

2M

Mathématiques

Puissances, racines, exponentielles et logarithmes

Sarah Delmonico

Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2023-2024

Table des matières

1	Puissances et racines	2
1.1	Puissances à exposant entier positif	2
1.2	Puissances à exposant entier négatif	4
1.3	Propriétés des puissances	4
1.4	Racines	7
1.5	Puissances à exposant rationnel	11
1.6	Puissances à exposant réel	12
2	Exponentielles	13
2.1	Introduction	13
2.2	Définition des fonctions exponentielles	14
2.3	Représentation graphique et propriétés	15
2.4	Équations exponentielles	16
3	Logarithmes	18
3.1	Définition	18
3.2	Propriétés	19
3.3	Retour sur les équations exponentielles	20
3.4	Représentation graphique	22
3.5	Équations logarithmiques	23
4	Exercices	25
4.1	Puissances et racines	25
4.2	Exponentielles	32
4.3	Logarithmes	36
5	Solutions	40
5.1	Réponses - Puissances et racines	40
5.2	Réponses - Exponentielles	43
5.3	Réponses - Logarithmes	44

1 Puissances et racines

1.1 Puissances à exposant entier positif

Soit n un entier strictement positif et a un nombre réel. On appelle **puissance n -ième de a** le nombre $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, qui se lit **a à la puissance n** .

Le nombre a s'appelle la **base** de la puissance et le nombre n s'appelle l'**exposant** de la puissance.

Exemple : Calculer les expressions ci-dessous.

a) $9000^2 =$

d) $17^1 =$

b) $(0,1)^3 =$

e) $0^8 =$

c) $1^{17} =$

f) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 =$

Quelques observations : Que se passe-t-il quand...

- on met un nombre à la puissance 1 ?
- la base est 1 ?
- la base est 0 ?
- la base "finit par des zéros" ?
- la base a des décimales ?
- la base est une fraction ?

Propriétés :

Les puissances à exposant pair sont forcément positives.

Les puissances à exposant impair ont le même signe que la base.

a) $(-2)^4 =$

c) $(+2)^4 =$

b) $(-2)^5 =$

d) $(+2)^5 =$

Remarque : Il faut faire attention à la priorité des opérations.

a) $(-5)^4 =$

e) $\left(\frac{12}{11}\right)^2 =$

b) $-5^4 =$

f) $\frac{12^2}{11} =$

c) $2 \cdot 3^2 =$

g) $10^{2^3} =$

d) $(2 \cdot 3)^2 =$

h) $(10^2)^3 =$

Quelques puissances à connaître et reconnaître :a) Les **carrés parfaits** :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x^2														

b) Les **cubes** et les puissances 4 :

x	2	3	4	5
x^3				
x^4				

c) Les **puissances de 2** :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n									

Remarque : La calculatrice a une touche qui permet de calculer les puissances. À essayer...

ex. 1.1 à 1.6

Observations : Compléter ce tableau des puissances de 5 de manière logique et en n'utilisant que des nombres entiers ou des fractions.

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
5^n									

- Comment doit-on définir 5^{-10} selon cette logique ?
- Comment doit-on définir a^{-n} selon cette logique ?
- Comment doit-on définir a^0 selon cette logique ?
- Que penser de 0^0 ?

1.2 Puissances à exposant entier négatif

Il est possible de généraliser la notion de **puissance à des exposants entiers négatifs ou nuls** de la manière suivante :

pour $a \neq 0$:

$$a^0 = 1$$

et

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Attention : 0^0 n'est pas défini.

Exemples : Calculer les expressions ci-dessous.

a) $2^{-3} =$

e) $4^0 =$

b) $3^{-2} =$

f) $0^4 =$

c) $(-2)^3 =$

g) $(0,1)^{-3} =$

d) $(-3)^2 =$

h) $(0,2)^{-2} =$

ex. 1.7 à 1.9

1.3 Propriétés des puissances

Observations :

a) Calculer $\left(\frac{7}{11}\right)^{-1}$ et $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$. Que peut-on observer ?

b) Calculer $\left(\frac{7}{11}\right)^{-2}$ et $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$. Que peut-on observer ?

Propriétés : Soit n un entier et a, b des nombres réels non nuls. On a :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$$

Exemples : Utiliser les propriétés pour calculer $\left(\frac{3}{10}\right)^4$, $\left(\frac{3}{10}\right)^{-1}$ et $\left(\frac{3}{10}\right)^{-4}$.

Observations :

a) Calculer $10^3 \cdot 10^4$. Que peut-on observer ?

b) Calculer $2^3 \cdot 2^{-4}$. Que peut-on observer ?

Propriétés : Soit n et m des entiers et a un nombre réel :

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Exemple : Utiliser cette propriété pour calculer $12^{-15} \cdot 12^{17}$.

Observations :

a) Calculer $\frac{10^3}{10^4}$. Que peut-on observer ?

b) Calculer $2^3 : 2^{-4}$. Que peut-on observer ?

Propriétés : Soit n et m des entiers et a un nombre réel non nul :

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Exemple : Utiliser cette propriété pour calculer $17^8 : 17^9$.

Observations :

a) Calculer $(10^3)^2$. Que peut-on observer ?

b) Calculer $(2^{-4})^{-1}$. Que peut-on observer ?

Propriétés : Soit n et m des entiers et a un nombre réel :

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Exemple : Utiliser cette propriété pour calculer $(0,0001)^{-2}$.

Observations :

a) Calculer $2^3 \cdot 5^3$. Que peut-on observer ?

b) Calculer $3^{-2} \cdot 4^{-2}$. Que peut-on observer ?

Propriétés : Soit n un entier et a, b deux nombres réels :

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Exemple : Utiliser cette propriété pour calculer $(-8)^5 \cdot 0,25^5$.

En résumé, les **propriétés des puissances** sont les suivantes :

Pour m, n des entiers et a, b des nombres réels, on a :

a) $a^0 = 1$ si $a \neq 0$

g) $0^n = 0$ si $n \neq 0$

b) $a^1 = a$

h) $1^n = 1$

c) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

i) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

d) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

j) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, si $b \neq 0$

e) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ si $a \neq 0$

k) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$, si $a, b \neq 0$

f) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, si $a \neq 0$

l) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$, si $a, b \neq 0$

Remarque : Il n'y a pas de propriétés pour simplifier une addition ou une soustraction de puissances.

$$2^2 + 1^2 =$$

$$(2+1)^2 =$$

Exemples : Calculer en utilisant les propriétés.

a) $\frac{35^4 \cdot 2^3 \cdot 2}{7^4} =$

b) $\frac{3^{11} \cdot 2^{11}}{(18^3)^4 \cdot 3^{-11}} =$

ex. 1.10 à 1.18

1.4 Racines

Soit n un entier positif non nul.

- Si n est *pair* :

La **racine n -ième** de x est le nombre réel *positif* y défini par :

$$y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x \text{ et } y \geq 0$$

Comme y^n est toujours positif si n est pair, $\sqrt[n]{x}$ n'est définie que si x est *positif*.

Exemples :

a) $\sqrt[2]{64} =$ car

b) $\sqrt[2]{-64} =$ car

c) $\sqrt[6]{64} =$ car

d) $\sqrt[2]{1'000'000} =$ car

e) $\sqrt[4]{0,0001} =$ car

f) $\sqrt[2]{\frac{49}{81}} =$ car

- Si n est *impair* :

La **racine n -ième** de x est le nombre réel y défini par :

$$y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x$$

Elle est donc définie pour tout x . Si x est *positif*, elle sera *positive*. Si x est *négatif*, elle sera *négative*.

Exemples :

a) $\sqrt[3]{64} =$ car

b) $\sqrt[3]{-64} =$ car

c) $\sqrt[1]{64} =$ car

d) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} =$ car

e) $\sqrt[3]{1'000'000} =$ car

f) $\sqrt[3]{-0,027} =$ car

Vérifier les réponses obtenues à l'aide des touches "racine" de la calculatrice.

Notation : On note généralement $\sqrt{x}$ à la place de $\sqrt[2]{x}$ et on l'appelle **racine carrée**.
 $\sqrt[3]{x}$ se lit **racine cubique**.

ex. 1.19 à 1.21

Historique

Au V^e av. J.-C., les Grecs ne connaissaient que les nombres rationnels $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire les nombres pouvant s'écrire sous forme de fraction.

Ils découvrent alors que la racine carrée de 2, la diagonale d'un carré de côté 1, ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers. Dès lors, une nouvelle catégorie de nombres apparaît : les irrationnels.

La racine d'un nombre naturel est soit un nombre naturel, soit un nombre irrationnel.

Exemples :

a) $\sqrt{0} =$

d) $\sqrt{3} =$

b) $\sqrt{1} =$

e) $\sqrt{4} =$

c) $\sqrt{2} =$

f) $\sqrt{5} =$

Propriétés des racines

Soit a et b des nombres réels *positifs*, alors :

a) $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

c) $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ si } b \neq 0$

d) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Exemples :

a) $\sqrt[3]{7} =$

e) $\sqrt{\frac{1}{9}} =$

b) $(\sqrt[3]{5})^3 =$

f) $\sqrt[3]{125'000} =$

c) $\sqrt[7]{29^7} =$

g) $\sqrt{3^2 + 4^2} =$

d) $\sqrt{484} =$

h) $\sqrt{13^2 - 5^2} =$

Ces propriétés sont-elles valables si a est négatif? Chercher les situations qui pourraient poser problème.

Autres propriétés des racines

Soit a un nombre réel positif, n et p des entiers positifs non nuls et m un entier, alors :

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$$

$$\sqrt[pn]{a^{pm}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Prouver ces propriétés à l'aide de la définition de $\sqrt[n]{}$ et des propriétés des puissances.

Exemples :

a) $\sqrt[3]{27^4} =$

e) $\sqrt[10]{2^{15}} =$

b) $\sqrt[6]{64^7} =$

f) $\sqrt[6]{8} =$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{a}} =$

g) $\sqrt[5]{32^4} =$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} =$

h) $\sqrt{\sqrt[3]{25}} =$

ex. 1.22

Extraction d'un entier d'une racine

En général, les réponses sous forme de racines doivent être simplifiées au maximum. On écrira $10\sqrt{7}$ plutôt que $\sqrt{700}$. Cela veut dire que l'on sort le plus grand entier possible de la racine de la manière suivante :

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a \cdot \sqrt{b}, \text{ pour } a, b \geq 0$$

Il faut donc d'abord décomposer le nombre sous la racine en produit, de manière à repérer les facteurs au carré.

On peut procéder de manière similaire pour les autres racines.

Exemples :

a) $\sqrt{72} =$

b) $\sqrt{54} =$

c) $\sqrt[3]{40} =$

d) $\sqrt{45} - \sqrt{20} =$

e) $\frac{\sqrt{700} + \sqrt{28}}{12} =$

ex. 1.23 à 1.25

Rationalisation des dénominateurs

En général, on ne laisse pas de racine au dénominateur.

Pour enlever une racine carrée du dénominateur, on amplifie la fraction par cette racine.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} =$

b) $\frac{21}{\sqrt{7}} =$

Pour enlever « $a \pm \sqrt{b}$ » du dénominateur, on amplifie la fraction par son conjugué « $a \mp \sqrt{b}$ ».

a) $\frac{1}{3 + \sqrt{2}} =$

b) $\frac{21}{4 - \sqrt{7}} =$

Pour enlever $\sqrt[n]{a^p}$ du dénominateur, on amplifie la fraction de manière à obtenir $\sqrt[n]{a^n}$.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} =$

b) $\frac{4}{\sqrt[5]{1000}} =$

ex. 1.26 à 1.28

Regroupement sous une même racine

On ne laisse pas de multiplication de racines.

Pour regrouper ces racines, il faut les transformer pour qu'elles aient le même indice n .

a) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[5]{2} =$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} =$

On ne laisse pas de racine dans une racine.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} =$

b) $\sqrt{3\sqrt{5}} =$

ex. 1.29 à 1.32

1.5 Puissances à exposant rationnel

L'objectif est de définir $a^{p/q}$ pour $a \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, en gardant les propriétés déjà étudiées des puissances.

Observations : Expliquer chaque étape de ces raisonnements :

$$a = a^1 = a^{1/2 \cdot 2} = (a^{1/2})^2 \quad \text{donc} \quad a^{1/2} = \sqrt[2]{a}$$

$$a = a^1 = a^{1/n \cdot n} = (a^{1/n})^n \quad \text{donc} \quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^p = a^{p/q \cdot q} = (a^{p/q})^q \quad \text{donc} \quad a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

On définit donc les **puissances à exposant rationnel** comme étant des racines :

Soit $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel et a un nombre réel positif :

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Exemples :

a) $1000^{1/3} =$

c) $125^{-2/3} =$

b) $1000^{2/6} =$

d) $625^{0,25} =$

Vérifier les réponses ci-dessus à l'aide des touches puissances de la calculatrice.

Remarque : Pour que cette définition ait un sens, il faut s'assurer qu'elle ne dépend pas de la fraction choisie pour représenter l'exposant, donc que $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{k \cdot p}{k \cdot q}}$ avec cette définition. C'est bien le cas grâce à la propriété des racines qui dit que $\sqrt[kp]{a^{kp}} = \sqrt[p]{a^k}$.

ex. 1.33 à 1.38

Propriétés des puissances à exposant rationnel

Les propriétés des puissances à exposant rationnel sont les mêmes que celles des puissances à exposant entier :

Soit m, n des nombres rationnels et a, b des nombres réels positifs.

$$a) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$d) (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$b) (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$e) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ si } b \neq 0$$

$$c) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ si } a \neq 0$$

$$f) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}, \text{ si } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0$$

Exemples :

$$a) a^{2/7} \cdot a^{1/4} =$$

$$d) 3^{1/3} \cdot 9^{1/3} =$$

$$b) (4^{1/3})^{15/2} =$$

$$e) \left(\frac{4}{25}\right)^{-1/2} =$$

$$c) (8a)^{1/3} =$$

$$f) \frac{a^{1/3}}{a^{-2/5}} =$$

ex. 1.39 à 1.40

1.6 Puissances à exposant réel

Nous avons défini jusqu'ici a^x lorsque x est rationnel et a un réel strictement positif.

Comment faire pour calculer 5^π ou pour tout autre exposant irrationnel ?

L'idée est de s'approcher de plus en plus de l'exposant par des nombres rationnels :

x	3	3,1	3,14	3,141	...	π	...	3,142	3,15	3,2	4
5^x	5^3	$5^{31/10}$				?		$5^{3142/1000}$	$5^{315/100}$	$5^{32/10}$	5^4
5^x	5^3	$\sqrt[10]{5^{31}}$				?		$\sqrt[1000]{5^{3142}}$	$\sqrt[100]{5^{315}}$	$\sqrt[10]{5^{32}}$	5^4
5^x	125	146,83				?		156,99	159,13	172,47	625

Que vaut 5^π d'après la calculatrice ?

ex. 1.41

2 Exponentielles

2.1 Introduction

« Quand vous recevrez cette lettre, versez-moi CHF 10.– puis recopiez la lettre 10 fois et envoyez-la à 10 de vos amis. Ainsi vous gagnerez CHF 100.– après avoir donné seulement CHF 10.– Ne brisez pas la chaîne car sinon le malheur s'abattra sur vous ! »

Imaginons que toutes les personnes qui reçoivent cette lettre en renvoient 10 le jour-même et que le courrier ne mette qu'un jour pour arriver à ses destinataires, compléter le tableau ci-dessous.

nb de jours depuis le début de la chaîne	nb de lettres envoyées ce jour-là
0	1
1	
2	
3	
4	
x	

Au bout de combien de temps, le nombre de lettres envoyées ce jour-là sera plus grand que la population mondiale (environ 8 milliards de personnes) ?

Les **problèmes de croissance exponentielle** sont des problèmes où **la quantité de départ est multipliée à chaque étape par une valeur constante**. C'est le cas, par exemple, avec les calculs d'intérêts composés ou la propagation d'une épidémie.

Pour les résoudre, nous allons avoir besoin de nouvelles fonctions : les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques.

ex. 2.1

2.2 Définition des fonctions exponentielles

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle **exponentielle de base a** la fonction :

$$\begin{aligned}\exp_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ \exp_a(x) &= a^x\end{aligned}$$

Exemples :

a) Compléter l'expression de la fonction :

$$\exp_2(x) =$$

$$\exp_{1,3}(x) =$$

$$\exp_{1/5}(x) =$$

b) Calculer :

$$\exp_4(2) =$$

$$\exp_4\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\exp_4(-1) =$$

$$\exp_4\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

Pourquoi $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$?

- $a \neq 0$ pour éviter les problèmes du type " 0^{-2} " car
- $a > 0$ pour éviter les problèmes du type " $(-1)^{1/2}$ " car
- $a \neq 1$ car $\exp_1(x) = \quad = \quad$. C'est donc une fonction $\quad$, elle a donc des propriétés différentes des autres fonctions exponentielles.

Bases privilégiées

Les calculatrices sont munies des touches exponentielles $10^x = \exp_{10}$ et $e^x = \exp_e$. Lorsqu'on note $\exp$ sans précision de la base, il s'agit de la base e .

Le nombre e (pour Euler¹), est un nombre très utilisé en mathématiques, au même titre que π .

$$e \approx 2,71828183$$

Exemples : Calculer à l'aide de la calculatrice :

a) $e^3 \approx$

b) $\sqrt{e} \approx$

c) $\sqrt[10]{e^3} \approx$

Une des propriétés remarquables de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est qu'elle est la seule fonction à être sa propre dérivée.

$$(e^x)' = e^x$$

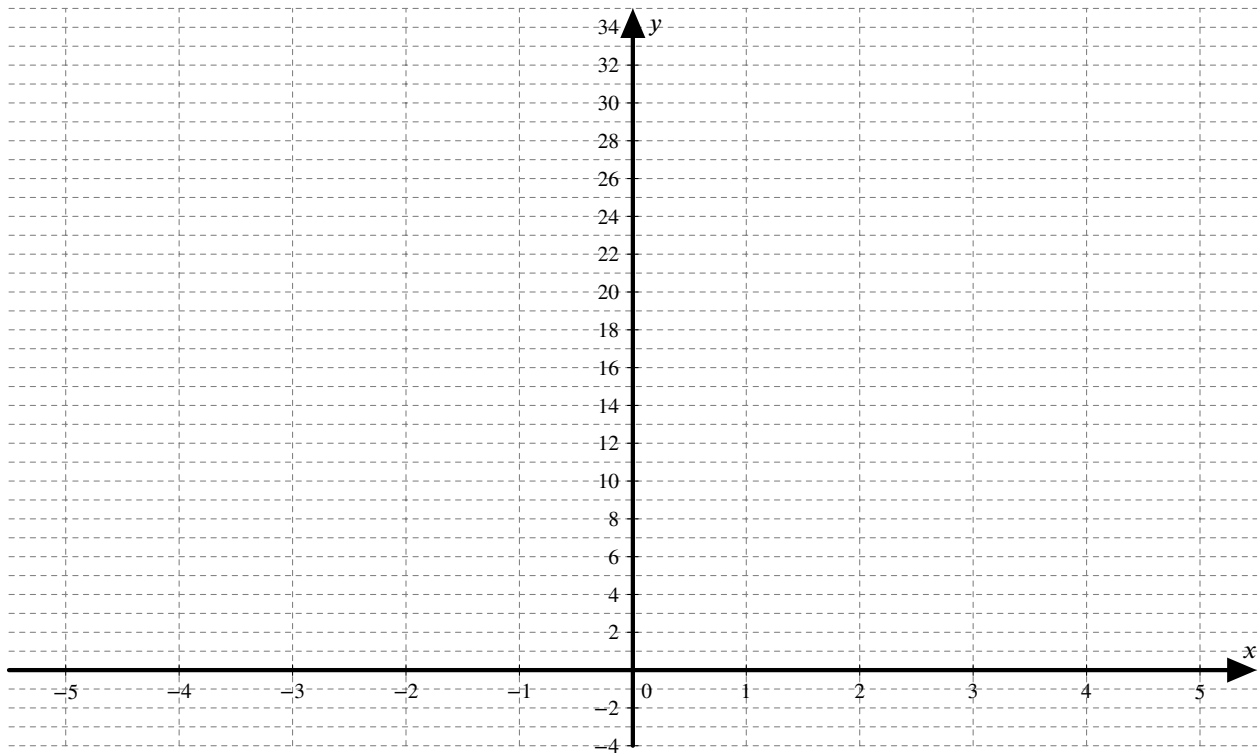
ex. 2.2 à 2.5

1. Léonard Euler, mathématicien suisse (1707-1783)

2.3 Représentation graphique et propriétés

Représenter les graphes des fonctions $\exp_2$ et $\exp_{1/2}$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\exp_2(x) = 2^x$									
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\exp_{1/2}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$									



Propriétés :

- Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction exponentielle $f(x) = \exp_a(x) = a^x$ est définie pour tout nombre réel x , donc $D_f = \mathbb{R}$.
- Son ordonnée à l'origine est toujours 1 car
- Elle n'a pas de zéros.
- Son tableau des signes est :
- Elle est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.

Ajouter le graphe de la fonction $h(x) = x^2$ sur le graphique ci-dessus et comparer les graphes.

Propriétés : Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$(i) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(iv) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(ii) \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(v) \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(iii) \quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

Rappel : Si $x \neq 1$, $(a+b)^x \neq a^x + b^x$ $(a-b)^x \neq a^x - b^x$ et $k(a+b)^x \neq (ka+kb)^x$

Exemples :

$$a) \quad (3^x)^{x+1} =$$

$$b) \quad \frac{7^3}{7^x} =$$

$$c) \quad 3 \cdot \frac{12^{x-1}}{4^{x-1}} =$$

ex. 2.6 à 2.9

2.4 Équations exponentielles

Une **équation exponentielle** est une équation dans laquelle la variable apparaît en exposant.

Pour la résoudre, on peut utiliser la propriété :

$$a^x = a^y \iff x = y$$

Exemples : Résoudre les équations :

$$a) \quad e^x = \frac{1}{\sqrt[5]{e^3}}$$

$$c) \quad 2^{4x^2-1} - \sqrt{2} = 0$$

$$b) \quad 3^x = 9^{x-1}$$

$$d) \quad 4 \cdot 2^x - 8 \cdot 4^{x+3} = 0$$

ex. 2.10

Exemple : Résoudre l'équation $2^{2x+2} - 7 \cdot 2^{x+1} = 8$.

ex. 2.11

Exemple : Résoudre l'équation $9 \cdot 3^{-3x} - 10 \cdot 3^{-x} + 3^x = 0$.

ex. 2.12 à 2.13

3 Logarithmes

3.1 Définition

Certaines équations exponentielles « simples » peuvent être résolues de tête mais d'autres non :

a) $10^x = 1'000'000$

b) $10^x = 2$

Il y a longtemps, les solutions de telles équations étaient listées dans des livres appelés « tables logarithmiques ». Maintenant, la calculatrice nous permet de les trouver rapidement grâce aux touches **LOG** et **LN**.

Exemples : Les solutions des équations ci-dessus se trouvent en calculant :

a) $\text{Log}(1'000'000) =$

b) $\text{Log}(2) =$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle **logarithme en base a** la fonction réciproque de la fonction $\exp_a$, notée :

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

On a donc :

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\exp_a} & a^x \\ \log_a(y) & \xleftarrow{\log_a} & y \\ \boxed{x = \log_a(y) \iff a^x = y} \end{array}$$

En d'autres termes, calculer $\log_a(y)$ c'est se demander $y = a^?$.

Exemples : Compléter :

a) $\log_3(81) =$ car

b) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) =$ car

c) $\log_7(1) =$ car

On note Log ou $\log$ au lieu de $\log_{10}$. C'est le **logarithme en base dix** ou **logarithme décimal**.

On note $\ln$ au lieu de $\log_e$. C'est le **logarithme naturel** ou **logarithme népérien**².

Exemples :

a) $\text{Log}(0,01) =$

b) $\ln(e^5) =$

ex. 3.1 à 3.5

2. John Néper, mathématicien britannique (1550-1617)

3.2 Propriétés

Calculer à l'aide de la définition et observer.

a) $\log_7(7^3) =$

b) $\log_7(49) =$

$7^{\log_7(49)} =$

c) $\log_7(1) =$

d) $\log_7(7) =$

e) $\log_3(9) =$

$\log_3(81) =$

f) $\log_3(9 \cdot 81) =$

$\log_3\left(\frac{9}{81}\right) =$

g) $\text{Log}(100) =$

$\text{Log}(100^4) =$

h) $\log_2(32) =$

$\log_2\left(\frac{1}{32}\right) =$

i) $\text{Log}(1'000'000) =$

$\text{Log}(100) =$

j) $\log_{100}(1'000'000) =$

Propriétés : Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in \mathbb{R}$.

(i) $\log_a(a^x) = x$

(v) $a^{\log_a(y)} = y$

(ii) $\log_a(1) = 0$

(vi) $\log_a(a) = 1$

(iii) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(vii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

(iv) $\log_a(x^q) = q \log_a(x)$

(viii) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

(ix) $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\text{Log}(x)}{\text{Log}(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Exemples : Calculer sans calculatrice.

a) $\text{Log}(2) + \text{Log}(5) =$

b) $\text{Log}(300) - \text{Log}(3) =$

La propriété (ix) de la page précédente est appelée **formule de changement de base**. Elle permet de calculer les logarithmes dans n'importe quelle base à l'aide des touches LN et LOG de la calculatrice.

Exemple : À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approximative de $\log_2(5)$.

Les propriétés des logarithmes se déduisent des propriétés des exponentielles.

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'un produit est la somme des exposants.
 $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ exprime la même propriété.
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'un quotient est la différence des exposants.
 $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ exprime la même propriété.
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'une puissance de puissance est le produit des exposants.
 $\log_a(x^q) = q \log_a(x)$ exprime la même propriété.

Attention aux fausses propriétés ! Comparer $\log(1000)$ et $\log(100)$ avec $\log(1000+100)$ et $\log(1000-100)$.

ex. 3.6 à 3.9

3.3 Retour sur les équations exponentielles

Pour résoudre ce genre d'équation, il est vivement conseillé **d'isoler l'exponentielle** avant d'appliquer le $\log_a$.

Exemple : Résoudre $3^{2x+6} = 7$.

Exemples : Résoudre.

a) $8 \cdot 10^{3x+1} + 7 = 167$

b) $e^{4-x} = 5e^x$

c) $3^{2x+1} = 2^{x-4}$

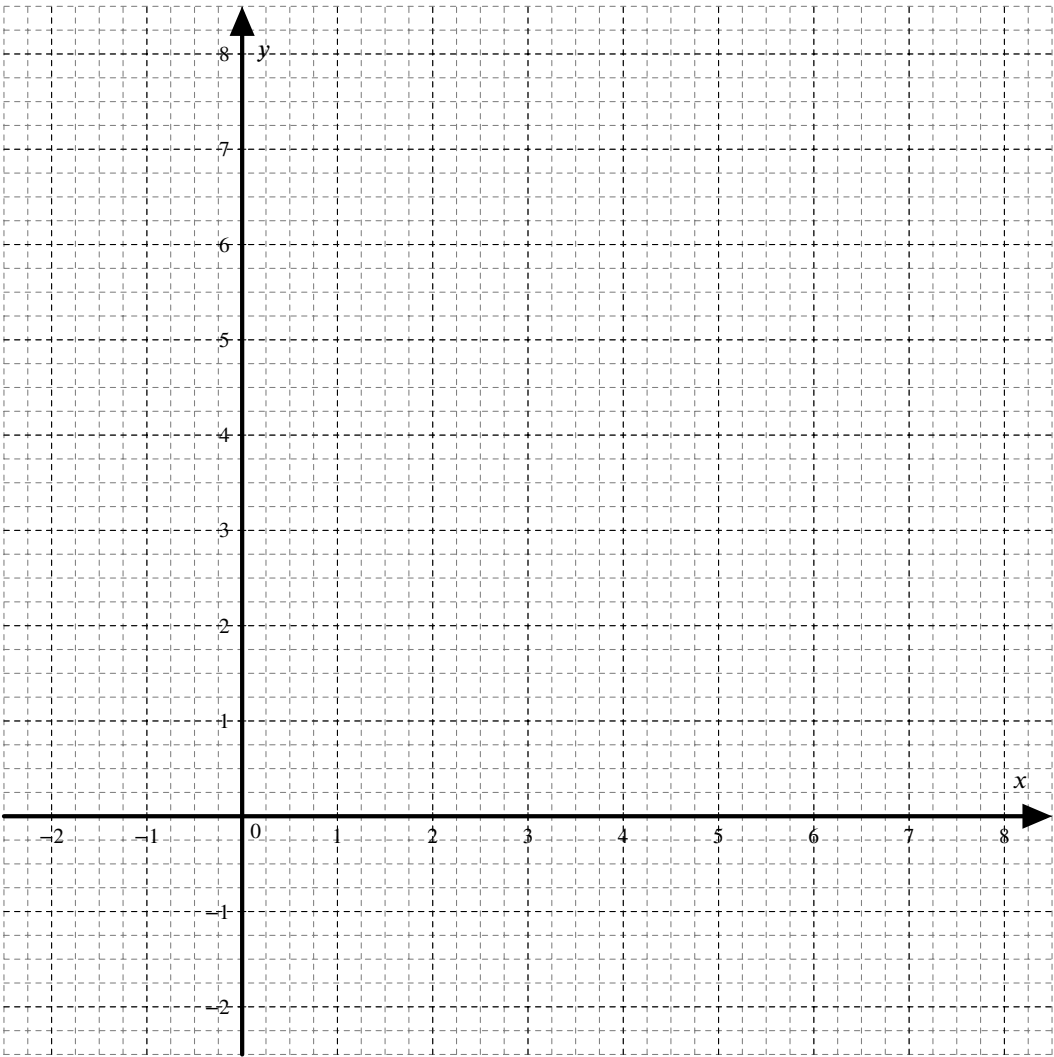
ex. 3.10 à 3.13

3.4 Représentation graphique

Représenter les graphes des fonctions $\exp_2$ et $\log_2$.

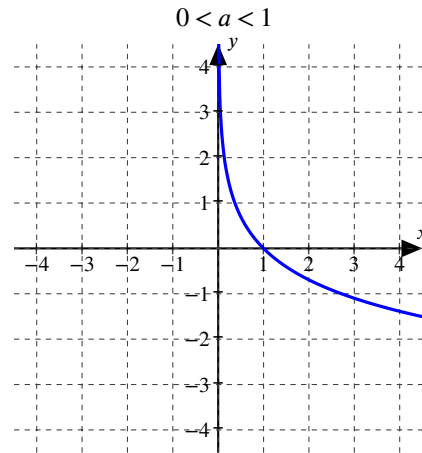
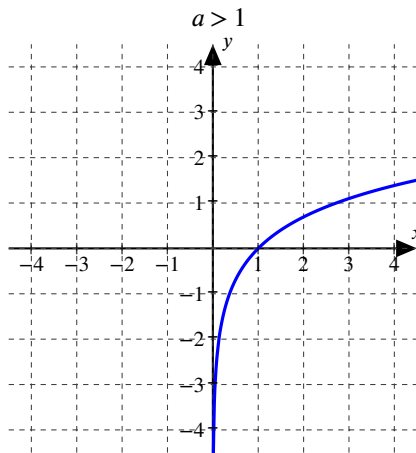
x	-2	-1	0	1	2	3
$\exp_2(x)$						

x	-1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\log_2(x)$													



- Comparer les deux graphes.
- Quel est l'ensemble de définition de la fonction $\log_a$? Pourquoi ?
- Quel est le zéro de la fonction $\log_a$? Pourquoi ?

- La fonction logarithme $\log_a$ est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.



- Son tableau des signes est :

3.5 Équations logarithmiques

Une **équation logarithmique** est une équation dans laquelle la variable apparaît dans un logarithme.

Exemples : Résoudre les équations :

a) $\ln(8+4x) = 12$

c) $\log_x(81) = 4$

b) $3\log_8(x) - 2 = 0$

d) $\text{Log}(x) + \text{Log}(x-3) = 1$

Remarque : Il ne faut pas oublier de contrôler que les réponses obtenues ne posent pas de problème dans l'équation de départ. Il faut que celles-ci soient dans l'ensemble de définition de l'équation de départ.

ex. 3.14 à 3.16

Exemples : Résoudre les équations :

a) $\text{Log}(5+x) = \text{Log}(4-x) + 1$

b) $\log_2(3x-4) + \log_2(10x-4) = 2\log_2(5x-2)$

ex. 3.17 à 3.18

4 Exercices

4.1 Puissances et racines

Puissances à exposant entier positif

Exercice 1.1 A) Calculer de tête.

- a) 300^2 b) $(-0,5)^3$ c) 9^0 d) 2^7 e) 0^8 f) $\left(\frac{8}{7}\right)^2$

B) Utiliser votre calculatrice pour vérifier vos réponses de l'exercice précédent. N'employer que les touches « puissance » et non la touche « multiplier ».

Exercice 1.2 Calculer de tête.

- a) $(-10)^6$ c) $(+10)^9$ e) $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ g) $(0,\overline{3})^3$ i) $(-1)^{1234}$
 b) $(-10)^9$ d) $\left(\frac{6}{11}\right)^2$ f) $0,25^2$ h) 0^0 j) $(0,\overline{6})^4$

Exercice 1.3 Calculer de tête.

- a) $(-1)^3$ e) $(-2)^4$ i) $-0,5^2$ m) -2^4 q) -3^3
 b) 1^5 f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ j) $(-2)^5$ n) -4^3 r) $-(-5)^2$
 c) 2^3 g) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ k) $-(3)^2$ o) $-(-\frac{1}{2})^2$ s) $-(-\frac{2}{3})^3$
 d) $(-2)^3$ h) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$ l) -5^3 p) $-(-2)^3$ t) $(-0,1)^4$

Exercice 1.4 Calculer de tête et répondre sous forme de nombre entier ou de code décimal.

- a) 6^2 e) $(-4)^3$ i) $12'000^2$ m) $-0,9^2$ q) $0,4^4$
 b) 3^3 f) $(-2)^7$ j) 5^4 n) $(+0,5)^3$ r) $(-0,07)^2$
 c) $(-14)^2$ g) 1100^2 k) 1500^2 o) $0,008^2$ s) $(-1,5)^2$
 d) $(-2)^{10}$ h) $(+130)^2$ l) $(-30)^4$ p) $(-0,2)^5$ t) 130^2

Exercice 1.5 Calculer sans calculatrice.

- a) $20^2(6^2 - 4^2)$ e) $5^3 \cdot 0^2 \cdot 7^5 + 2^1 \cdot 5^4$
 b) $2^5 + 2^3 \cdot 3^2$ f) $4^1 + 4^3 - 4^2$
 c) $(-2)^4 + (-1)^7 \cdot (-4)^3 - 3^0 \cdot 5^3 \cdot 0$ g) $7^0 - 13^2$
 d) $-3^2(5^2 - 2^3 \cdot 3)$ h) $(-4)^3 \cdot 1^2 - (2^3 \cdot 2^2 - 2)$

Exercice 1.6 Écrire sous forme de puissance avec un rationnel positif comme base et le plus grand entier possible comme exposant.

a) $\frac{1}{8}$

c) 0,25

e) 0,0081

g) $\frac{625}{81}$

b) 0,09

d) $\frac{1}{625}$

f) 0,125

h) $\frac{8}{128}$

Puissances à exposant entier négatif

Exercice 1.7 Calculer de tête et répondre sous forme de nombre entier ou de fraction.

a) 11^{-2}

e) 0^{-3}

i) $(-1)^9$

m) $(-1)^{-9}$

q) $(-5)^{-2}$

b) $(-4)^{-3}$

f) $(-3)^0$

j) $(+1)^9$

n) 9^{-1}

r) 2^{-5}

c) 0^7

g) 0^0

k) 9^1

o) $(-9)^{-1}$

s) $(-2)^5$

d) 7^0

h) 1^9

l) 1^{-9}

p) 5^{-2}

t) $(-2)^{-5}$

Exercice 1.8 Calculer de tête et répondre sous forme de nombre entier ou de fraction.

a) $\left(\frac{11}{13}\right)^2$

c) $\left(-\frac{3}{10}\right)^3$

e) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

g) $\left(\frac{11}{13}\right)^{-2}$

i) $\left(-\frac{3}{10}\right)^{-3}$

k) $\left(-\frac{1}{10}\right)^{-6}$

b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^4$

d) $\left(\frac{8}{7}\right)^{-1}$

f) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-2}$

h) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}$

j) $\left(\frac{5}{4}\right)^3$

l) $\left(\frac{12}{7}\right)^2$

Exercice 1.9 Calculer de tête et répondre sous forme de nombre entier ou de code décimal.

a) 10^4

c) $0,1^{-1}$

e) $0,001^{-1}$

g) $0,2^{-1}$

i) $0,002^{-1}$

k) $0,02^{-2}$

b) 10^{-4}

d) $0,5^{-2}$

f) $0,01^{-2}$

h) $0,02^{-1}$

j) $0,2^{-2}$

l) $0,002^{-2}$

Propriétés des puissances

Exercice 1.10 Simplifier les expressions suivantes en n'utilisant que des exposants positifs.

a) $5^7 \cdot 5^{-3}$

c) $(-4)^3 \cdot (-3)^3$

e) $\frac{23^{-2}}{23^{-4}}$

g) $2^3 \cdot 4^5$

b) $(7^2)^3$

d) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-5}$

f) $\frac{5^6}{5^2 \cdot 5^3}$

h) $\frac{3^7 + 2^7}{5^3 \cdot 5^4}$

Exercice 1.11 Calculer de tête.

a) $4^{-3} \cdot 25^{-3}$

b) $2^3 - 2^4$

c) $\frac{12^{91}}{12^{89}}$

d) $10^4 + 10^2$

e) $10^9 \div 10^{11}$

f) $(-2)^3 \cdot 5^{-2}$

Exercice 1.12 Compléter les exposants manquants.

a) $4^{-5} \cdot 4^{-7} = 4^{\dots}$

c) $(3^3)^{-5} = 3^{\dots}$

e) $10^6 = 100^{\dots} = 0,1^{\dots}$

b) $(2^9)^5 = 2^{\dots}$

d) $5^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5 \cdot 5^4 = 5^{\dots}$

f) $6^{16} : 6^{-5} = 6^{\dots}$

Exercice 1.13 Simplifier les expressions suivantes en n'utilisant que des exposants positifs.

a) $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \frac{1}{3^7}$

c) $-\left(\frac{1}{3}\right)^{-8}$

e) $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{3}\right)^6}$

b) $\frac{2^6 \cdot 7^7 \cdot 2}{14^3}$

d) $\frac{(24^5)^3 \cdot 3^2}{4^{15} \cdot 2^{15}}$

f) $\left(\frac{3}{5^4 \cdot 3^5}\right)^2$

Exercice 1.14 Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Simplifier les expressions suivantes en n'utilisant que des exposants positifs..

a) $x^3 \cdot x^7 \cdot x^{-4}$

d) $\left(\frac{3x^3}{9x^7}\right)^{-1}$

g) $(-x^2) \cdot (-x)^4$

j) $(-10x^2)^3$

b) $\frac{x^{4n}}{x^n}$

e) $\frac{(5x)^3}{x^7}$

h) $(-x)^3 - x^3$

k) $-\left(\frac{2}{x^4}\right)^{-2}$

c) $(2x)^n$

f) $(-x^3) \cdot (-x^4)$

i) $(-10x^3)^2$

l) $-(-x^7)^0$

Exercice 1.15 Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Simplifier les expressions suivantes en n'utilisant que des exposants positifs..

a) $(a^{-3})^2$

c) $a^{6n} \cdot a^{-4n}$

e) $2^n \cdot 5^{-n}$

g) $\frac{2^{-n}}{5^n}$

b) $a^4 \cdot a^{-6}$

d) $4^{-n} \cdot 5^{-n}$

f) $a^3 \cdot (2a)^{-2}$

h) $\frac{(a^2)^n}{a^{-2}}$

Exercice 1.16 Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Compléter les écritures des expressions suivantes.

a) $a^3 \cdot a^4 \cdot a^5 = a^{\dots}$

f) $\frac{4^{n+3}}{4^4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\dots}$

k) $a^{-4} \cdot a^{n+3} = a^{\dots}$

b) $(a^3)^4 = \frac{1}{a^{\dots}}$

g) $\frac{a^{n+1}}{a} = a^{\dots}$

l) $\frac{a^5}{a^{-2}} = a^{\dots}$

c) $\frac{a^4}{a^5} = a^{\dots}$

h) $(a^3 \cdot b^4)^2 = \frac{a^{\dots}}{b^{\dots}}$

m) $\frac{a^n}{a^{n-1}} = a^{\dots}$

d) $3^n \cdot 3^2 = 3^{\dots}$

i) $\frac{(a^2 \cdot b)^3 \cdot a^4}{(a \cdot b^3)^3} = a^{\dots} \cdot b^{\dots}$

n) $\left(\frac{a^{-3}}{a^{-4}}\right)^2 = a^{\dots}$

e) $5^{n+1} \cdot 5^{n-1} = 5^{\dots}$

j) $a^{-n} \cdot a^{n+1} = \frac{1}{a^{\dots}}$

o) $\left(\frac{a^3}{a^4}\right)^{-2} = a^{\dots}$

Exercice 1.17 Estimer le nombre de grains de sable dans le Sahara, sachant qu'on estime :

- la superficie du Sahara à 8 millions de km^2
- le nombre de grains de sable au m^2 à 2 milliards

Exercice 1.18 La Voie lactée, notre galaxie, ressemble à un disque. Elle est constituée d'environ deux cents milliards d'étoiles, dont la plupart sont semblables au Soleil. Toutes ces étoiles tournent autour de l'axe de rotation du disque. Le soleil se situe à $2,5 \cdot 10^{17}$ km du centre galactique. Depuis sa naissance, il y a 4,57 milliards d'années, il a effectué une vingtaine de tours.

La vitesse de révolution du Soleil autour de l'axe de la Voie lactée est-elle supérieure ou inférieure à celle d'un bolide de formule 1 ($\sim 300 \text{ km/h}$) ?

(Une estimation de tête, du moins sans machine à calculer, peut suffire pour répondre à la question.)

Racines

Exercice 1.19 Calculer de tête.

- | | | | |
|--------------------|------------------------|----------------------|------------------------|
| a) $\sqrt{0}$ | e) $\sqrt{160'000}$ | i) $\sqrt[5]{32}$ | m) $\sqrt[3]{125'000}$ |
| b) $\sqrt{225}$ | f) $\sqrt[4]{160'000}$ | j) $\sqrt{1,96}$ | n) $\sqrt[3]{0,001}$ |
| c) $\sqrt{0,04}$ | g) $\sqrt[3]{1000}$ | k) $\sqrt[3]{64}$ | o) $\sqrt[10]{1024}$ |
| d) $\sqrt{0,0009}$ | h) $\sqrt[4]{625}$ | l) $\sqrt[3]{0,027}$ | p) $\sqrt[3]{0,008}$ |

Exercice 1.20 Calculer de tête.

- | | | | |
|--------------------|--------------------|-------------------------|-----------------|
| a) $\sqrt[3]{-27}$ | b) $\sqrt[4]{-16}$ | c) $\sqrt[5]{-0,00032}$ | d) $\sqrt{-25}$ |
|--------------------|--------------------|-------------------------|-----------------|

Exercice 1.21 A) Calculer de tête.

- | | | | |
|-------------------------------|--------------------------|-----------------------|------------------------------|
| a) $\sqrt{25}$ | f) $\sqrt[6]{64}$ | k) $\sqrt[3]{-0,125}$ | p) $\sqrt[8]{1}$ |
| b) $\sqrt{10'000}$ | g) $\sqrt{1}$ | l) $\sqrt{115^2}$ | q) $\sqrt{196}$ |
| c) $\sqrt[3]{-1'000}$ | h) $\sqrt[3]{8'000'000}$ | m) $\sqrt[1]{5}$ | r) $\sqrt[3]{-8}$ |
| d) $\sqrt{-64}$ | i) $\sqrt{0,04}$ | n) $\sqrt[3]{0,027}$ | s) $\sqrt[3]{-0,001}$ |
| e) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$ | j) $\sqrt[3]{0,001}$ | o) $\sqrt[5]{0}$ | t) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ |

B) Vérifier à la calculatrice.

Propriétés des racines**Exercice 1.22** Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{\sqrt{3}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

i) $\sqrt[12]{125} \sqrt[12]{25} \sqrt[12]{5}$

n) $\sqrt[3]{125^7}$

b) $\sqrt[3]{5^{33}}$

f) $\sqrt{12}\sqrt{3}$

j) $\sqrt{2^2}$

o) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3}$

g) $\sqrt[7]{\sqrt{17^7}}$

k) $\sqrt{2^{36}}$

p) $\sqrt[3]{\sqrt{3^6}}$

d) $\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{2}$

h) $\sqrt[4]{81}\sqrt[4]{27}\sqrt[4]{3}$

l) $\sqrt{\sqrt{16}}$

q) $\sqrt[10]{2^5}$

m) $\sqrt[24]{3^8}$

r) $\sqrt[3]{9^5}\sqrt[3]{3^2}$

Exercice 1.23 Extraire le plus grand entier possible.

a) $\sqrt{12}$

c) $\sqrt{4000}$

e) $\sqrt{72}$

g) $\sqrt{12'500}$

b) $\sqrt{75}$

d) $\sqrt[3]{4000}$

f) $\sqrt[3]{72}$

h) $\sqrt[5]{12'500}$

Exercice 1.24 Effectuer et simplifier.

a) $3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$

f) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

k) $5\sqrt{45} - 3\sqrt{40}$

b) $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$

g) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}$

l) $2\sqrt{40} - 2\sqrt{90}$

c) $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

h) $2\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$

m) $(4 - \sqrt{43})\sqrt{43}$

d) $3\sqrt{7} - \sqrt{7}$

i) $2\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$

n) $(4 + \sqrt{35})(2 - \sqrt{5})$

e) $3\sqrt{7} + \sqrt{5} - 2\sqrt{7} - 8\sqrt{5}$

j) $3\sqrt{5} - 7\sqrt{20}$

o) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$

Exercice 1.25 Effectuer et simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{50} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - 7\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{5} + \sqrt{20} - 4\sqrt{80}$

b) $2\sqrt{54} - 2\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{6}$

e) $2\sqrt{81} - 5\sqrt{9} - 3\sqrt{36}$

c) $\sqrt{36} + 3\sqrt{6} - 5\sqrt{144}$

f) $\sqrt{98} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{72}$

Exercice 1.26 Ne pas laisser de racine aux dénominateurs des fractions.

a) $\sqrt{\frac{1}{7}}$

c) $\sqrt{\frac{9}{8}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{11}{2}}$

g) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

i) $\frac{1}{2 + \sqrt{7}}$

k) $\frac{10}{9 - \sqrt{11}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

d) $\sqrt{\frac{7}{27}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

h) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$

j) $\frac{\sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}}$

l) $\frac{7}{4 + \sqrt{2}}$

Exercice 1.27 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a \neq b$. Simplifier.

a) $\sqrt{ab^2c^3}$ b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{9a}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{a^6bc^5}{27b^4c^2}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

Exercice 1.28 Effectuer et simplifier les expressions suivantes.

a) $5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{18} + \sqrt{\frac{2}{9}} - \sqrt{\frac{9}{8}}$ c) $\sqrt{48} - \sqrt{\frac{12}{25}} + \sqrt{\frac{1}{3}} + 3\sqrt{75}$

Exercice 1.29 Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a}$ b) $\sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[3]{a^2}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt{10\sqrt[3]{a}}$

Exercice 1.30 Calculer de tête sachant que $\sqrt{27} \approx 5,19$ et $\sqrt{270} \approx 16,43$.

a) $\sqrt{2700}$ c) $\sqrt{270'000}$ e) $\sqrt{0,27}$
b) $\sqrt{27'000}$ d) $\sqrt{2,7}$ f) $\sqrt{0,027}$

Exercice 1.31 Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt[3]{125^2}$ e) $\frac{1}{5 + \sqrt{3}}$ i) $\frac{\sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$ m) $\sqrt{12} + \sqrt{27}$ q) $\sqrt[3]{-8}$
b) $\frac{4 + \sqrt{8}}{2}$ f) $\frac{14 - \sqrt{48}}{18}$ j) $\sqrt{\frac{39}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$ n) $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ r) $\frac{1}{\sqrt{3^3}}$
c) $\sqrt[3]{-250}$ g) $\sqrt[3]{16}$ k) $\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ o) $\sqrt{\frac{1}{8}}$ s) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
d) $\frac{5}{4\sqrt{3}}$ h) $\frac{1}{\sqrt{8}}$ l) $\sqrt{162}$ p) $2\sqrt{1000}$ t) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2$

Exercice 1.32 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 3\sqrt{2}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{3a^2b^3} \cdot \sqrt{6a^5b}$ c) $\sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt[3]{a^2b^5}$ e) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ g) $\sqrt[3]{a^{10}}$
b) $\frac{4b^3}{\sqrt{8b}}$ d) $\sqrt[3]{16a^3b^8c^4}$ f) $\sqrt{\frac{2a^2b^3}{8b}}$ h) $\frac{a + \sqrt{2}}{a + 3\sqrt{2}}$

Les puissances à exposant rationnel**Exercice 1.33** Écrire les expressions suivantes à l'aide de racines et simplifier.

- | | | | |
|------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------|
| a) $2^{4/5}$ | e) $\left(\frac{1}{9}\right)^{1/2}$ | i) $\left(\frac{27}{8}\right)^{2/3}$ | m) $8^{2/3}$ |
| b) $5^{1/2}$ | f) $0^{1/5}$ | j) $2^{-1/2}$ | n) $25^{-3/2}$ |
| c) $7^{31/40}$ | g) $25^{3/2}$ | k) $7^{-1/3}$ | o) $64^{-2/3}$ |
| d) $1024^{1/10}$ | h) $25^{0,5}$ | l) $4^{-5/3}$ | p) $1'000'000^{-1/6}$ |

Exercice 1.34 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Écrire sous forme de racine.

- | | | | |
|-------------------------------------|---------------|--------------------------------------|-----------------|
| a) $a^{5/7}$ | c) $a^{-1/2}$ | e) $a^{7/5}$ | g) $-a^{4/3}$ |
| b) $\left(\frac{a}{3}\right)^{1/2}$ | d) $a^{0,6}$ | f) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-3/4}$ | h) $(-a)^{9/4}$ |

Exercice 1.35 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Écrire les expressions suivantes à l'aide d'exposants rationnels positifs et simplifier.

- | | | | |
|---------------------|------------------------------|--|---------------------------------|
| a) $\sqrt[5]{32}$ | c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3^9}}$ | e) $\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^6}$ | g) $\frac{1}{\sqrt[6]{a^{6n}}}$ |
| b) $\sqrt[11]{5^6}$ | d) $\sqrt[5]{a^{15}}$ | f) $\sqrt[n]{5^{2n}}$ | h) $\sqrt[n]{1+a^n}$ |

Exercice 1.36 Calculer de tête.

- | | | | |
|--------------------------------------|--|---------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $81^{1/4}$ | d) $32^{1/5}$ | g) $(-5)^{-1/3}$ | j) $-4^{0,5}$ |
| b) $(-125)^{1/3}$ | e) $8^{-1/3}$ | h) $9^{-1/2}$ | k) $(-4)^{0,5}$ |
| c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1/3}$ | f) $\left(\frac{225}{169}\right)^{-1/2}$ | i) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-1/3}$ | l) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}$ |

Exercice 1.37 Écrire sous la forme 2^x .

- | | | | |
|------------------|-------------------|-------------------------|----------------------------|
| a) 16 | c) $\sqrt{8}$ | e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | g) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$ |
| b) $\frac{1}{8}$ | d) $\sqrt[7]{32}$ | f) $2\sqrt[3]{2}$ | h) $\frac{1}{1024}$ |

Exercice 1.38 Calculer de tête.

$$A = 8^{2/3} + 16^{1/2} + 27^{2/3} + 81^{1/4} - 125^{1/3} - 1'000^{2/3}$$

Propriétés des puissances à exposant rationnel**Exercice 1.39** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes. Répondre par une puissance.

- a) $a^{1/7} \cdot a^{2/21}$ d) $\left(\frac{2}{3}a^{2/3}\right)^3$ g) $\sqrt[3]{1'000'000a^6}$ j) $\frac{\sqrt{a}}{a}$
- b) $(a^{1/7})^{2/21}$ e) $\left(\frac{a}{64}\right)^{2/3}$ h) $a\sqrt[3]{a}$ k) $(\sqrt[n]{a})^{3n}$
- c) $a \cdot (a^2)^{3/4}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ i) $a^2\sqrt[3]{a}$ l) $\frac{\sqrt{a}}{a^{-1/5}}$

Exercice 1.40 Simplifier les expressions suivantes en passant par les exposants rationnels. Répondre par une racine.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$ c) $\frac{a^5}{\sqrt[4]{a^3}}$ e) $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a}$ g) $(\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a})^3$
- b) $\frac{\sqrt[3]{a^4}}{a}$ d) $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[5]{a^3}}$ f) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a}}$ h) $\frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}$

Puissances à exposant réel**Exercice 1.41** Calculer une approximation de $10^{\sqrt{2}}$ à l'aide du tableau ci-dessous.

x	1	1,4				...	$\sqrt{2}$	...				1,5	2
10^x	10^1	$10^{14/10}$					?					$10^{15/10}$	10^2
10^x	10^1	$10^{\sqrt{10^{14}}}$					?					$10^{\sqrt{10^{15}}}$	10^2
10^x	10	25,12					?					31,62	100

Que vaut $10^{\sqrt{2}}$ d'après la calculatrice ?**4.2 Exponentielles****Introduction****Exercice 2.1** Je plie une feuille de 0,1 mm d'épaisseur en deux, puis je replie en deux, et je continue de la même manière.

- a) Compléter le tableau ci-dessous :

n° de l'étape	nb de couches de papier	épaisseur totale en mm
0	1	0,1
1		
2		
3		
4		
x		

b) Combien de fois faut-il plier pour dépasser 1 km d'épaisseur ?

Définition

Exercice 2.2 Donner l'expression de la fonction.

a) $\exp_3(x)$

c) $\exp_{1/3}(-x)$

b) $\exp_x(3)$

d) $\exp(x)$

Est-ce que toutes les fonctions ci-dessus sont des fonctions exponentielles ?

Exercice 2.3 Calculer sans calculatrice.

- | | | |
|---|-----------------------------|--|
| a) $\exp_{15}(2)$ | h) $\exp(-5)$ | o) $\exp(0)$ |
| b) $\exp_7(-2)$ | i) $\exp_{4/5}(-1)$ | p) $\exp_{1/2}(2)$ |
| c) $\exp_2(-7)$ | j) $\exp_{100'000}(0,2)$ | q) $\exp_2\left(\frac{1}{2}\right)$ |
| d) $\exp_{27}\left(\frac{1}{3}\right)$ | k) $\exp_{1/100'000}(0,2)$ | r) $\exp_{1/2}(-2)$ |
| e) $\exp_{16}\left(-\frac{1}{4}\right)$ | l) $\exp_{100'000}(-0,2)$ | s) $\exp_2\left(-\frac{1}{2}\right)$ |
| f) $\exp_{10}(2)$ | m) $\exp_{1/100'000}(-0,2)$ | t) $\exp_{36/49}\left(-\frac{1}{2}\right)$ |
| g) $\exp_2(10)$ | n) $\exp(1)$ | u) $\exp_7\left(\frac{1}{3}\right)$ |

Exercice 2.4 Compléter le tableau de valeurs, sans utiliser de calculatrice.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$\exp_{100}(x)$									

Exercice 2.5 Compléter le tableau de valeurs, sans utiliser de calculatrice.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$
$\exp_{1/64}(x)$									

Propriétés

Exercice 2.6 Remplacer les "... " par un nombre entier ou une fraction irréductible.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $2^5 \cdot 8^3 = 2^{\dots}$ | d) $\frac{3^5 \cdot 3^4}{3^{-6}} \cdot 3^{-3} = 3^{\dots}$ | g) $\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[5]{3^4}} = 3^{\dots}$ |
| b) $3^5 \cdot \frac{1}{3^3} = 3^{\dots}$ | e) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = 5^{\dots}$ | h) $\left(\sqrt{7^3}\right)^5 \cdot \sqrt{7} = 7^{\dots}$ |
| c) $(3^3)^2 = 9^{\dots}$ | f) $\sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt{4^3} = 4^{\dots}$ | i) $\frac{\sqrt[4]{7^2}}{7^3} \sqrt[3]{7^4} = 7^{\dots}$ |

Exercice 2.7 Simplifier les expressions suivantes.

a) $9 \cdot 3^{4x-2}$

c) $\frac{32^x \cdot 2^5}{16^{x+1}}$

e) $\frac{1}{49} (7^{x+1})^x$

b) $\frac{5^{2x+7}}{5^{x-3}}$

d) $\frac{2^x + 6^x}{2^x}$

f) $(3^x \cdot 3)^2 \cdot 3^{4x-2}$

Exercice 2.8 Écrire sous la forme $k \cdot a^{bx}$ avec a, b et $c \in \mathbb{Z}$. a doit être positif et le plus petit possible.

a) $\exp_2(x) \cdot \exp_5(x)$

e) $\exp_4(x+1) \cdot \exp_4(x+1)$

b) $\exp_2(x) \cdot \exp_2(3x+5)$

f) $(\exp_3(5x-1))^2$

c) $\frac{\exp_5(4x+1)}{\exp_5(5-x)}$

g) $\left(\frac{\exp_9(1+x)}{3}\right)^2$

d) $\exp_4(x+1) \cdot \exp_3(x+1)$

h) $\exp_4(x+1) + \exp_4(x+1)$

Exercice 2.9 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Compléter les expressions suivantes.

a) $\frac{a^x}{a^3} = a^{(\dots)} = \frac{1}{a^{(\dots)}}$

e) $\frac{a^x}{a^{x+3}} = a^{(\dots)}$

b) $\frac{a}{\sqrt[5]{a^x}} = a^{(\dots)}$

f) $a^{2x} \cdot (a^x)^{x+3} = a^{(\dots)}$

c) $\sqrt{a} \cdot a^{x+2} = a^{(\dots)}$

g) $\left(\frac{a^{x+1}}{a^2}\right)^{x-4} = a^{(\dots)}$

d) $(a^{2x+1})^{2x+1} = a^{(\dots)}$

h) $(a-3)^x \cdot (a+3)^x = (\dots)^x$

Équations exponentielles

Exercice 2.10 Résoudre.

a) $25^{x+3} = 625$

f) $(10^{x+5})^2 = 0,001$

k) $5^{2x+4} - 125^x = 0$

b) $13^{3x-6} = 1$

g) $(2^{x-1})^x - 4 = 0$

l) $4^{3x} \cdot 16^{2x} = \sqrt{2}$

c) $2^{5x-2} = 4^{8-x}$

h) $3^{x-1} + 27 = 0$

m) $(5^{x-1})^x - 125^x = 0$

d) $\frac{6^{4-x}}{3^{4-x}} = 1024$

i) $\frac{11^{2x}}{121^x} = 1$

n) $2^{3x-2} \cdot 5^{3x-2} = 10'000$

e) $\frac{9^{3+x}}{3^x} = 0$

j) $\frac{7^{4x+5}}{49^{x-9}} = 7$

o) $6^{3x-2} - 6^{3x-4} = 0$

Exercice 2.11 Résoudre.

a) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 20 = 0$

c) $16^x - 20 \cdot 4^x + 64 = 0$

b) $10 \cdot 3^x + 9^x = -90$

d) $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} = 32$

Exercice 2.12 Résoudre.

a) $2 \cdot 5^{-x} - 5^x = 1$

b) $4 \cdot 2^{-3x} - 5 \cdot 2^{-x} + 2^x = 0$

Exercice 2.13 Résoudre les équations suivantes.

a) $2^{x+6} = 2^{3x+4}$

e) $2^x - 16 \cdot 2^{3x+2} = 0$

i) $3 \cdot 2^{2(x+1)} - 10 \cdot 2^{x+2} = 32$

b) $7^{8x^2+4} = 7^{(2-3x)^2}$

f) $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

j) $2 \cdot 2^{6x-1} + 3 \cdot 2^{3x+1} + 9 = 0$

c) $4^x = 16^{2x+5}$

g) $27^{x+2} = 3^{5x+8}$

k) $3^x + 9^x = 90$

d) $7^{2x+1} = 1$

h) $\frac{16^x \cdot 125^x}{5} = \frac{10^4}{5^{x+1}}$

l) $3^{x+1} + 3^{-x} = 4$

4.3 Logarithmes**Définition****Exercice 3.1** Calculer sans calculatrice.

a) $\log_2(64)$

c) $\log_{11}(121)$

e) $\log_9(3)$

b) $\log_5(625)$

d) $\log_7(1)$

f) $\log_2(0,5)$

Exercice 3.2 Calculer sans calculatrice.

a) $\text{Log}(1'000'000)$

c) $\text{Log}(1)$

e) $\text{Log}(\sqrt{10})$

g) $\text{Log}(10)$

b) $\text{Log}(0,01)$

d) $\text{Log}\left(\frac{1}{1000}\right)$

f) $\text{Log}(\sqrt[5]{1000})$

h) $\text{Log}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right)$

Exercice 3.3 Calculer sans calculatrice.

a) $\text{Log}(10'000)$

d) $\log_2(1024)$

g) $\log_7(\sqrt{7})$

j) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$

b) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$

e) $\log_2(512)$

h) $\log_3(\sqrt[5]{32})$

k) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[5]{64}}\right)$

c) $\log_5(1)$

f) $\log_3(3)$

i) $\log_4(\sqrt[5]{64})$

l) $\text{Log}(0,001)$

Exercice 3.4 Calculer sans calculatrice.

a) $\ln(e^2)$

c) $\ln(\sqrt[4]{e})$

e) $\ln(1)$

b) $\ln(\frac{1}{e^3})$

d) $\ln(e)$

f) $\ln(\frac{1}{\sqrt{e^7}})$

Exercice 3.5 Calculer sans calculatrice.

a) $\log_2(8)$

c) $\log_5(-5)$

e) $\log_4(8)$

b) $\log_8(2)$

d) $\log_{64}(4)$

f) $\log_{625}(125)$

Propriétés

Exercice 3.6 Calculer sans calculatrice.

a) $\log_2(40) + \log_2(3) - \log_2(15) =$

c) $3\log_{25}(40) - \log_{25}(64) - \log_{25}(8) =$

b) $\text{Log}(14) - \text{Log}(2000) - \text{Log}(70) =$

d) $4\log_3(10) - 2\log_3(8100) =$

Exercice 3.7 Résoudre sans calculatrice.

a) $\text{Log}(12) + \text{Log}(5) = \text{Log}(x)$

c) $\ln(16) + 2\ln(3) - 2\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(9) = \ln(x)$

b) $2\ln(5) - 3\ln(2) = \ln(x)$

d) $\frac{\text{Log}(20) + \text{Log}(100) - \text{Log}(2)}{\text{Log}(5000) - \text{Log}(5) + \text{Log}(0,1)} = \text{Log}(x)$

Exercice 3.8 À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approximative.

a) $\log_2(40)$

b) $\log_{40}(2)$

c) $\text{Log}(70)$

d) $\ln(3)$

Exercice 3.9 Sachant que $\log_5(2) \approx 0,4307$ et $\log_5(3) \approx 0,6826$ calculer.

a) $\log_5(6)$

c) $\log_5(\sqrt{2})$

e) $\log_5(36)$

b) $\log_5(16)$

d) $\log_5(0,5)$

f) $\log_5\left(\frac{8}{27}\right)$

Retour aux équations exponentielles

Exercice 3.10 Résoudre en donnant la réponse sous forme exacte.

a) $17^x + 1 = 10$

d) $4 \cdot e^{5x-2} = 1$

g) $5^{x+8} = 3 \cdot 5^{2x}$

b) $17^{x+1} = 10$

e) $5 \cdot 2^{3x+1} - 3 = 167$

h) $7^{3x} = \frac{7^{x+1}}{8}$

c) $7 + 10^{3x-6} = 9$

f) $7 \cdot e^{3-x} = e^5$

i) $3 = 5^{x^2+2}$

Exercice 3.11 Résoudre en donnant la réponse sous forme exacte puis au centième près.

a) $5 \cdot (1+x)^3 = 1000$

d) $5 \cdot (1+0,2)^3 = x$

g) $7 \cdot (1+x)^4 = 300$

b) $x \cdot (1+0,2)^3 = 1000$

e) $5 \cdot (1+0,2)^{3/x} = 1000$

h) $7 \cdot (1+0,5)^{4x} = 300$

c) $5 \cdot (1+0,2)^x = 1000$

f) $5 \cdot (1+0,2)^{x/3} = 1000$

i) $7 \cdot (1+0,5)^{x/4} = 300$

Exercice 3.12 Expliquer pourquoi l'ensemble des solutions de l'équation :

$$5^x = 3^{x+2}$$

peut s'écrire des différentes manières ci-dessous :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{2 \log_5(3)}{1 - \log_5(3)} \right\} = \left\{ \frac{2}{\log_3(5) - 1} \right\} = \left\{ \frac{2 \operatorname{Log}(3)}{\operatorname{Log}(5) - \operatorname{Log}(3)} \right\} = \left\{ \frac{\operatorname{Log}(9)}{\operatorname{Log}\left(\frac{5}{3}\right)} \right\}$$

Exercice 3.13 Résoudre (en valeur exacte) les équations suivantes.

a) $2^{5x-3} = 5^{2x-3}$

b) $3^{-x+2} = 7^{2x}$

Équations logarithmiques

Exercice 3.14 Résoudre les équations.

a) $x = \log_2(32)$

c) $\log_x(256) = 4$

e) $\log_4(x) = 3$

b) $\log_2(x) = 4$

d) $x = \log_5(125)$

f) $\log_x(1000) = 3$

Exercice 3.15 Résoudre.

a) $\ln(2x+1) = 5$

b) $2 \log_{25}(x) - 3 = 0$

c) $3 \log_{64}(x+1) = -1$

d) $\log_7(2x) = 0$

Exercice 3.16 Résoudre.

a) $\operatorname{Log}(x-4) = \operatorname{Log}(10-x)$

c) $2 \operatorname{Log}(x-3) = \operatorname{Log}(25-6x)$

b) $\log_2(x-4) = \log_2(2-x)$

d) $\ln(x^2+3) = \ln(4x)$

Exercice 3.17 Résoudre.

a) $\operatorname{Log}(x-3) + \operatorname{Log}(x) = 1$

c) $\log_3(x+10) - \log_3(x) = 1$

b) $\log_2(5-x) + \log_2(x+5) = 4$

d) $\log_3(x-10) - \log_3(x) = 1$

Exercice 3.18 Résoudre.

a) $\text{Log}(x+2) - \text{Log}(3) = \text{Log}(2x-1) + \text{Log}(7)$

b) $\text{Log}(x+2) + \text{Log}(x-1) = \text{Log}(18)$

c) $\text{Log}(2x-3) + \text{Log}(3x+10) = 4\text{Log}(2)$

d) $\log_2(x^2-4) = 2\log_2(x+3)$

e) $\log_3(35-x^3) = 3\log_3(5-x)$

f) $\text{Log}(x^2-7) = 2\text{Log}(x+3)$

g) $\ln(20) + \ln(x^2-9) - \ln(x+3) = 1 + \ln(2x+6)$

h) $\text{Log}(20) + \text{Log}(x^2-9) - \text{Log}(x+3) = 1 + \text{Log}(2x+6)$

5 Solutions

5.1 Réponses - Puissances et racines

1.1	a) 90'000	b) -0,125	c) 1	d) 128	e) 0	f) $\frac{64}{49}$
1.2	a) 1'000'000	c) 1'000'000'000	e) $\frac{1}{16}$	g) $\frac{1}{27}$	i) 1	
	b) -1'000'000'000	d) $\frac{36}{121}$	f) $\frac{1}{16} = 0,0625$	h) pas défini	j) $\frac{16}{81}$	
1.3	a) -1	e) 16	i) -0,25	m) -16	q) -27	
	b) 1	f) $\frac{1}{4}$	j) -32	n) -64	r) -25	
	c) 8	g) $\frac{4}{9}$	k) -9	o) $-\frac{1}{4}$	s) $\frac{8}{27}$	
	d) -8	h) $-\frac{1}{64}$	l) -125	p) 8	t) 0,0001	
1.4	a) 36	e) -64	i) 144'000'000	m) -0,81	q) 0,0256	
	b) 27	f) -128	j) 625	n) 0,125	r) 0,0049	
	c) 196	g) 1'210'000	k) 2'250'000	o) 0,000064	s) 2,25	
	d) 1024	h) 16'900	l) 810'000	p) -0,00032	t) 16'900	
1.5	a) 8000	c) 80	e) 1250	g) -168		
	b) 104	d) -9	f) 52	h) -94		
1.6	a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$	c) 0,5 ²	e) 0,3 ⁴	g) $\left(\frac{5}{3}\right)^4$		
	b) 0,3 ²	d) $\left(\frac{1}{5}\right)^4$	f) 0,5 ³	h) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$		
1.7	a) $\frac{1}{121}$	d) 1	h) 1	l) 1	o) $-\frac{1}{9}$	r) $\frac{1}{32}$
	b) $-\frac{1}{64}$	e) indéfini	i) -1	m) -1	p) $\frac{1}{25}$	s) -32
	c) 0	f) 1	j) 1	n) $\frac{1}{9}$	q) $\frac{1}{25}$	t) $-\frac{1}{32}$
		g) indéfini	k) 9			
1.8	a) $\frac{121}{169}$	c) $-\frac{27}{1000}$	e) 6	g) $\frac{169}{121}$	i) $-\frac{1000}{27}$	k) 1'000'000
	b) $\frac{16}{625}$	d) $\frac{7}{8}$	f) $\frac{225}{196}$	h) $\frac{625}{16}$	j) $\frac{125}{64}$	l) $\frac{144}{49}$
1.9	a) 10'000	c) 10	e) 1'000	g) 5	i) 500	k) 2'500
	b) 0,0001	d) 4	f) 10'000	h) 50	j) 25	l) 250'000
1.10	a) 5 ⁴	c) 12 ³	e) 23 ²	g) 2 ¹³		
	b) 7 ⁶	d) $\frac{7^5}{2^5}$	f) 5	h) $\frac{3^7+2^7}{5^7}$		
1.11	a) $100^{-3} = 0,000001$	c) $12^2 = 144$	e) $\frac{1}{100} = 0,01$			
	b) $8 - 16 = -8$	d) 10'100	f) $-8 \cdot \frac{1}{25} = -\frac{8}{25}$			
1.12	a) -12	b) 45	c) -15	d) 5	e) 3 et -6	f) 21

1.13 a) $\frac{3^6}{2^{12}}$ b) 14^4 c) -3^8 d) 3^{17} e) $\frac{3^{10}}{2^4}$ f) $\frac{1}{15^8}$

1.14 a) x^6 c) $2^n x^n$ e) $\frac{125}{x^4}$ g) $-x^6$ i) $100x^6$ k) $-\frac{1}{4}x^8$
 b) x^{3n} d) $3x^4$ f) x^7 h) $-2x^3$ j) $-1000x^6$ l) -1

1.15 a) $\frac{1}{a^6}$ c) a^{2n} e) $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ g) $\frac{1}{10^n}$
 b) $\frac{1}{a^2}$ d) $\frac{1}{20^n}$ f) $\frac{a}{4}$ h) a^{2n+2}

1.16 a) a^{12} d) 3^{n+2} g) a^n j) $\frac{1}{a^{-1}}$ m) a^1
 b) $\frac{1}{a^{-12}}$ e) 5^{2n} h) $\frac{a^6}{b^{-8}}$ k) a^{n-1} n) a^2
 c) a^{-1} f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{1-n}$ i) $a^7 \cdot b^{-6}$ l) a^7 o) a^2

1.17 Superficie en $8 \cdot 10^{12} \text{m}^2$, nombre de grains de sable : $1,6 \cdot 10^{22}$

Temps nécessaire pour effectuer un tour : $\sim 2,285 \cdot 10^8$ années

Périmètre de l'orbite du soleil : $\sim 1,5 \cdot 10^{18}$ km

1.18 Vitesse approximative du soleil : $\sim 7,5 \cdot 10^5$ km/h

Le soleil se déplace donc environ 2500 fois plus rapidement que la voiture de F1.

En valeur exacte, à l'aide de la machine à calculer, on trouvera $7,84 \cdot 10^5$

1.19 a) 0 d) 0,03 g) 10 j) 1,4 m) 50 p) 0,2
 b) 15 e) 400 h) 5 k) 4 n) 0,1
 c) 0,2 f) 20 i) 2 l) 0,3 o) 2

1.20 a) -3 b) pas défini c) $-0,2$ d) pas défini

1.21 Vérifier à la calculatrice

1.22 a) $\sqrt[4]{3}$ d) 2 g) $\sqrt{17}$ j) 2 m) $\sqrt[3]{3}$ p) 3
 b) 5^{11} e) $\frac{1}{3}$ h) 9 k) 2^{18} n) 5^7 q) $\sqrt{2}$
 c) 3 f) 6 i) $\sqrt{5}$ l) 2 o) 2 r) 81

1.23 a) $2\sqrt{3}$ c) $20\sqrt{10}$ e) $6\sqrt{2}$ g) $50\sqrt{5}$
 b) $5\sqrt{3}$ d) $10\sqrt[3]{4}$ f) $2\sqrt[3]{9}$ h) $5\sqrt[5]{4}$

1.24 a) 21 e) $\sqrt{7} - 7\sqrt{5}$ i) 24 m) $4\sqrt{43} - 43$
 b) 30 f) $\sqrt{15}$ j) $-11\sqrt{5}$ n) $8 - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{35} - 5\sqrt{7}$
 c) $7\sqrt{3}$ g) $3\sqrt{7}$ k) $15\sqrt{5} - 6\sqrt{10}$ o) $8 - 2\sqrt{15}$
 d) $2\sqrt{7}$ h) 12 l) $-2\sqrt{10}$

1.25 a) $3\sqrt{2}$ b) $-2\sqrt{6}$ c) $-54 + 3\sqrt{6}$ d) $-12\sqrt{5}$ e) -15 f) $10\sqrt{2}$

- 1.26** a) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ c) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt[3]{44}}{2}$ g) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ i) $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$ k) $\frac{9+\sqrt{11}}{7}$
b) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{21}}{9}$ f) $\frac{\sqrt[3]{50}}{5}$ h) $\frac{\sqrt[5]{16}}{2}$ j) $\frac{5\sqrt{2}+2}{23}$ l) $\frac{4-\sqrt{2}}{2}$
-
- 1.27** a) $bc\sqrt{ac}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{a^2c}{3b}$ d) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$
-
- 1.28** a) $\frac{19}{6}\sqrt{2}$ b) $-\frac{29\sqrt{2}}{12}$ c) $\frac{284\sqrt{3}}{15}$
-
- 1.29** a) $\sqrt[6]{a^5}$ b) $a\sqrt[15]{a^7}$ c) $\sqrt[6]{a}$ d) $\sqrt[6]{1000a}$
-
- 1.30** a) $\approx 51,9$ b) $\sim 164,3$ c) ~ 519 d) $\sim 1,643$ e) $\sim 0,519$ f) $\sim 0,1643$
-
- 1.31** a) 25 e) $\frac{5-\sqrt{3}}{22}$ i) $-\frac{5+\sqrt{5}}{4}$ m) $5\sqrt{3}$ q) -2
b) $2+\sqrt{2}$ f) $\frac{7-2\sqrt{3}}{9}$ j) $\frac{\sqrt{26}}{2}$ n) $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ r) $\frac{\sqrt{3}}{9}$
c) $-5\sqrt[3]{2}$ g) $2\sqrt[3]{2}$ k) $\frac{\sqrt[3]{36}}{3}$ o) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ s) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
d) $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ h) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ l) $9\sqrt{2}$ p) $20\sqrt{10}$ t) $3+2\sqrt{2}$
-
- 1.32** a) $3a^3b^2\sqrt{2a}$ c) $a \cdot b^2$ e) $\sqrt{a}$ g) $a^3\sqrt[3]{a}$
b) $b^2\sqrt{2b}$ d) $2ab^2c\sqrt[3]{2b^2c}$ f) $\frac{ab}{2}$ h) $\frac{a^2-2\sqrt{2}a-6}{a^2-18}$
-
- 1.33** a) $\sqrt[5]{16}$ e) $\frac{1}{3}$ i) $\frac{9}{4}$ m) 4
b) $\sqrt{5}$ f) 0 j) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ n) $\frac{1}{125}$
c) $\sqrt[40]{7^{31}}$ g) 125 k) $\frac{\sqrt[3]{49}}{7}$ o) $\frac{1}{16}$
d) 2 h) 5 l) $\frac{\sqrt[3]{4}}{16}$ p) $\frac{1}{10}$
-
- 1.34** a) $\sqrt[7]{a^5}$ c) $\frac{\sqrt{a}}{a}$ e) $a\sqrt[5]{a^2}$ g) $-a\sqrt[3]{a}$
b) $\frac{\sqrt{3a}}{3}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$ f) $\sqrt[4]{a^3}$ h) non défini
-
- 1.35** a) 2 c) $\frac{1}{27}$ e) $\frac{1}{a^3}$ g) $\frac{1}{a^n}$
b) $5^{6/11}$ d) a^3 f) 25 h) $(1+a^n)^{1/n}$
-
- 1.36** a) 3 c) $\frac{\sqrt[3]{20}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$ g) non défini i) 4 k) non défini
b) non défini d) 2 f) $\frac{13}{15}$ h) $\frac{1}{3}$ j) -2 l) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
-
- 1.37** a) 2^4 b) 2^{-3} c) $2^{3/2}$ d) $2^{5/7}$ e) $2^{-1/2}$ f) $2^{4/3}$ g) $2^{-2/5}$ h) 2^{-10}
-
- 1.38** $A = 4+4+9+3-5-100 = -85$

1.39

a) $a^{5/21}$	c) $a^{5/2}$	e) $\frac{a^{2/3}}{16}$	g) $100a^2$	i) $a^{7/3}$	k) $a^{3/2}$
b) $a^{2/147}$	d) $\frac{8}{27}a^2$	f) $a^{1/6}$	h) $a^{4/3}$	j) $a^{-1/2}$	l) $a^{7/10}$

1.40

a) $\sqrt[4]{2}$	c) $a^4 \sqrt[4]{a}$	e) a	g) $a\sqrt{a}$
b) $\sqrt[3]{a}$	d) $\sqrt[10]{a^9}$	f) $\sqrt[12]{a}$	h) 1

1.41 $\sim 25,95$

x	1	1,4	1,41	1,414	1,4142	...	$\sqrt{2}$	...	1,4143	1,415	1,42	1,5	2
10^x	10	25,12	25,70	25,94	25,95		?		25,96	26,00	26,30	31,62	100

5.2 Réponses - Exponentielles

2.1

n° de l'étape	nb de couches de papier	épaisseur totale en mm
0	1	0,1
1	2	0,2
2	4	0,4
3	8	0,8
4	16	1,6
x	2^x	$0,1 \cdot 2^x$

Il faut plier 24 fois pour dépasser 1'000'000 mm d'épaisseur.

2.2

a) 3^x b) x^3 c) 3^x d) e^x

x^3 n'est pas une fonction exponentielle.

2.3

a) 225	d) 3	g) 1024	j) 10	m) 10	p) $\frac{1}{4}$	s) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
b) $\frac{1}{49}$	e) $\frac{1}{2}$	h) $\frac{1}{e^5}$	k) $\frac{1}{10}$	n) e	q) $\sqrt{2}$	t) $\frac{7}{6}$
c) $\frac{1}{128}$	f) 100	i) $\frac{5}{4}$	l) $\frac{1}{10}$	o) 1	r) 4	u) $\sqrt[3]{7}$

2.4

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$\exp_{100}(x)$	$\frac{1}{10'000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000	10'000

2.5

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$
$\exp_{1/64}(x)$	64	8	4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$

	a) 14	d) 12	g) $-\frac{1}{20}$		
2.6	b) 2	e) $\frac{2}{3}$	h) 8		
	c) 3	f) $\frac{13}{6}$	i) $-\frac{7}{6}$		
2.7	a) $3^{4x} = 81^x$	c) 2^{x+1}	e) 7^{x^2+x-2}		
	b) 5^{x+10}	d) $1+3^x$	f) 3^{6x}		
2.8	a) 10^x	c) $\frac{1}{625}5^{5x}$	e) $16 \cdot 2^{4x}$	g) $9 \cdot 3^{4x}$	
	b) $32 \cdot 2^{4x}$	d) $12 \cdot 12^x$	f) $\frac{1}{9}3^{10x}$	h) $8 \cdot 2^{2x}$	
2.9	a) $\frac{a^x}{a^3} = a^{(x-3)} = \frac{1}{a^{(3-x)}}$	c) $\sqrt{a} \cdot a^{x+2} = a^{(x+5/2)}$	f) $a^{2x} \cdot (a^x)^{x+3} = a^{(x^2+5x)}$		
	b) $\frac{a}{\sqrt[5]{a^x}} = a^{(\frac{5-x}{5})}$	d) $(a^{2x+1})^{2x+1} = a^{(4x^2+4x+1)}$	g) $\left(\frac{a^{x+1}}{a^2}\right)^{x-4} = a^{(x^2-5x+4)}$		
		e) $\frac{a^x}{a^{x+3}} = a^{(-3)}$	h) $(a-3)^x \cdot (a+3)^x = (a^2-9)^x$		
2.10	a) $\mathcal{S} = \{-1\}$	d) $\mathcal{S} = \{-6\}$	g) $\mathcal{S} = \{-1; 2\}$	j) $\mathcal{S} = \{-11\}$	m) $\mathcal{S} = \{0; 4\}$
	b) $\mathcal{S} = \{2\}$	e) $\mathcal{S} = \emptyset$	h) $\mathcal{S} = \emptyset$	k) $\mathcal{S} = \{4\}$	n) $\mathcal{S} = \{2\}$
	c) $\mathcal{S} = \left\{\frac{18}{7}\right\}$	f) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{13}{2}\right\}$	i) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$	l) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{28}\right\}$	o) $\mathcal{S} = \emptyset$
2.11	a) $\mathcal{S} = \{2\}$	b) $\mathcal{S} = \emptyset$	c) $\mathcal{S} = \{1; 2\}$	d) $\mathcal{S} = \{3\}$	
2.12	a) $\mathcal{S} = \{0\}$	b) $\mathcal{S} = \{0; 1\}$			
2.13	a) $\mathcal{S} = \{1\}$	d) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$	g) $\mathcal{S} = \{-1\}$	j) $\mathcal{S} = \emptyset$	
	b) $\mathcal{S} = \{0; 12\}$	e) $\mathcal{S} = \{-3\}$	h) $\mathcal{S} = \{1\}$	k) $\mathcal{S} = \{2\}$	
	c) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{10}{3}\right\}$	f) $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$	i) $\mathcal{S} = \{2\}$	l) $\mathcal{S} = \{-1; 0\}$	

5.3 Réponses - Logarithmes

3.1	a) 6	b) 4	c) 2	d) 0	e) $\frac{1}{2}$	f) -1		
3.2	a) 6	b) -2	c) 0	d) -3	e) $\frac{1}{2}$	f) $\frac{3}{5}$	g) 1	h) $-\frac{2}{3}$
3.3	a) 4	c) 0	e) 9	g) $\frac{1}{2}$	i) $\frac{3}{5}$	k) $-\frac{6}{5}$		
	b) -4	d) 10	f) 1	h) $\frac{2}{5}$	j) -4	l) -3		
3.4	a) 2	b) -3	c) $\frac{1}{4}$	d) 1	e) 0	f) $-\frac{7}{2}$		
3.5	a) 3	b) $\frac{1}{3}$	c) -	d) $\frac{1}{3}$	e) $\frac{3}{2}$	f) $\frac{3}{4}$		

3.6	a) 3	b) -4	c) $\frac{3}{2}$	d) -8		
3.7	a) $\mathcal{S} = \left\{60\right\}$	b) $\mathcal{S} = \left\{\frac{25}{8}\right\}$	c) $\mathcal{S} = \left\{12\right\}$	d) $\mathcal{S} = \left\{\sqrt{1000}\right\}$		
3.8	a) $\sim 5,32$	b) $\sim 0,19$	c) $\sim 1,85$	d) $\sim 1,10$		
3.9	a) $\log_5(2) + \log_5(3) \simeq 1,1133$ b) $4\log_5(2) \simeq 1,7228$	c) $\frac{1}{2}\log_5(2) \simeq 0,21535$ d) $-\log_5(2) \simeq -0,4307$	e) $2\log_5(2) + 2\log_5(3) \simeq 2,2266$ f) $3\log_5(2) - 3\log_5(3) \simeq -0,7557$			
3.10	a) $\mathcal{S} = \left\{\log_{17}(9)\right\}$ b) $\mathcal{S} = \left\{\log_{17}(10) - 1\right\}$ c) $\mathcal{S} = \left\{\frac{\text{Log}(2)+6}{3}\right\}$	d) $\mathcal{S} = \left\{\frac{2-\ln(4)}{5}\right\}$ e) $\mathcal{S} = \left\{\frac{\log_2(34)-1}{3}\right\}$ f) $\mathcal{S} = \left\{\ln(7)-2\right\}$	g) $\mathcal{S} = \left\{8-\log_5(3)\right\}$ h) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1-\log_7(8)}{2}\right\}$ i) $\mathcal{S} = \emptyset$			
3.11	a) $\mathcal{S} = \left\{\sqrt[3]{200}-1\right\} = \{\sim 4,85\}$ b) $\mathcal{S} = \left\{\frac{15'625}{27}\right\} = \{\sim 578,70\}$ c) $\mathcal{S} = \left\{\log_{1,2}(200)\right\} = \{\sim 29,06\}$ d) $\mathcal{S} = \left\{\frac{216}{25}\right\} = \{8,64\}$	e) $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{\log_{1,2}(200)}\right\} = \{\sim 0,10\}$ f) $\mathcal{S} = \left\{\log_{1,2}(8'000'000)\right\} = \{\sim 87,18\}$ g) $\mathcal{S} = \left\{\sqrt[4]{\frac{300}{7}}-1\right\} = \{\sim 1,56\}$	h) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{4}\log_{1,5}\left(\frac{300}{7}\right)\right\} = \{\sim 2,32\}$ i) $\mathcal{S} = \left\{4\log_{1,5}\left(\frac{300}{7}\right)\right\} = \{\sim 37,07\}$			
3.12	À voir en classe					
3.13	a) $\mathcal{S} = \left\{\frac{\text{Log}\left(\frac{8}{125}\right)}{\text{Log}\left(\frac{32}{25}\right)}\right\}$		b) $\mathcal{S} = \left\{\frac{\text{Log}(9)}{\text{Log}(147)}\right\}$			
3.14	a) $\mathcal{S} = \left\{5\right\}$	b) $\mathcal{S} = \left\{16\right\}$	c) $\mathcal{S} = \left\{4\right\}$	d) $\mathcal{S} = \left\{3\right\}$	e) $\mathcal{S} = \left\{64\right\}$	f) $\mathcal{S} = \left\{10\right\}$
3.15	a) $\mathcal{S} = \left\{\frac{\text{e}^5-1}{2}\right\}$	b) $\mathcal{S} = \left\{125\right\}$	c) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$	d) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$		
3.16	a) $\mathcal{S} = \left\{7\right\}$ b) $\mathcal{S} = \emptyset$	(3 doit être éliminé) c) $\mathcal{S} = \left\{4\right\}$	(-4 doit être éliminé)	d) $\mathcal{S} = \left\{1;3\right\}$		
3.17	a) $\mathcal{S} = \left\{5\right\}$ (-2 doit être éliminé)	miné) b) $\mathcal{S} = \left\{-3;3\right\}$	c) $\mathcal{S} = \left\{5\right\}$ d) $\mathcal{S} = \emptyset$	(-5 doit être éliminé)		
3.18	a) $\mathcal{S} = \left\{\frac{23}{41}\right\}$ b) $\mathcal{S} = \left\{4\right\}$ ($-5 \notin \text{ED}$)	c) $\mathcal{S} = \left\{2\right\}$ ($-\frac{23}{6} \notin \text{ED}$) d) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{13}{6}\right\}$	e) $\mathcal{S} = \left\{2;3\right\}$ f) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$	g) $\mathcal{S} = \left\{\frac{30+3\text{e}}{10-\text{e}}\right\}$ h) $\mathcal{S} = \emptyset$		

Références

- [1] S. Amaudruz : Analyse I 2M. Gymnase du Bugnon.
- [2] S. Amaudruz : Puissances, racines, exponentielles et logarithmes. CADEV - n° 30'014, 2013.
- [3] H. Bovet : Analyse. CH-1608 Oron-le-Châtel, 1999.
- [4] H. Bovet : Algèbre. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2001.
- [5] CRM : Fondamentum de mathématique - Analyse. Num. 25 de Monographies de la CRM. CRM, 2400 Le Locle, g d'encre édn, 2014.
- [6] J.-P. Javet : Analyse I 2MStand. <http://www.javmath.ch>, 2020-2021.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch
sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 21 juillet 2023