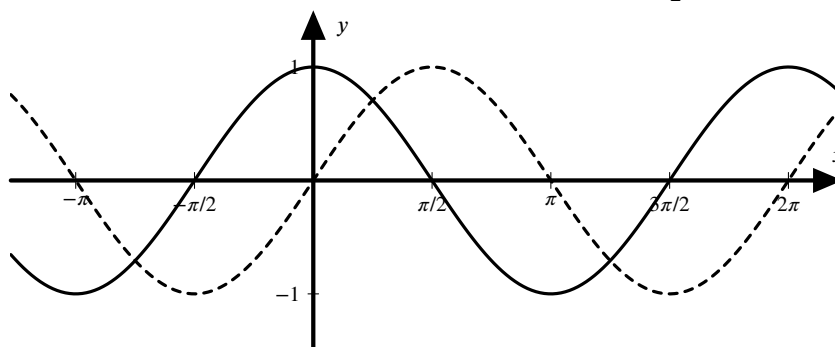
Elles sont toutes vraies.

a) Par rapport au graphe de  $\sin(x)$ , on a fait une translation de  $\pi$  vers la gauche / symétrie d'axe  $Ox$ .

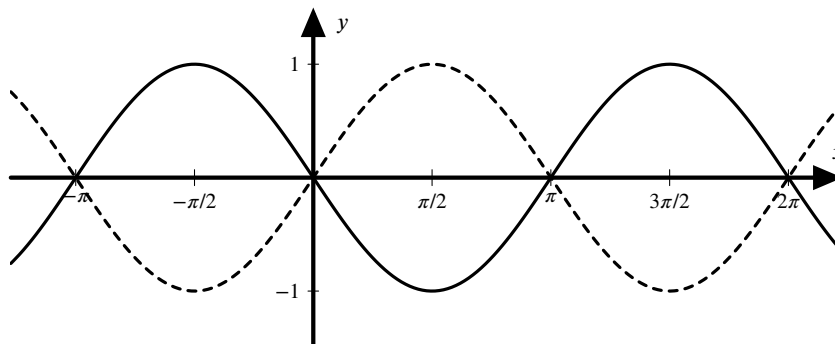


4.27

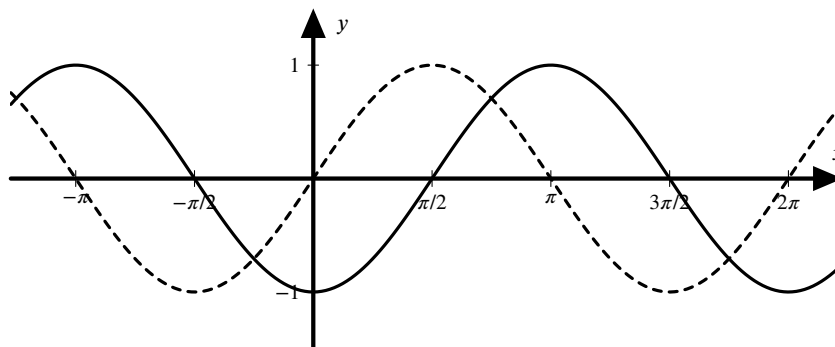
b) Par rapport au graphe de  $\sin(x)$ , on a fait une translation de  $\frac{\pi}{2}$  vers la gauche.



c) Par rapport au graphe de  $\sin(x)$ , on a fait une symétrie d'axe  $Oy$  / symétrie d'axe  $Ox$ .



**4.27** d) Par rapport au graphe de  $\sin(x)$ , on a fait une translation de  $\frac{\pi}{2}$  vers la droite / translation de  $\frac{\pi}{2}$  vers la gauche puis sym. d'axe  $Ox$ .



- 4.28** a)  $D_f = \mathbb{R}$   
 b)  $\frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{7} \forall k \in \mathbb{Z}$   
 c)  $\frac{2\pi}{7}$

d)

|        |   |                  |                   |                  |   |
|--------|---|------------------|-------------------|------------------|---|
|        | 0 | $\frac{\pi}{14}$ | $\frac{3\pi}{14}$ | $\frac{2\pi}{7}$ |   |
| $f(x)$ | + | 0                | -                 | 0                | + |

- 4.29** a)  $D_f = \mathbb{R}$   
 b)  $0 + 5k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$   
 c)  $10\pi$

d)

|        |   |        |         |   |   |
|--------|---|--------|---------|---|---|
|        | 0 | $5\pi$ | $10\pi$ |   |   |
| $f(x)$ | 0 | +      | 0       | - | 0 |

- 4.30** a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 b)  $0 + k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$   
 c)  $\pi$

d)

|        |   |                 |       |   |
|--------|---|-----------------|-------|---|
|        | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |   |
| $f(x)$ | 0 | -               | +     | 0 |

- 4.31** a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0 + k\pi \mid \forall k \in \mathbb{Z}\}$   
 b)  $\frac{\pi}{2} + k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$   
 c)  $\pi$

d)

|        |   |                 |       |
|--------|---|-----------------|-------|
|        | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
| $f(x)$ | - | 0               | +     |

4.32

a)  $D_f = \mathbb{R}$

b)  $\frac{3\pi}{5} + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

c)  $4\pi$

d)

|        |   |                  |                   |        |
|--------|---|------------------|-------------------|--------|
|        | 0 | $\frac{3\pi}{5}$ | $\frac{13\pi}{5}$ | $4\pi$ |
| $f(x)$ | - | 0                | +                 | 0      |

4.33

a)  $\frac{2\pi}{5}$

b)  $\pi$

c)  $2\pi$

d) non

e)  $2\pi$

f)  $6\pi$

On utilise le fait que  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ 

4.34

a) nul en  $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$  et positif sinon

e) strictement négatif

b) strictement positif

f) nul en  $k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$  et positif sinon

c) nul en  $\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$  et positif sinon

g) strictement positif

d) nul en  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$  et négatif sinon

h) nul en  $\frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$  et positif sinon

4.35

a)  $\mathbb{R}^*$

d)  $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}\right) \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$

b)  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad \forall k \in \mathbb{Z}\right\}$

e)  $\mathbb{R} \setminus \{5k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}\}$

c)  $[-\pi; \pi] \setminus \left\{-\frac{\pi}{6}\right\}$

f)  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

4.36

a)  $\frac{1}{k\pi} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*$

d)  $-\frac{1}{4}$

b)  $\pi$

e) aucun car  $15\pi \notin D_f$

c)  $-\pi$  et  $\pi$

f)  $\frac{\pi}{3} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

4.37

a)  $\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

c)  $5x^4 \sin(x) + x^5 \cos(x)$

e)  $35x^4 \cos(x^5)$

b)  $-\frac{8}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

d)  $5 \sin^4(x) \cos(x)$

f)  $25x^4 \sin^4(x^5) \cos(x^5)$

4.38

a)  $-50 \sin(5x + \pi)$

c)  $-6 \sin(x) \cos^2(x)$

e)  $-\frac{1}{\sin^2(x)}$

b)  $2x \cos(x) - x^2 \sin(x)$

d)  $-10x \sin(x^2) \cos^4(x^2)$

f)  $5 \cos(x^2) - 10x^2 \sin(x^2)$

4.39

a)  $-\frac{1}{\sin^2(x)}$

c)  $\frac{-21}{x^4 \cos^2\left(\frac{7}{x^3}\right)}$

e)  $4x^3 \tan(x) + x^4 + x^4 \tan^2(x)$

b)  $\frac{3}{\cos^2(x)}$

d)  $2 \sin(x) \cos(x)$

f)  $\frac{1 + \sin(x) - \cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$

a)  $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

|         |   |            |                                    |            |                                      |            |        |
|---------|---|------------|------------------------------------|------------|--------------------------------------|------------|--------|
| $x$     | 0 |            | $\frac{\pi}{4}$                    |            | $\frac{5\pi}{4}$                     |            | $2\pi$ |
| $f'(x)$ | 1 | +          | 0                                  | -          | 0                                    | +          | 1      |
| $f(x)$  |   | $\nearrow$ | MAX<br>$(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2})$ | $\searrow$ | MIN<br>$(\frac{5\pi}{4}; -\sqrt{2})$ | $\nearrow$ |        |

b)  $f'(x) = \tan^2(x)$   $f(x)$  n'est pas périodique et a des replats en  $(k\pi; -k\pi) \forall k \in \mathbb{Z}$ .

Ce tableau de croissance ne montre donc pas toute la croissance mais permet déjà de se faire une bonne idée de ce qu'il se passe...

4.40

|         |                  |            |                 |            |                       |            |                  |            |                         |
|---------|------------------|------------|-----------------|------------|-----------------------|------------|------------------|------------|-------------------------|
| $x$     | 0                |            | $\frac{\pi}{2}$ |            | $\pi$                 |            | $\frac{3\pi}{2}$ |            | $2\pi$                  |
| $f'(x)$ | 0                | +          |                 | +          | 0                     | +          |                  | +          | 0                       |
| $f(x)$  | plat<br>$(0; 0)$ | $\nearrow$ |                 | $\nearrow$ | plat<br>$(\pi; -\pi)$ | $\nearrow$ |                  | $\nearrow$ | plat<br>$(2\pi; -2\pi)$ |

c)  $f'(x) = \frac{-\sin(x)}{(\cos(x) + 3)^2}$

|         |                           |            |                             |            |                              |
|---------|---------------------------|------------|-----------------------------|------------|------------------------------|
| $x$     | 0                         |            | $\pi$                       |            | $2\pi$                       |
| $f'(x)$ | 0                         | -          | 0                           | +          | 0                            |
| $f(x)$  | MAX<br>$(0; \frac{3}{4})$ | $\searrow$ | MIN<br>$(\pi; \frac{1}{2})$ | $\nearrow$ | MAX<br>$(2\pi; \frac{3}{4})$ |

4.41

a)  $\frac{3}{8}$   
b)  $-\frac{4}{3}$

c) 0  
d) 4

e)  $\infty$   
f)  $\frac{1}{8}$

4.42

a)  $\frac{5}{8}$   
b)  $\infty$   
c) 0

d) -15  
e) 79  
f)  $\infty$

g)  $\frac{4}{9}$   
h)  $\frac{4}{9}$   
i)  $\frac{2}{3}$

4.43

a)  $-\frac{1}{2}$   
b) -1

c)  $\frac{3}{80}$   
d) non défini

e) 12  
f)  $-\frac{2}{3}$

4.44

a)  $-\frac{9}{2}$   
b) 6

c)  $+\infty$   
d)  $\frac{1}{2}$

e) 0  
f)  $-\infty$

a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  o.o. : non défini

|        |   |   |       |   |        |
|--------|---|---|-------|---|--------|
| $x$    | 0 |   | $\pi$ |   | $2\pi$ |
| $f(x)$ |   | + |       | - |        |

|         |   |            |                             |            |       |            |                               |            |        |
|---------|---|------------|-----------------------------|------------|-------|------------|-------------------------------|------------|--------|
| $x$     | 0 |            | $\frac{\pi}{2}$             |            | $\pi$ |            | $\frac{3\pi}{2}$              |            | $2\pi$ |
| $f'(x)$ |   | -          | 0                           | +          |       | +          | 0                             | -          |        |
| $f(x)$  |   | $\searrow$ | MIN<br>$(\frac{\pi}{2}; 1)$ | $\nearrow$ |       | $\nearrow$ | MAX<br>$(\frac{3\pi}{2}; -1)$ | $\searrow$ |        |

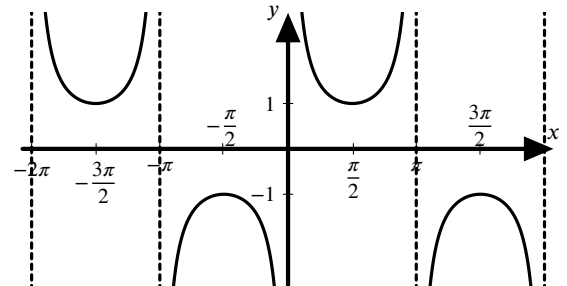
période :  $2\pi$

zéros : -

AV :  $x = 0, x = \pi, \dots$

Pas d'AH, ni d'AO.

$$f'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$



b)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  o.o. : 0

période :  $2\pi$  zéros :  $\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$

|        |   |   |       |   |        |
|--------|---|---|-------|---|--------|
| $x$    | 0 |   | $\pi$ |   | $2\pi$ |
| $f(x)$ | 0 | + |       | - | 0      |

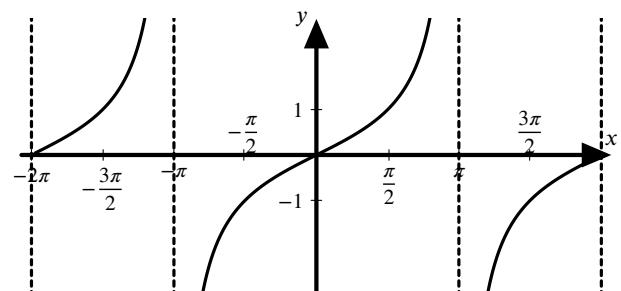
4.45

|         |   |            |       |            |        |
|---------|---|------------|-------|------------|--------|
| $x$     | 0 |            | $\pi$ |            | $2\pi$ |
| $f'(x)$ | 1 | +          |       | +          | 1      |
| $f(x)$  |   | $\nearrow$ |       | $\nearrow$ |        |

AV :  $x = 0, x = \pi, \dots$

Pas d'AH, ni d'AO.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}$$



c)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

|        |   |   |                 |   |                  |   |        |
|--------|---|---|-----------------|---|------------------|---|--------|
| $x$    | 0 |   | $\frac{\pi}{2}$ |   | $\frac{3\pi}{2}$ |   | $2\pi$ |
| $f(x)$ | 1 | + |                 | + | 0                | + | 1      |

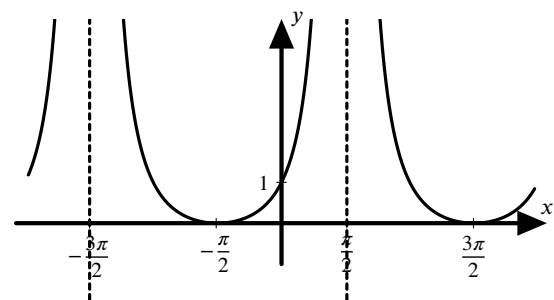
|         |   |            |                 |            |                              |            |        |
|---------|---|------------|-----------------|------------|------------------------------|------------|--------|
| $x$     | 0 |            | $\frac{\pi}{2}$ |            | $\frac{3\pi}{2}$             |            | $2\pi$ |
| $f'(x)$ | 2 | +          |                 | -          | 0                            | +          | 2      |
| $f(x)$  |   | $\nearrow$ |                 | $\searrow$ | MIN<br>$(\frac{3\pi}{2}; 0)$ | $\nearrow$ |        |

o.o. : 1 période :  $2\pi$  zéros :  $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$

$$f'(x) = \frac{2\cos(x)}{(1 - \sin(x))^2}$$

AV :  $x = \frac{\pi}{2}, \dots$

Pas d'AH, ni d'AO.



a)  $D_f = \mathbb{R}$  o.o. :  $-2$   $f'(x) = 2\sin(x)(\cos(x)+1)$

|        |    |   |        |   |        |   |        |
|--------|----|---|--------|---|--------|---|--------|
| $x$    | 0  |   | $1,14$ |   | $5,14$ |   | $2\pi$ |
| $f(x)$ | -2 | - | 0      | + | 0      | - | -2     |

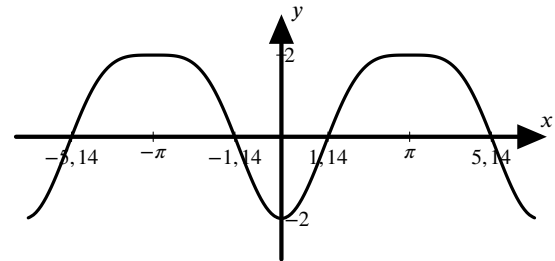
|         |   |   |       |   |        |
|---------|---|---|-------|---|--------|
| $x$     | 0 |   | $\pi$ |   | $2\pi$ |
| $f'(x)$ | 0 | + | 0     | - | 0      |

|        |          |            |           |            |             |
|--------|----------|------------|-----------|------------|-------------|
| $f(x)$ | MIN      | $\nearrow$ | MAX       | $\searrow$ | MIN         |
|        | $(0;-2)$ |            | $(\pi;2)$ |            | $(2\pi;-2)$ |

période :  $2\pi$  Pas d'AV, ni d'AH, ni d'AO.

zéros :  $\pm \cos^{-1}(-1 + \sqrt{2}) + 2k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$   
 $= \pm 1,14 + 2k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$

donc  $\sim 1,14$  et  $\sim 5,14$



b)  $D_f = \mathbb{R}$  o.o. : 4 zéros :  $\frac{\pi}{2} + k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$

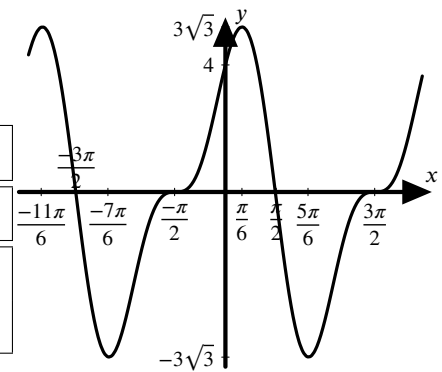
|        |   |   |                 |   |                  |   |        |
|--------|---|---|-----------------|---|------------------|---|--------|
| $x$    | 0 |   | $\frac{\pi}{2}$ |   | $\frac{3\pi}{2}$ |   | $2\pi$ |
| $f(x)$ | 4 | + | 0               | - | 0                | + | 4      |

4.46

|         |   |            |                              |            |                                |            |                       |            |        |
|---------|---|------------|------------------------------|------------|--------------------------------|------------|-----------------------|------------|--------|
| $x$     | 0 |            | $\frac{\pi}{6}$              |            | $\frac{5\pi}{6}$               |            | $\frac{3\pi}{2}$      |            | $2\pi$ |
| $f'(x)$ | 4 | +          | 0                            | -          | 0                              | +          | 0                     | +          | 4      |
| $f(x)$  |   | $\nearrow$ | MAX                          | $\searrow$ | MIN                            | $\nearrow$ | plat                  | $\nearrow$ |        |
|         |   |            | $(\frac{\pi}{6}; 3\sqrt{3})$ |            | $(\frac{5\pi}{6}; -3\sqrt{3})$ |            | $(\frac{3\pi}{2}; 0)$ |            |        |

période :  $2\pi$  Pas d'AV, ni d'AH, ni d'AO.

$f'(x) = -4(2\sin^2(x) + \sin(x) - 1)$



c)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \forall k \in \mathbb{Z}\}$   $f'(x) = \frac{-1}{1-\cos(x)}$

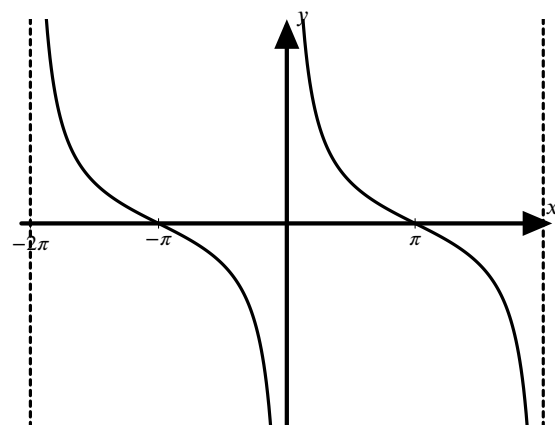
AV :  $x = 0, x = 2\pi, \dots$  Pas d'AH, ni d'AO.

|        |   |   |       |   |        |
|--------|---|---|-------|---|--------|
| $x$    | 0 |   | $\pi$ |   | $2\pi$ |
| $f(x)$ |   | + | 0     | - |        |

|         |   |   |       |   |        |
|---------|---|---|-------|---|--------|
| $x$     | 0 |   | $\pi$ |   | $2\pi$ |
| $f'(x)$ |   | - | 0     | - |        |

|        |  |            |         |            |  |
|--------|--|------------|---------|------------|--|
| $f(x)$ |  | $\searrow$ | plat    | $\searrow$ |  |
|        |  |            | $(0;0)$ |            |  |

pas d'o.o. période :  $2\pi$  zéros :  $\pi + 2k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$



## 9.5 Solutions - exponentielles

5.1

| n° de l'étape | nb de couches de papier | épaisseur totale en mm |
|---------------|-------------------------|------------------------|
| 0             | 1                       | 0,1                    |
| 1             | 2                       | 0,2                    |
| 2             | 4                       | 0,4                    |
| 3             | 8                       | 0,8                    |
| 4             | 16                      | 1,6                    |
| x             | $2^x$                   | $0,1 \cdot 2^x$        |

Il faut plier 24 fois pour dépasser 1'000'000 mm d'épaisseur.

5.2

a)  $3^x$

b)  $x^3$

c)  $3^x$

d)  $e^x$

$x^3$  n'est pas une fonction exponentielle.

5.3

a) 225

d) 3

g) 1024

j) 10

m) 10

p)  $\frac{1}{4}$

s)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b)  $\frac{1}{49}$

e)  $\frac{1}{2}$

h)  $\frac{1}{e^5}$

k)  $\frac{1}{10}$

n)  $e$

q)  $\sqrt{2}$

t)  $\frac{7}{6}$

c)  $\frac{1}{128}$

f) 100

i)  $\frac{5}{4}$

l)  $\frac{1}{10}$

o) 1

r) 4

u)  $\sqrt[3]{7}$

5.4

|                 |                    |                  |                 |                |   |               |     |               |        |
|-----------------|--------------------|------------------|-----------------|----------------|---|---------------|-----|---------------|--------|
| x               | -2                 | $-\frac{3}{2}$   | -1              | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1   | $\frac{3}{2}$ | 2      |
| $\exp_{100}(x)$ | $\frac{1}{10'000}$ | $\frac{1}{1000}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 | 10            | 100 | 1000          | 10'000 |

5.5

|                  |    |                |                |   |               |                |                |                 |                 |
|------------------|----|----------------|----------------|---|---------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| x                | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{3}$  | 1              | $\frac{7}{6}$   | $\frac{4}{3}$   |
| $\exp_{1/64}(x)$ | 64 | 8              | 4              | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{128}$ | $\frac{1}{256}$ |

5.6

a) 14

d) 12

g)  $-\frac{1}{20}$

b) 2

e)  $\frac{2}{3}$

h) 8

c) 3

f)  $\frac{13}{6}$

i)  $-\frac{7}{6}$

5.7

a)  $3^{4x} = 81^x$

c)  $2^{x+1}$

e)  $7^{x^2+x-2}$

b)  $5^{x+10}$

d)  $1+3^x$

f)  $3^{6x}$

---

|            |                      |                          |                         |                     |
|------------|----------------------|--------------------------|-------------------------|---------------------|
| <b>5.8</b> | a) $10^x$            | c) $\frac{1}{625}5^{5x}$ | e) $16 \cdot 2^{4x}$    | g) $9 \cdot 3^{4x}$ |
|            | b) $32 \cdot 2^{4x}$ | d) $12 \cdot 12^x$       | f) $\frac{1}{9}3^{10x}$ | h) $8 \cdot 2^{2x}$ |

---

|            |                                                        |                                           |                                                              |
|------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| <b>5.9</b> | a) $\frac{a^x}{a^3} = a^{(x-3)} = \frac{1}{a^{(3-x)}}$ | c) $\sqrt{a} \cdot a^{x+2} = a^{(x+5/2)}$ | f) $a^{2x} \cdot (a^x)^{x+3} = a^{(x^2+5x)}$                 |
|            | b) $\frac{a}{\sqrt[5]{a^x}} = a^{(\frac{5-x}{5})}$     | d) $(a^{2x+1})^{2x+1} = a^{(4x^2+4x+1)}$  | g) $\left(\frac{a^{x+1}}{a^2}\right)^{x-4} = a^{(x^2-5x+4)}$ |
|            |                                                        | e) $\frac{a^x}{a^{x+3}} = a^{(-3)}$       | h) $(a-3)^x \cdot (a+3)^x = (a^2-9)^x$                       |

---

|             |                                     |                                      |                               |                                     |                              |
|-------------|-------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|------------------------------|
| <b>5.10</b> | a) $\mathcal{S} = \{-1\}$           | d) $\mathcal{S} = \{-6\}$            | g) $\mathcal{S} = \{-1; 2\}$  | j) $\mathcal{S} = \{-11\}$          | m) $\mathcal{S} = \{0; 4\}$  |
|             | b) $\mathcal{S} = \{2\}$            | e) $\mathcal{S} = \emptyset$         | h) $\mathcal{S} = \emptyset$  | k) $\mathcal{S} = \{4\}$            | n) $\mathcal{S} = \{2\}$     |
|             | c) $\mathcal{S} = \{\frac{18}{7}\}$ | f) $\mathcal{S} = \{-\frac{13}{2}\}$ | i) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ | l) $\mathcal{S} = \{\frac{1}{28}\}$ | o) $\mathcal{S} = \emptyset$ |

---

|             |                          |                              |                             |                          |
|-------------|--------------------------|------------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| <b>5.11</b> | a) $\mathcal{S} = \{2\}$ | b) $\mathcal{S} = \emptyset$ | c) $\mathcal{S} = \{1; 2\}$ | d) $\mathcal{S} = \{3\}$ |
|-------------|--------------------------|------------------------------|-----------------------------|--------------------------|

---

|             |                          |                             |
|-------------|--------------------------|-----------------------------|
| <b>5.12</b> | a) $\mathcal{S} = \{0\}$ | b) $\mathcal{S} = \{0; 1\}$ |
|-------------|--------------------------|-----------------------------|

---

|             |                                      |                                     |                           |                              |
|-------------|--------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------|------------------------------|
| <b>5.13</b> | a) $\mathcal{S} = \{1\}$             | d) $\mathcal{S} = \{-\frac{1}{2}\}$ | g) $\mathcal{S} = \{-1\}$ | j) $\mathcal{S} = \emptyset$ |
|             | b) $\mathcal{S} = \{0; 12\}$         | e) $\mathcal{S} = \{-3\}$           | h) $\mathcal{S} = \{1\}$  | k) $\mathcal{S} = \{2\}$     |
|             | c) $\mathcal{S} = \{-\frac{10}{3}\}$ | f) $\mathcal{S} = \{\frac{3}{2}\}$  | i) $\mathcal{S} = \{2\}$  | l) $\mathcal{S} = \{-1; 0\}$ |

---

## 9.6 Solutions - logarithmes

---

|            |      |      |      |      |                  |       |
|------------|------|------|------|------|------------------|-------|
| <b>6.1</b> | a) 6 | b) 4 | c) 2 | d) 0 | e) $\frac{1}{2}$ | f) -1 |
|------------|------|------|------|------|------------------|-------|

---

|            |      |       |      |       |                  |                  |      |                   |
|------------|------|-------|------|-------|------------------|------------------|------|-------------------|
| <b>6.2</b> | a) 6 | b) -2 | c) 0 | d) -3 | e) $\frac{1}{2}$ | f) $\frac{3}{5}$ | g) 1 | h) $-\frac{2}{3}$ |
|------------|------|-------|------|-------|------------------|------------------|------|-------------------|

---

|            |       |       |      |                  |                  |                   |
|------------|-------|-------|------|------------------|------------------|-------------------|
| <b>6.3</b> | a) 4  | c) 0  | e) 9 | g) $\frac{1}{2}$ | i) $\frac{3}{5}$ | k) $-\frac{6}{5}$ |
|            | b) -4 | d) 10 | f) 1 | h) $\frac{2}{5}$ | j) -4            | l) -3             |

---

|            |      |       |                  |      |      |                   |
|------------|------|-------|------------------|------|------|-------------------|
| <b>6.4</b> | a) 2 | b) -3 | c) $\frac{1}{4}$ | d) 1 | e) 0 | f) $-\frac{7}{2}$ |
|------------|------|-------|------------------|------|------|-------------------|

---

|            |      |                  |      |                  |                  |                  |
|------------|------|------------------|------|------------------|------------------|------------------|
| <b>6.5</b> | a) 3 | b) $\frac{1}{3}$ | c) - | d) $\frac{1}{3}$ | e) $\frac{3}{2}$ | f) $\frac{3}{4}$ |
|------------|------|------------------|------|------------------|------------------|------------------|

---

**6.6**      a) 3                                  b)  $-4$                                   c)  $\frac{3}{2}$                                   d)  $-8$

**6.7**

|                                        |                                                  |                                        |                                                 |
|----------------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------|
| a) $\mathcal{S} = \left\{ 60 \right\}$ | b) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{25}{8} \right\}$ | c) $\mathcal{S} = \left\{ 12 \right\}$ | d) $\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{1000} \right\}$ |
|----------------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------|

**6.8** a)  $\sim 5,32$       b)  $\sim 0,19$       c)  $\sim 1,85$       d)  $\sim 1,10$

**6.9**      a)  $\log_5(2) + \log_5(3) \simeq 1,1133$                       c)  $\frac{1}{2} \log_5(2) \simeq 0,21535$                       e)  $2\log_5(2) + 2\log_5(3) \simeq 2,2266$   
              b)  $4\log_5(2) \simeq 1,7228$                                       d)  $-\log_5(2) \simeq -0,4307$                       f)  $3\log_5(2) - 3\log_5(3) \simeq -0,7557$

**6.10**

|                                                                 |                                                              |                                                             |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| a) $\mathcal{S} = \left\{ \log_{17}(9) \right\}$                | d) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{2 - \ln(4)}{5} \right\}$     | g) $\mathcal{S} = \left\{ 8 - \log_5(3) \right\}$           |
| b) $\mathcal{S} = \left\{ \log_{17}(10) - 1 \right\}$           | e) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\log_2(34) - 1}{3} \right\}$ | h) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1 - \log_7(8)}{2} \right\}$ |
| c) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\text{Log}(2) + 6}{3} \right\}$ | f) $\mathcal{S} = \left\{ \ln(7) - 2 \right\}$               | i) $\mathcal{S} = \emptyset$                                |

**6.11**

|                                                                            |                                                                                    |                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\mathcal{S} = \left\{ \sqrt[3]{200} - 1 \right\} = \{ \sim 4, 85 \}$   | e) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{\log_{1,2}(200)} \right\} = \{ \sim 0, 10 \}$   | h) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{4} \log_{1,5} \left( \frac{300}{7} \right) \right\} = \{ \sim 2, 32 \}$ |
| b) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{15'625}{27} \right\} = \{ \sim 578, 70 \}$ | f) $\mathcal{S} = \left\{ \log_{1,2}(8'000'000) \right\} = \{ \sim 87, 18 \}$      | i) $\mathcal{S} = \left\{ 4 \log_{1,5} \left( \frac{300}{7} \right) \right\} = \{ \sim 37, 07 \}$          |
| c) $\mathcal{S} = \left\{ \log_{1,2}(200) \right\} = \{ \sim 29, 06 \}$    | g) $\mathcal{S} = \left\{ \sqrt[4]{\frac{300}{7}} - 1 \right\} = \{ \sim 1, 56 \}$ |                                                                                                            |
| d) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{216}{25} \right\} = \{ 8, 64 \}$           |                                                                                    |                                                                                                            |

### 6.12 À voir en classe

**6.13**   a)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\text{Log}\left(\frac{8}{125}\right)}{\text{Log}\left(\frac{32}{25}\right)} \right\}$       b)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\text{Log}(9)}{\text{Log}(147)} \right\}$

**6.14**   a)  $\mathcal{S} = \{5\}$       b)  $\mathcal{S} = \{16\}$       c)  $\mathcal{S} = \{4\}$       d)  $\mathcal{S} = \{3\}$       e)  $\mathcal{S} = \{64\}$       f)  $\mathcal{S} = \{10\}$

**6.15** a)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{e^5 - 1}{2} \right\}$       b)  $\mathcal{S} = \{125\}$       c)  $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{4} \right\}$       d)  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

**6.16**      a)  $\mathcal{S} = \{7\}$       b)  $\mathcal{S} = \emptyset$  (3 doit être éliminé)      c)  $\mathcal{S} = \{4\}$   
              (-4 doit être éliminé)      d)  $\mathcal{S} = \{1; 3\}$

**6.17** a)  $\mathcal{S} = \{5\}$  ( $-2$  doit être éliminé)      b)  $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$       c)  $\mathcal{S} = \{5\}$       d)  $\mathcal{S} = \emptyset$  ( $-5$  doit être éliminé)

---

**6.18**

|                                                                    |                                                                               |                                                  |                                                        |
|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| a) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{23}{41} \right\}$                  | c) $\mathcal{S} = \left\{ 2 \right\} \left( -\frac{23}{6} \notin D_f \right)$ | e) $\mathcal{S} = \left\{ 2; 3 \right\}$         | g) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{30+3e}{10-e} \right\}$ |
| b) $\mathcal{S} = \left\{ 4 \right\} \left( -5 \notin D_f \right)$ | d) $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{13}{6} \right\}$                             | f) $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{8}{3} \right\}$ | h) $\mathcal{S} = \emptyset$                           |

## 9.7 Solutions - applications des exponentielles et des logarithmes

---

a)  $2000 \cdot 1,05^{20}$  CHF 5306,60

b)  $2000 \cdot 1,05^n = 4000$   $n = \log_{1,05}(2) \approx 14,2$  au bout de 15 ans

**7.1** c)  $C_0 \cdot 1,05^{20} = 10'000$   $C_0 = \frac{10'000}{1,05^{20}} \approx 3768,89$  CHF 3768,90

d)  $2000 \cdot (1+i)^{20} = 10'000$   $i = \sqrt[20]{5} - 1 \approx 8,38\%$

e)  $2000 \cdot 1,005^{20}$  CHF 2209,79

---

**7.2** 3,2%

---

**7.3** CHF  $7,6 \cdot 10^{29}$

---

**7.4** 5,95%

---

**7.5**  $3 = (1,06)^x \implies x \approx 18,85$  La somme a triplé après 19 ans.

---

**7.6** a)  $3^{t/5}$  b)  $t \approx 31,4$  heures 31 h 26 min

---

**7.7**

|                                    |                                                 |                  |
|------------------------------------|-------------------------------------------------|------------------|
| a) $2^{t/6} = 1'000'000$           | $t = 6 \log_2(1'000'000) \approx 119,6$ minutes | environ 2 heures |
| b) $1'000'000(1+i)^4 = 2'000'000$  | $i = \sqrt[4]{2} - 1 \approx 0,189$             | 18,9% par heure  |
| $1'000'000(1+i)^{240} = 2'000'000$ | $i = \sqrt[240]{2} - 1 \approx 0,0029$          | 0,29% par minute |

---

**7.8**  $(0,99)^n = \frac{1}{2}$   $n = \log_{0,99}(0,5) \approx 68,97$  en 69 ans environ

---

**7.9**  $(0,8)^n = \frac{1}{4}$   $n = \log_{0,8}(0,25) \approx 6,21$  en approximativement 6 ans

---

**7.10**  $200'000 = x \cdot (1,0325)^{15}$  La quantité initiale de bois est d'environ 123'788 m<sup>3</sup>.

---

**7.11** a)  $15'000 = 25'000 \cdot x^{10}$   $x = \sqrt[10]{\frac{3}{5}} \approx 0,95$   $P(t) = 25'000 \cdot \left(\sqrt[10]{\frac{3}{5}}\right)^t$   
 b)  $10'000 = 25'000 \cdot \left(\sqrt[10]{\frac{3}{5}}\right)^t$   $t = 10 \cdot \frac{\log(2) - \log(5)}{\log(3) - \log(5)} = 10 \cdot \frac{\log(0,4)}{\log(0,6)} \approx 17,94$  Après 18 années.

---

Le deuxième placement est le plus avantageux.

**7.12** 1ère variante :  $1,05^{10} \cdot 1,03^{10} = 2,189$  donc une augmentation de 118,9%  
 2ème variante :  $1,04^{20} = 2,191$  donc une augmentation de 119,1%

---

**7.13** a) 86,03% b) 177,25%

---

Il est plus avantageux de fractionner le capital.

**7.14** 1ère variante :  $0,5 \cdot 1,03^{10} + 0,5 \cdot 1,05^{10} = 1,486$   
 2ème variante :  $1,04^{10} = 1,480$

---

a) Production intérieur :  $I_3 = 1'000'000 \cdot 1,11^3 = 1'367'631$   
 Production exportation :  $E_3 = 250'000 \cdot 1,4^3 = 686'000$   
**7.15** Production totale en 2015 : 2'053'631 vélos  
 b)  $1'000'000 \cdot 1,11^t = 250'000 \cdot 1,4^t$   $4 = \left(\frac{1,4}{1,11}\right)^t \Rightarrow t \approx 5,97$   
 La production pour l'exportation dépassera la production intérieure à partir de 2018.

---

a) Soit  $t$  le nombre de semaines écoulées depuis la première mesure.  
**7.16** Lorsque  $t = 1$ , on a  $Q(1) = 100 \cdot a^1 = 120$   $a = 1,2$   
 $Q(t) = 100 \cdot 1,2^t$   
 $N(3) = 100 \cdot (1,2)^3 = 172,8$   
 b)  $200 = 100 \cdot (1,2)^t$   
 $\Rightarrow t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,2)} \approx 3,8$  semaines.

---

**7.17**  $Q(1) = 3000 \cdot a^1 = 3060$   $a = 1,02$   $\Rightarrow Q(t) = 3000 \cdot 1,02^t$   $Q(12) = 3000 \cdot 1,02^{12} = 3'804,73$   
 Il y aura environ 3804 habitants en 2002.

---

a)  $Q(t) = 2'510 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{538}{251}}\right)^t$  b)  $2 = \left(\sqrt[3]{\frac{538}{251}}\right)^t \Rightarrow t = 2,73$   
**7.18**  $Q(7) = 2'510 \cdot \left(\frac{538}{251}\right)^{\frac{7}{3}} = 14'868,27$   
 Il y aura environ 14868 mouches après une semaine.

---

a)  $P_{dBm} = 10 \cdot \log(1000) = 30$  dbm  
 b)  $20 = 10 \cdot \log(P_{mW})$   $2 = \log(P_{mW})$   $P_{mW} = 100$  mW  
**7.19** c) 17 dBm  $\leftrightarrow$  50,12 mW 23 dBm  $\leftrightarrow$  199,53 mW 30 dBm  $\leftrightarrow$  1000 mW 10 dBm  $\leftrightarrow$  10 mW  
 d) 100 dBm  $\leftrightarrow$   $10^7$  W = 10 MW  
 e) 103 dBm  $\leftrightarrow$  20 MW  
 La puissance sonore a doublé, elle est donc de 10 MW supérieure à la limite légale !

---

## Références

- [1] S. Amaudruz : Puissances, racines, exponentielles et logarithmes. CADEV - n° 30'014, 2013.
- [2] H. Bovet : Analyse. CH-1608 Oron-le-Châtel, 1999.
- [3] H. Bovet : Algèbre. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2001.
- [4] H. Bovet et M. Cherix : Géométrie. CH-1608 Oron-le-Châtel, 1998.
- [5] CRM : Fondamentum de mathématique - Géométrie vectorielle et analytique plane. Num. 23 de Monographies de la CRM. CRM, 2400 Le Locle, g d'encre édn, 2013.
- [6] CRM : Fondamentum de mathématique - Analyse. Num. 25 de Monographies de la CRM. CRM, 2400 Le Locle, g d'encre édn, 2014.
- [7] CRM : Géométrie vectorielle et analytique. Num. 29 de Monographies de la CRM. CRM, 2400 Le Locle, g d'encre édn, 2016.
- [8] J.-P. Javet : La droite et le cercle dans le plan métrique. <http://www.javmath.ch>, 2016.
- [9] J.-P. Javet : Analyse I 2MStand. <http://www.javmath.ch>, 2020-2021.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch

sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 10 décembre 2023