

1M standard

Géométrie vectorielle et Trigonométrie

Cédric Delmonico

Sarah Delmonico

Gymnases d'Yverdon et du Bugnon

Table des matières

Partie I - Géométrie vectorielle

1 Vecteurs	3
1.1 Notions de vecteur	3
1.2 Opérations avec les vecteurs	6
1.3 Combinaisons linéaires	11
2 Bases	12
2.1 Opérations dans une base	13
2.2 Colinéarité	14
3 Repères et coordonnées	15
3.1 Calculs dans les repères	17
4 Normes	19
4.1 Norme d'un vecteur	19
4.2 Vecteurs unitaires	21
5 Produit scalaire	22
5.1 Produit scalaire et perpendicularité	22
5.2 Interprétation géométrique	26

Partie II - Trigonométrie

6 Rapports trigonométriques	29
6.1 Les angles	29
6.2 Les rapports trigonométriques	30
6.3 Résolution de triangles rectangles	32
6.4 Angles particuliers	33
7 Autres unités de mesure d'angle	34
7.1 Les degrés décimaux et sexagésimaux	34
7.2 Les radians	35
8 Arcs et secteurs	37
8.1 Longueurs d'arcs et aires de secteurs	37
8.2 Applications géographiques	38
9 Cercle trigonométrique	40
9.1 Rapports trigonométriques généralisés	40
9.2 Propriétés	43
10 Équations trigonométriques simples	45
11 Résolution de triangles quelconques	47
11.1 Théorème du cosinus	47
11.2 Théorème de l'aire	51
11.3 Théorème du sinus	52

12 Exercices	54
12.1 Vecteurs	54
12.2 Bases	62
12.3 Repères et coordonnées	65
12.4 Normes	68
12.5 Produit scalaire	69
12.6 Les rapports trigonométriques	72
12.7 Autres unités de mesure d'angles	74
12.8 Arcs et secteurs	75
12.9 Cercle trigonométrique	78
12.10 Équations trigonométriques simples	80
12.11 Résolution de triangles quelconques	81
13 Solutions	82
13.1 Vecteurs	82
13.2 Bases	86
13.3 Repères et coordonnées	88
13.4 Normes	89
13.5 Produit scalaire	90
13.6 Rapports trigonométriques	91
13.7 Autres unités de mesure d'angles	93
13.8 Arcs et secteurs	93
13.9 Cercle trigonométrique	94
13.10 Équations trigonométriques simples	97
13.11 Résolution de triangles quelconques	97

PARTIE I : GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

1 Vecteurs

1.1 Notions de vecteur

En physique, en mathématiques ou dans la vie courante, on exprime des quantités ou des mesures à l'aide de nombres que l'on peut associer à une unité.

Exemples :

- Le prix d'un pull chez H&M : 9,90 Frs
- La distance Yverdon-Lausanne : 29,5 km
- La masse d'un objet : 2,53 kg
- La température de l'air : 18°C

Mais un nombre est-il suffisant pour qualifier les informations suivantes ?

- la vitesse d'un objet
- une translation (déplacement d'un objet)
- un courant marin
- le vent

En plus de leur amplitude, il est nécessaire d'indiquer leur direction.

On peut représenter graphiquement la vitesse d'un objet, une force, une translation à l'aide de flèches.

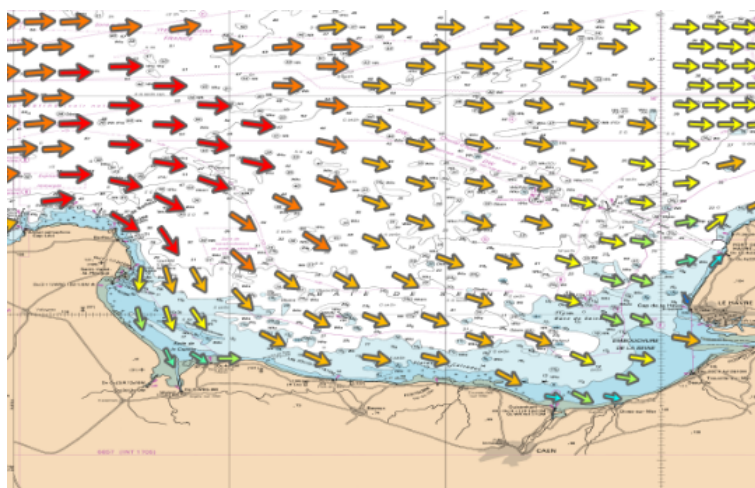


Figure 1 – carte de courants marins

Définition 1.1 Soit une flèche.

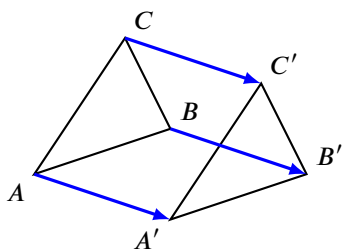


- Le point A est appelé son **origine**
- le point B est son **extrémité**
- la distance $\delta(A; B)$ est sa **longueur**

La flèche d'origine A et d'extrémité B se note $(A; B)$.

Remarques :

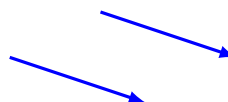
- Deux voitures peuvent rouler à la même vitesse sans forcément être au même endroit.
- La même translation agit sur n'importe quel point du plan ou de l'espace.



Les flèches $(A; A')$, $(B; B')$ et $(C; C')$ représentent toutes la même translation.

Définition 1.2 On va dire que **deux flèches sont équivalentes** (ou équipollentes) si elles ont :

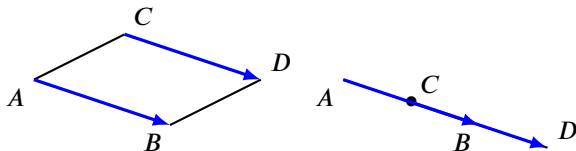
- la même **direction** (sont parallèles)
- le même **sens**
- la même **longueur**.



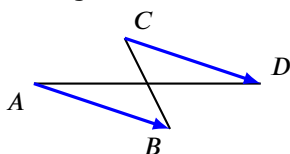
En d'autres termes, **deux flèches sont équivalentes** si elles représentent la même translation.

Remarques : Il est possible de définir l'équivalence entre deux flèches $(A; B)$ et $(C; D)$ de plusieurs autres manières :

- Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement dégénéré).



- Les segments AD et BC se coupent en leur milieu.

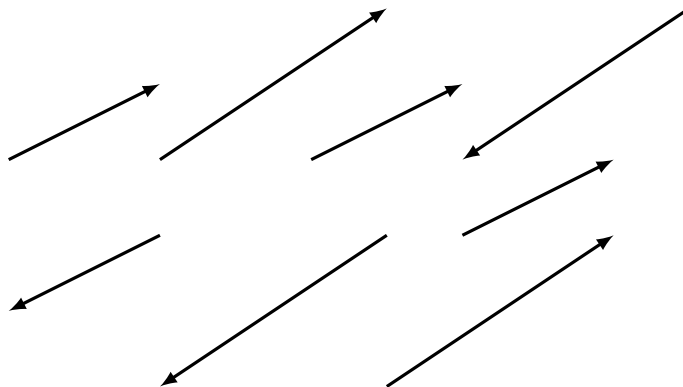


Définition 1.3 On appelle **vecteur** un « ensemble » de flèches qui sont équivalentes entre elles (classe d'équivalence). Chacune de ces flèches est appelée **représentant du vecteur**.

En d'autres termes, un vecteur est caractérisé par trois éléments :

- une direction
- un sens
- une longueur.

Exemple : Parmi les flèches ci-dessous, identifier celles qui représentent le même vecteur.



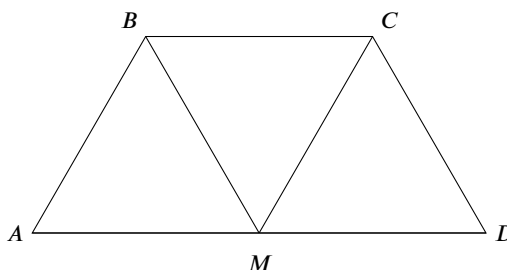
Notations :

- On note souvent les vecteurs avec une lettre minuscule surmontée d'une flèche, par exemple $\vec{v}$.
- On peut aussi nommer le vecteur par l'un de ses représentants.
Donc, on notera $\overrightarrow{AB}$ le vecteur qui a pour représentant la flèche d'origine A et d'extrémité B .
- On note V^2 , l'ensemble de tous les vecteurs du plan. On l'appelle le **plan vectoriel**.

De plus, on dira qu'on dessine un vecteur, alors qu'il n'est possible de dessiner que ses représentants.

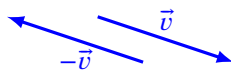
Exemple :

Le trapèze isocèle ci-dessous est formé de trois triangles équilatéraux. Identifier toutes les flèches qui représentent un même vecteur. (On ne considérera que les flèches portées par les segments dessinés.)



Définition 1.4 Soit $\vec{v}$ un vecteur.

On appelle **vecteur opposé** de $\vec{v}$, le vecteur qui a la même direction, la même longueur, mais qui a le sens opposé à $\vec{v}$. On le note $-\vec{v}$.



Proposition 1.1 Si A et B sont deux points, alors

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

Définition 1.5 On appelle **vecteur nul** et on note $\vec{0}$ le vecteur représenté par les flèches de longueur 0.

Proposition 1.2 Si A est un point, alors

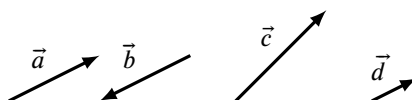
$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

Définition 1.6 On dit que deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.

En d'autres termes, deux vecteurs sont **colinéaires** si leurs représentants sont parallèles entre eux.

On dira que le vecteur $\vec{0}$ est colinéaire à n'importe quel autre vecteur.

Exemple :

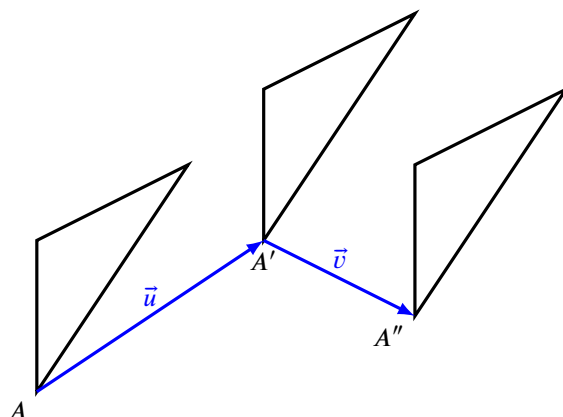


Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires entre eux, mais pas $\vec{c}$.

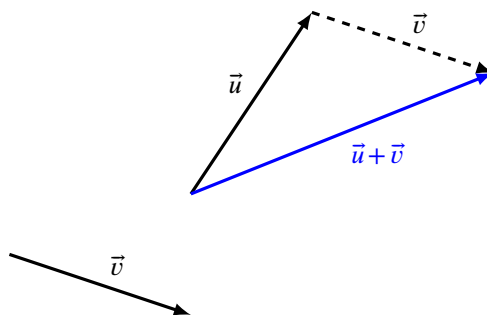
ex. 1.1 à 1.3

1.2 Opérations avec les vecteurs

On fait subir à un triangle deux translations successives. De quelle nature est la transformation qui envoie le premier triangle directement sur la dernière image ?



Définition 1.7 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs. On définit l'**addition vectorielle** comme suit :

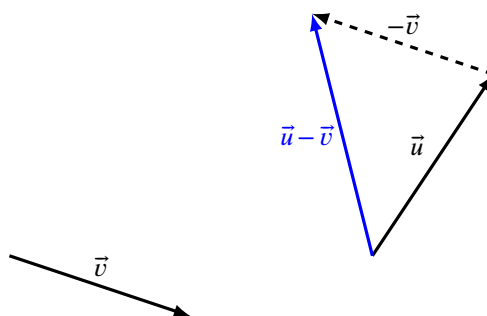


En d'autres termes, le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur associé à la composition des translations associées aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 1.8 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

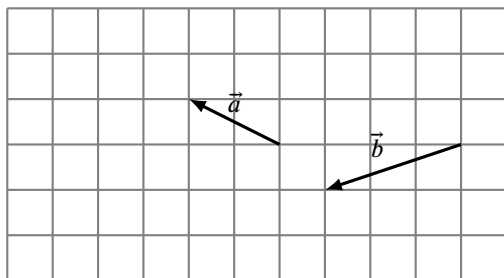
On définit la **soustraction vectorielle** comme suit :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

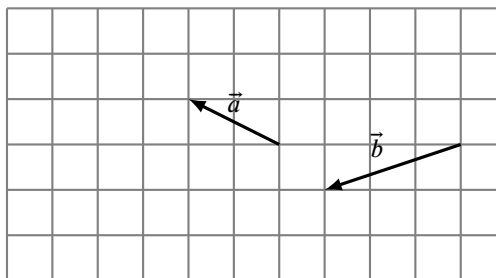


Exemples : Représenter les vecteurs :

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$$



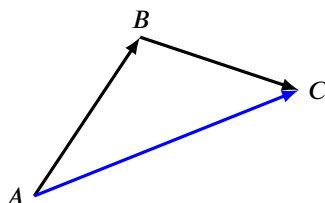
$$\vec{w} = \vec{a} - \vec{b}$$



ex. 1.4 à 1.6

Théorème 1.3 (Règle de Chasles) Soit trois points A , B et C .

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



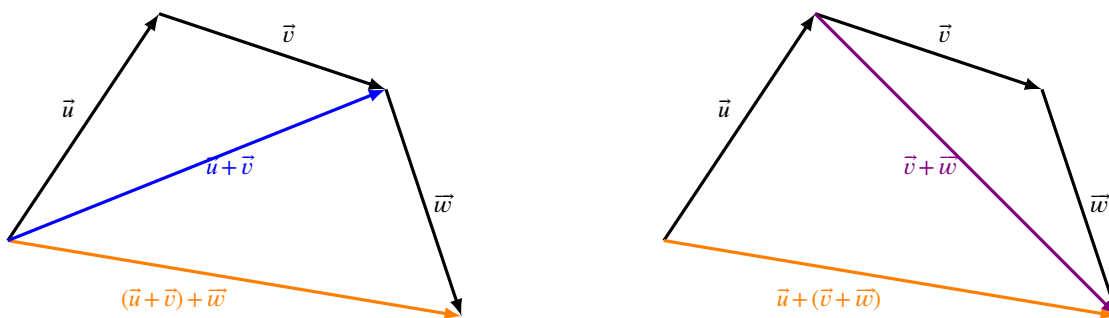
Théorème 1.4 (Propriétés de l'addition)

- (i) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$ (élément neutre)
- (ii) $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ (opposé)
- (iii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativité)
- (iv) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité)

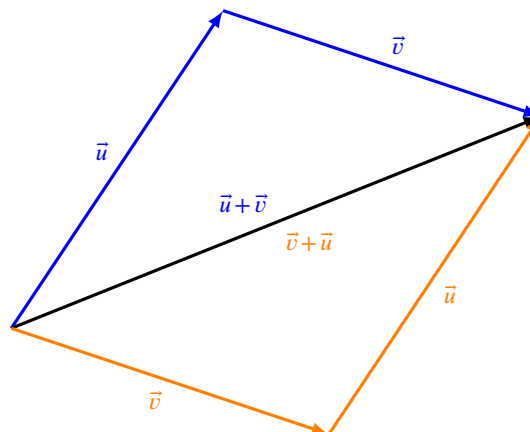
On dit que l'addition vectorielle munit l'ensemble des vecteurs V^2 d'une structure de groupe commutatif.

Exemples :

Associativité :



Commutativité :

**Exemples :**

a) Simplifier $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$.

b) Simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BC}$.

ex. 1.7 à 1.8

Définition 1.9 Soit $\vec{v}$ un vecteur. On appelle **norme** de $\vec{v}$ la longueur de ses représentants.
On la note $\|\vec{v}\|$.

Notations : Soit deux points A et B . La distance entre A et B se note $\delta(A; B)$.

Proposition 1.5 (Propriétés de la norme)

- (i) Pour tout vecteur $\vec{v}$, on a $\|\vec{v}\| \geq 0$.
- (ii) Soit A et B deux points. On a $\|\overrightarrow{AB}\| = \delta(A; B)$. C'est la longueur du segment AB .

Proposition 1.6 À propos du vecteur nul.

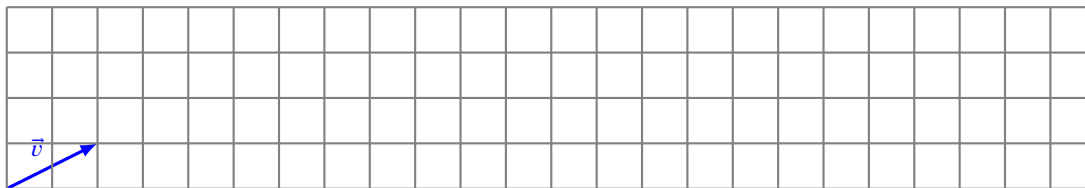
- (i) $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$
- (ii) $\|\overrightarrow{AB}\| = 0 \iff \overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff A = B$

Proposition 1.7 À propos du vecteur opposé.

- (i) $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$
- (ii) $\vec{v} = -\vec{v} \iff \vec{v} = \vec{0}$

Exemple : Dessiner un représentant des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ tels que :

$$\vec{a} = \vec{v} + \vec{v} \quad \vec{b} = \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} \quad \vec{c} = -\vec{v} - \vec{v}.$$



Comparer les vecteurs obtenus au vecteur $\vec{v}$ (direction, sens et norme).

Définition 1.10 (Multiplication par un scalaire)

Soit $\vec{v}$ un vecteur et $k \in \mathbb{R}$.

Si k est **positif**, on définit le vecteur $k \cdot \vec{v}$ comme étant le vecteur de *même direction* et de *même sens* que $\vec{v}$ tel que

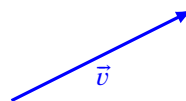
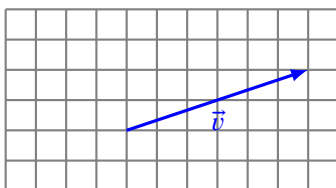
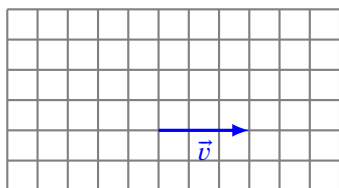
$$\|k \cdot \vec{v}\| = k \cdot \|\vec{v}\|.$$

Si k est **négatif**, on définit $k \cdot \vec{v}$ comme étant le vecteur de *même direction* et de *sens opposé* à $\vec{v}$ tel que

$$\|k \cdot \vec{v}\| = |k| \cdot \|\vec{v}\|.$$

En d'autres termes, le vecteur $k \cdot \vec{v}$ est l'image du vecteur $\vec{v}$ par une homothétie de facteur k .

Exemples : Dessiner un représentant du vecteur $-\frac{2}{3} \cdot \vec{v}$



ex. 1.9 à 1.11

Théorème 1.8 (Propriétés de la multiplication par un scalaire)

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ des vecteurs et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, on a

(i) $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

(ii) $a \cdot \vec{0} = \vec{0}$

(iii) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

(iv) $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$

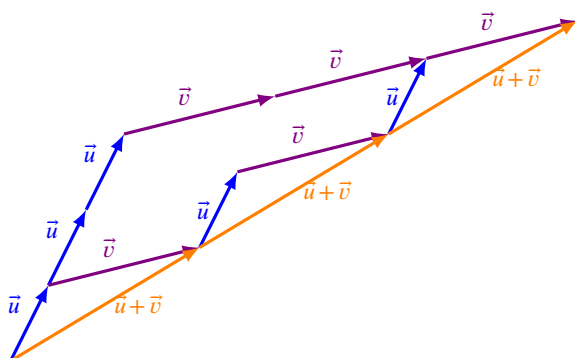
(v) $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (ab) \cdot \vec{v}$

(vi) $(a+b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

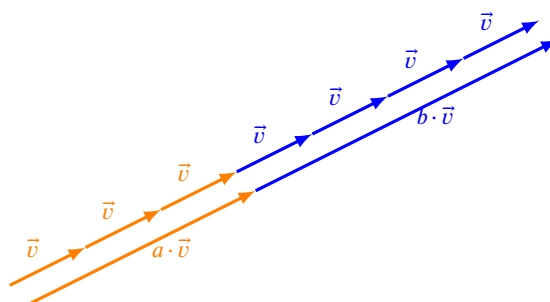
(vii) si $n \in \mathbb{N}$, on a $n \cdot \vec{v} = \underbrace{\vec{v} + \dots + \vec{v}}_{n \text{ fois}}$

(viii) $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

Exemples :



$$3 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 3 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$$



$$(3+4) \cdot \vec{v} = 3 \cdot \vec{v} + 4 \cdot \vec{v}$$

Remarques :

L'ensemble de tous les vecteurs du plan muni des opérations de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un **espace vectoriel**.

Comme en calcul littéral, le $\cdot$ ne se note pas toujours : $3 \cdot \vec{u} = 3\vec{u}$.

ex. 1.12 à 1.13

1.3 Combinaisons linéaires

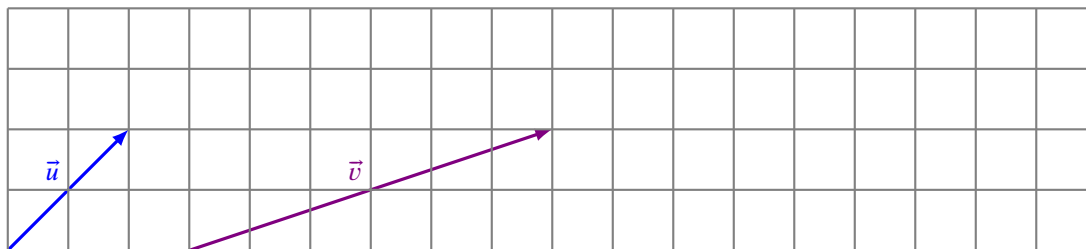
Définition 1.11 Soit $\vec{u}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ des vecteurs.

On dit que $\vec{u}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ s'il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{u} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{v}_n$$

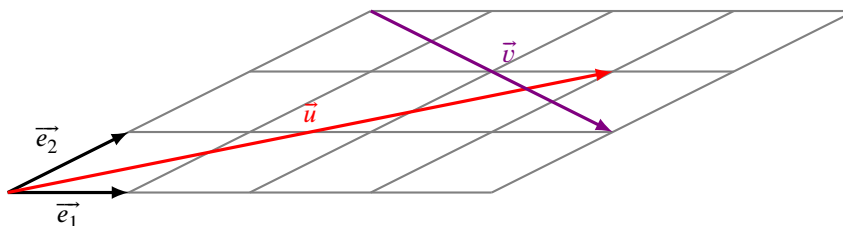
Les nombres $a_1, \dots, a_n$ sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple : Dessiner un représentant du vecteur $2 \cdot \vec{u} - \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$.



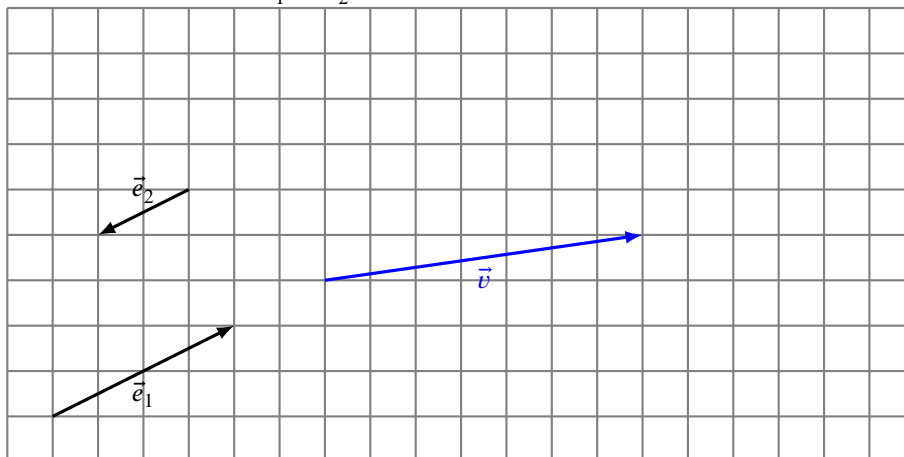
ex. 1.14

Exemple : Écrire les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.



ex. 1.15 à 1.19

Exemple : Dessiner un représentant du vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, puis écrire le vecteur $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.



Que remarque-t-on ?

2 Bases

Problème introductif : Dessinez un autre représentant de ce vecteur. Comment avez-vous fait ?



Définition 2.12 Une **base du plan vectoriel** V^2 est un couple de vecteurs non colinéaires.

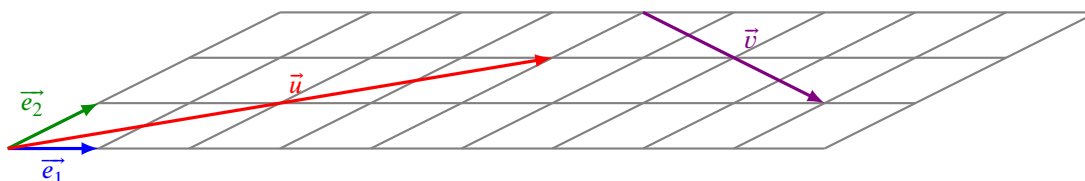
$$\mathcal{B} = (\vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$$

Définition 2.13 Si $\vec{a}$ est un vecteur du plan, on peut l'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

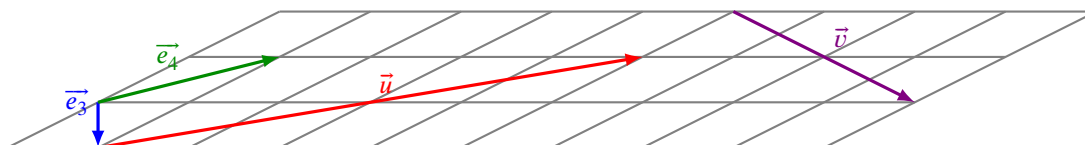
Les coefficients de cette combinaison linéaire sont appelés **composantes du vecteur** $\vec{a}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ et on note :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$$

Exemple : Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ relativement à la base $(\vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ ci-dessous.



Exemple : Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ relativement à la base $(\vec{e}_3 ; \vec{e}_4)$ ci-dessous.



Remarque : Les composantes d'un vecteur sont dépendantes du choix de la base.

ex. 2.1 à 2.5

2.1 Opérations dans une base

Théorème 2.1 Soit $(\vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ une base de V^2 , $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs et $k \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k \cdot \vec{u} = k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot u_1 \\ k \cdot u_2 \end{pmatrix}$$

Preuve : On a $\vec{u} = u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2$

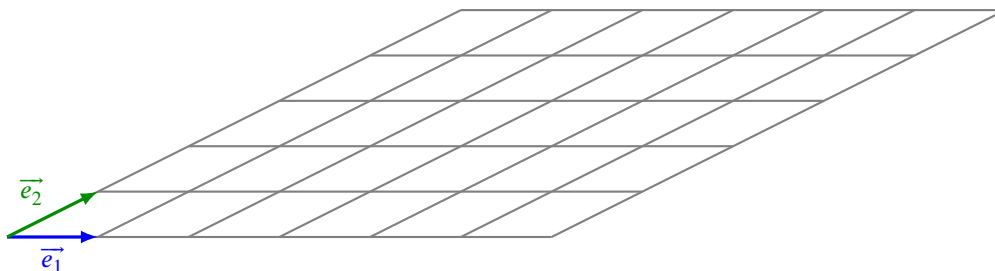
$$\vec{u} + \vec{v} = u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2 + v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 = (u_1 + v_1)\vec{e}_1 + (u_2 + v_2)\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{u} = k(u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2) = k \cdot u_1 \vec{e}_1 + k \cdot u_2 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} k \cdot u_1 \\ k \cdot u_2 \end{pmatrix}$$

#

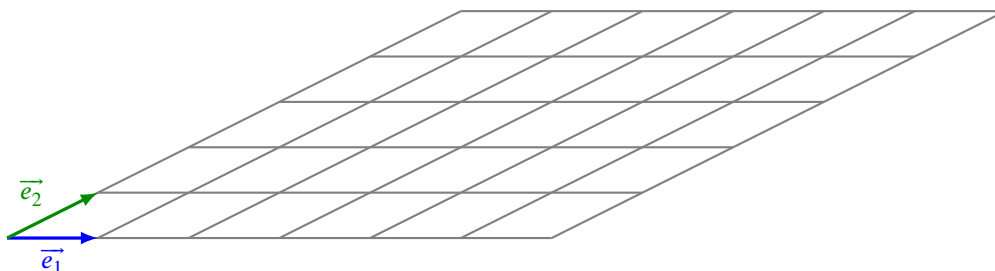
Exemple : Considérons $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer par calcul les composantes du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. Vérifier en représentant les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{v}$.



Exemple : Considérons $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer par calcul les composantes du vecteur $2 \cdot \vec{u}$. Vérifier en représentant les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $2 \cdot \vec{u}$.



ex. 2.6 à 2.7

2.2 Colinéarité

Définition 2.14 Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de V^2 relativement à une base.

On appelle **déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** , noté $\det(\vec{u}; \vec{v})$, le nombre

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1$$

Théorème 2.2 (Critères de colinéarité)

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de V^2 avec $\vec{v}$ non nul.

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- (ii) $\exists ! k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$
- (iii) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 = 0$

Preuve : Démontrons (ii) $\implies$ (iii)

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \det(k \cdot \vec{v}; \vec{v}) = k \cdot v_1 \cdot v_2 - k \cdot v_2 \cdot v_1 = 0$$

Démontrons (iii) $\implies$ (ii)

Par hypothèse, $\vec{v} \neq \vec{0}$.

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \implies u_1 \cdot v_2 = u_2 \cdot v_1$$

$$\text{Cas 1 : Supposons } v_1 \neq 0, \text{ alors } u_2 = \frac{u_1 \cdot v_2}{v_1} \implies \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \frac{u_1 \cdot v_2}{v_1} \end{pmatrix} = \frac{1}{v_1} \begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 \\ u_1 \cdot v_2 \end{pmatrix} = \frac{u_1}{v_1} \cdot \vec{v}$$

Cas 2 : Supposons $v_1 = 0$. Vu que $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $v_2 \neq 0$.

$$u_1 = \frac{u_2 \cdot v_1}{v_2} \implies \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{u_2 \cdot v_1}{v_2} \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{v_2} \begin{pmatrix} u_2 \cdot v_1 \\ u_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} = \frac{u_2}{v_2} \cdot \vec{v}$$

#

Exemple : Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

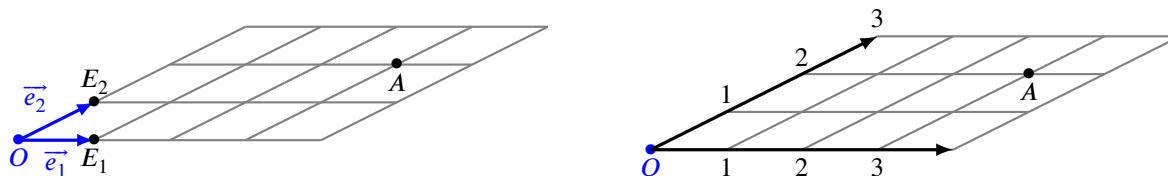
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

ex. 2.8 à 2.10

3 Repères et coordonnées

Pour repérer un point dans le plan ou dans l'espace, on a non seulement besoin d'une base, mais aussi d'un point de référence O .

Cela revient à définir un système d'axes gradués



Définition 3.15 On appelle **repère du plan vectoriel** V^2 un triplet $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ où O est un point et $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ une base.

Le point O est appelé **origine du repère** et la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est la **base associée du repère**.

On peut aussi définir un repère par trois points non alignés $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2)$.

La base associée est alors $(\overrightarrow{OE_1}; \overrightarrow{OE_2})$.

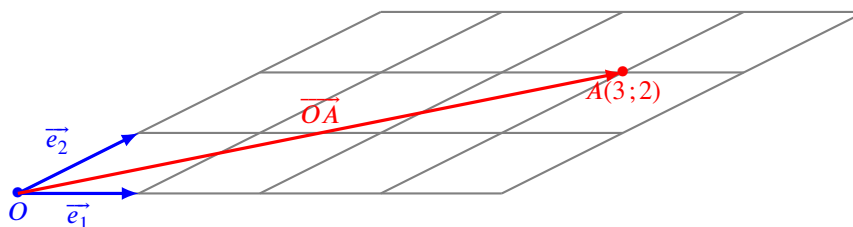
Définition 3.16 Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ un repère du plan et A un point.

On appelle **coordonnées du point A relativement au repère $\mathcal{R}$** , les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ relativement à la base associée $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

$$A(a_1; a_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

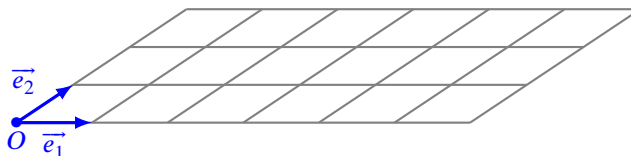
- a_1 est appelée la **première coordonnée** ou **abscisse** du point A .
- a_2 est appelée la **deuxième coordonnée** ou **ordonnée** du point A .
- Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est appelé le **rayon vecteur** du point A .

Exemple : Dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, on a $A(3; 2)$ car $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.



ex. 3.1

Exemple : Relativement au repère $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ représenter les points $A(1;3)$ et $B(5;1)$, puis déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Comparer coordonnées et composantes.

Théorème 3.1 (Règle de Chasles) Soit $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$ deux points dans le plan.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Pour s'en souvenir, on simplifie parfois en disant

« EXTRÉMITÉ - ORIGINE »

Cette règle fait le pont entre le monde des points et celui des vecteurs.

Exemple : Soit les points $A(18; -15)$ et $B(-5; 8)$, calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}$.

ex. 3.2 à 3.3

Exemples :

a) Soit les points $B(3; -8)$ et le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$, calculer les coordonnées de A .

b) Soit les points $A(-3; 4)$ et le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}$, calculer les coordonnées de B .

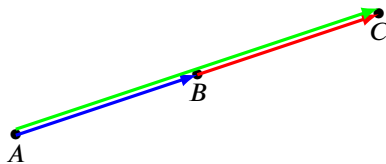
ex. 3.4 à 3.5

Exemple : Soit les points $A(-1; 3)$, $B(5; 7)$, $C(9; 6)$ et $D(3; 2)$.

Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ?

ex. 3.6 à 3.10

Théorème 3.2 (des points alignés) Dans le plan, trois points A , B et C sont alignés, si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires entre eux.



Remarque : Il suffit que 2 des vecteurs soient colinéaires pour qu'ils le soient les trois.

Exemple : Soit les points $A(-7;1)$, $B(8;-4)$ et $C(-1;-1)$. Sont-ils alignés ?

ex. 3.11 à 3.12

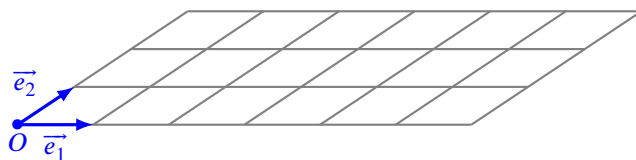
3.1 Calculs dans les repères

Exemple : Dans un repère, on donne les points de coordonnées $A(1;3)$ et $B(5;1)$. On considère un point M .

a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

b) Calculer les coordonnées du point M .

c) Où se situe le point M par rapport aux points A et B ?



d) Calculer $\frac{a_1 + b_1}{2}$ et $\frac{a_2 + b_2}{2}$. Que constate-t-on ?

Théorème 3.3 (du point milieu) Soit $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$ deux points dans le plan et M le point milieu du segment AB .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \left(\frac{\frac{a_1+b_1}{2}}{\frac{a_2+b_2}{2}} \right) \\ \Rightarrow M &\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2} \right)\end{aligned}$$

Preuve : Soit les points $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ et M le point milieu du segment AB .

Si M est le point milieu de AB , alors $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

#

ex. 3.13 à 3.14

Théorème 3.4 (du centre de gravité) Soit A , B et C les sommets d'un triangle et G son centre de gravité.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ G &\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3} \right)\end{aligned}$$

Exemple : Soit les points $A(-6; -1)$, $B(-1; -4)$ et $C(1; 5)$. Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC .

Preuve : Le triangle CAB est l'image du triangle $CM_B M_A$ par une homothétie de centre C et de rapport 2. Ainsi, $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{M_B M_A} = -2 \cdot \overrightarrow{M_B M_A}$.

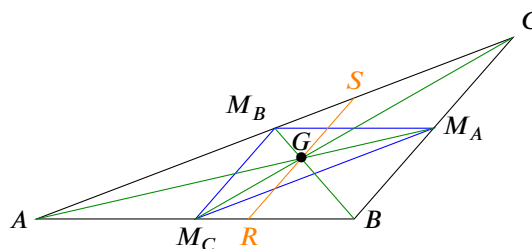
Le triangle ABC est l'image du triangle $M_A M_B M_C$ par une homothétie de centre G et de rapport -2 . Ainsi, $\overrightarrow{AG} = 2 \cdot \overrightarrow{GM_A}$ et donc $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM_A}$

Soit R et S les intersections de la parallèle à BC passant par G avec les côtés AB et AC .

Les triangles ABC et ARS sont semblables de facteur $\frac{2}{3}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RG} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$



#

ex. 3.15 à 3.19

4 Normes

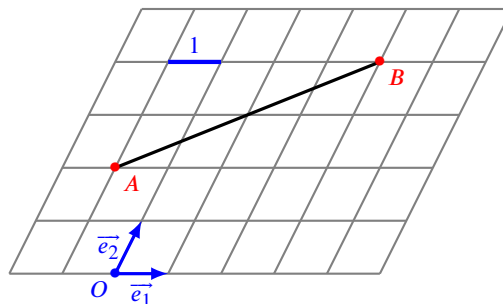
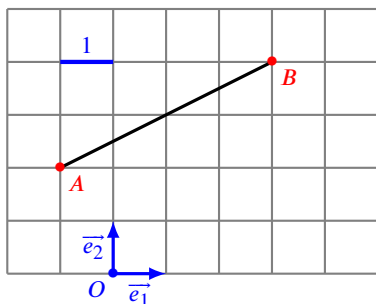
4.1 Norme d'un vecteur

Définition 4.17 La **norme d'un vecteur** $\vec{u}$ est la longueur de ses représentants. On la note :

$$\|\vec{u}\|$$

On dit qu'un vecteur est **unitaire** si sa norme est égale à 1.

Exemple : Relativement aux repères $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ ci-dessous, soit les points $A(-1;2)$ et $B(3;4)$. Déterminer la longueur du segment AB en graduant le segment.



Dans quel cas peut-on utiliser le théorème de Pythagore ?

Définition 4.18 On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de V^2 est **orthonormée** si ses vecteurs sont :

- perpendiculaires entre eux
- unitaires (de norme 1)

On dit qu'un repère $\mathcal{R}$ est **orthonormé** ou **cartésien** si sa base associée est orthonormée.

Remarque : Pour la suite du cours, si rien n'est précisé, on travaillera toujours avec des bases et des repères orthonormés.

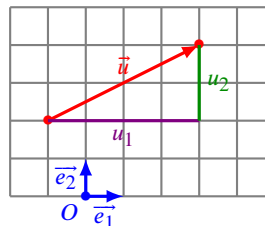
Théorème 4.1 (de la norme) Relativement à une base orthonormée de V^2 , soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ un vecteur.

Alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Preuve : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

Par Pythagore, $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$



#

Exemple : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

Déterminer les composantes puis la norme des vecteurs $-3\vec{u}$ et $\vec{u} + \vec{v}$.

ex. 4.1

Théorème 4.2 (propriétés de la norme) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs et $k \in \mathbb{R}$.

(i) $\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

(ii) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire)

ex. 4.2 à 4.4

Théorème 4.3 Relativement à un repère orthonormé, soit trois points A , B et C , alors

(i) $\|\overrightarrow{AB}\| = \delta(A; B) \geq 0$

(ii) $\|\overrightarrow{AB}\| = 0 \iff A = B$

(iii) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$ (symétrie)

(iv) $\|\overrightarrow{AC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$ (inégalité triangulaire)

Exemple : Dans un repère orthonormé, soit les points $A(3,1)$ et $B(-4;5)$.

Calculer la distance entre A et B .

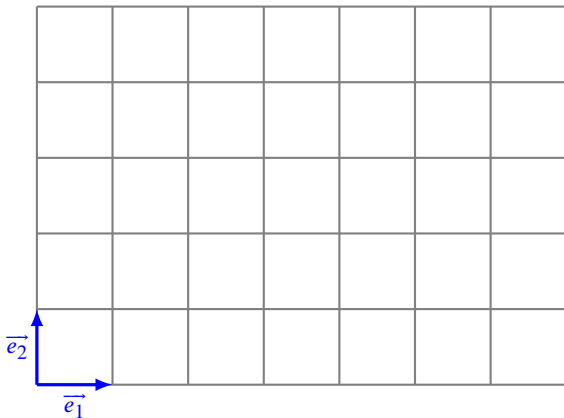
ex. 4.5 à 4.8

4.2 Vecteurs unitaires

Exemple : Relativement à une base orthonormée, soit le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculer les composantes du vecteur $\vec{v}_u = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$, puis calculer sa norme.

Représenter $\vec{v}$ et $\vec{v}_u$. Que remarque-t-on ?



Théorème 4.4 Soit $\vec{v}$ un vecteur relativement à une base orthonormée. Alors, le vecteur

$$\vec{v}_u = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

est un vecteur unitaire de même direction et sens que $\vec{v}$.

On l'appelle le **vecteur unitaire de** $\vec{v}$.

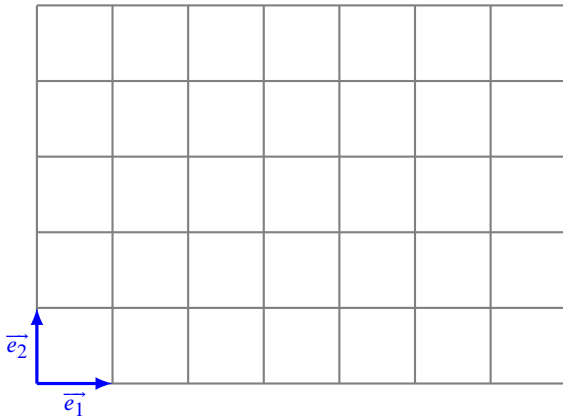
Exemple : Déterminer les vecteurs colinéaires à $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ de norme égale à 3.

ex. 4.9 à 4.11

5 Produit scalaire

5.1 Produit scalaire et perpendicularité

Exemple : Représenter le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis tous les vecteurs perpendiculaires à $\vec{a}$ dont la norme est la même que celle de $\vec{a}$. Comparer leurs composantes à celle de $\vec{a}$.



Définition 5.19 Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. On note $\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_\perp' = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{v}_\perp$ et $\vec{v}_\perp'$ sont perpendiculaires à $\vec{v}$ et ont la même norme que lui.

Exemple : Soit les points $A(1;2)$ et $B(-2;0)$. Calculer les coordonnées du point C tel que le triangle ABC soit isocèle rectangle en B .

ex. 5.1 à 5.4

Exemple : Soit les points $A(1;2)$ et $B(-2;0)$. Calculer les coordonnées du point C tel que le triangle ABC soit rectangle en B et que son aire soit égale à 26.

Définition 5.20 Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ des vecteurs relativement à une base orthonormée de V^2 .

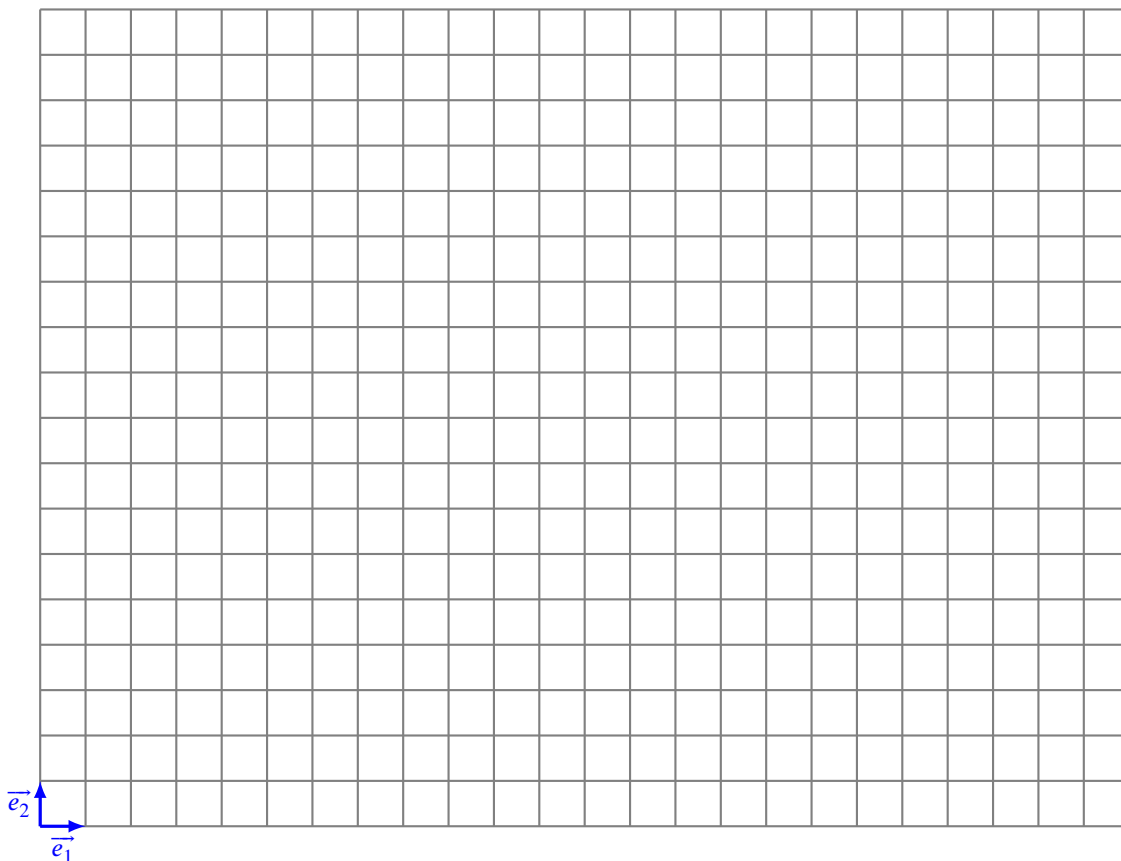
On appelle **produit scalaire de $\vec{v}$ avec $\vec{w}$** , noté $\vec{v} \bullet \vec{w}$, le nombre

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$$

Exemple : On considère le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et les vecteurs suivants :

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Représenter ces vecteurs.
- Calculer le produit scalaire de $\vec{a}$ avec chacun des autres vecteurs. Quel est le lien entre produit scalaire et perpendicularité ?



Théorème 5.1 (critère de perpendicularité) Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ des vecteurs relativement à une base orthonormée de V^2 .

$$\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \bullet \vec{w} = 0$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \vec{v} \perp \vec{w} &\iff \|\vec{w} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 \text{ (Pythagore)} \\ &\iff (w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 \\ &\iff w_1^2 - 2w_1v_1 + v_1^2 + w_2^2 - 2w_2v_2 + v_2^2 \\ &\qquad\qquad\qquad = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 \\ &\iff -2w_1v_1 - 2w_2v_2 = 0 \\ &\iff v_1w_1 + v_2w_2 = 0 \end{aligned}$$

#

Exemple : Soit les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ \frac{28}{3} \end{pmatrix}$.

- Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont-ils perpendiculaires entre eux ?
- Comparer $\vec{a} \bullet \vec{b}$ et $\vec{b} \bullet \vec{a}$.
- Calculer $\vec{a} \bullet \vec{a}$ et $\|\vec{a}\|$.

ex. 5.5 à 5.9

Théorème 5.2 (propriétés du produit scalaire) Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ des vecteurs relativement à une base orthonormée de V^2 .

- $\vec{v} \bullet \vec{w} = \vec{w} \bullet \vec{v}$ (commutativité)
- $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ (distributivité)
- $(k \cdot \vec{v}) \bullet \vec{w} = k \cdot (\vec{v} \bullet \vec{w}) = \vec{v} \bullet (k \cdot \vec{w})$
- $\vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$
- $\vec{v} \bullet \vec{v} = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$

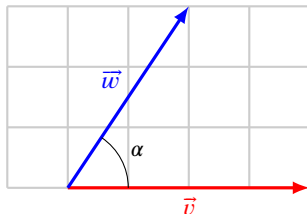
Les preuves sont faites dans les exercices.

ex. 5.10 à 5.11

5.2 Interprétation géométrique

Exemple : Soit les vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Calculer l'angle formé par les deux vecteurs de 3 manières différentes.

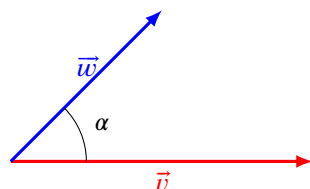


Comparer au résultat de $\cos^{-1} \left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \right)$.

Théorème 5.3 Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs non nuls, notons α l'angle formé par les deux vecteurs. Alors

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \cos(\alpha) \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

$$\text{donc } \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \right)$$



Preuve : Choisissons une base orthonormée telle que $\vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot \vec{e}_1$.

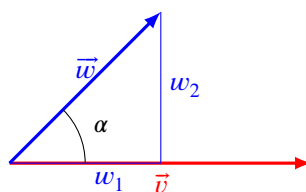
On a $\vec{v} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}\| \\ 0 \end{pmatrix}$ et notons $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$.

Alors

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot w_1 \implies w_1 = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|}$$

Or,

$$\cos(\alpha) = \frac{w_1}{\|\vec{w}\|} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$



#

Exemple : Soit trois points $A(-2; -1)$, $B(1; 1)$ et $C(-1; 4)$.
Calculer l'angle BAC .

ex. 5.12 à 5.14

Rappel : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de V^2 relativement à une base.

On appelle **déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** , noté $\det(\vec{u}; \vec{v})$, le nombre

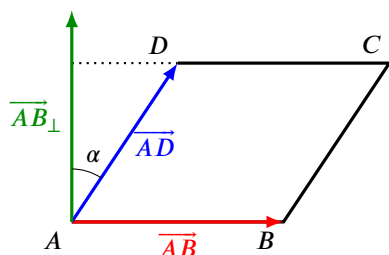
$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1$$

Théorème 5.4 (Aire d'un parallélogramme) Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Son aire, notée $\mathcal{A}_{ABCD}$ vaut

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \left| \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \right| = \left| \overrightarrow{AB}_\perp \bullet \overrightarrow{AD} \right|$$

Preuve :



Notons h la hauteur du parallélogramme.

On appelle $\overrightarrow{AB}_\perp$ le vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$, de même norme que $\overrightarrow{AB}$ et qui forme un angle α aigu avec $\overrightarrow{AD}$.

Par trigonométrie, on a $\cos(\alpha) = \frac{h}{\|\overrightarrow{AD}\|}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \overrightarrow{AB}_\perp \bullet \overrightarrow{AD} &= \cos(\alpha) \cdot \|\overrightarrow{AB}_\perp\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\| \\ &= \frac{h}{\|\overrightarrow{AD}\|} \cdot \|\overrightarrow{AB}_\perp\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\| = h \cdot \|\overrightarrow{AB}\| = \mathcal{A}_{ABCD} \end{aligned}$$

Remarquons que si $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_\perp = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'_\perp = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$,

alors $\vec{u}_\perp \bullet \vec{v} = -u_2 \cdot v_1 + u_1 \cdot v_2 = \det(\vec{u}; \vec{v})$

et $\vec{u}'_\perp \bullet \vec{v} = u_2 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_2 = -\det(\vec{u}; \vec{v})$.

On a donc, $\mathcal{A}_{ABCD} = \overrightarrow{AB}_\perp \bullet \overrightarrow{AD} = \left| \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \right|$.

#

Corollaire 5.5 (Aire d'un triangle) Soit ABC un triangle. Son aire, notée $\mathcal{A}_{ABC}$, vaut

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \right|$$

Exemple : Soit $A(3; -2)$, $B(-4; 1)$ et $C(7; 9)$. Calculer l'aire du triangle ABC .

Remarque : Il est possible de calculer l'aire de n'importe quel polygone en utilisant le résultat précédent. En effet, il suffit de le découper en triangles.

ex. 5.15 à 5.17

PARTIE II : TRIGONOMÉTRIE

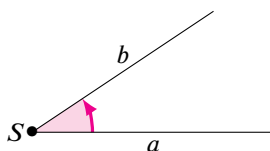
6 Rapports trigonométriques

6.1 Les angles

Inventée par les Grecs il y a plus de 2000 ans, la trigonométrie est la science qui s'occupe des relations entre les longueurs des côtés des triangles et la mesure de leurs angles.

Le mot trigonométrie dérive des racines grecques *tri* (trois), *gonôs* (angles) et *metron* (mesure).

Définition 6.21 Un **angle** est défini par deux demi-droites, les **côtés de l'angle**, qui ont la même origine, le **sommet de l'angle**.



On appelle **mesure de l'angle orienté** $\angle(Sa; Sb)$ la mesure de l'amplitude d'une rotation qui transforme la demi-droite Sa en la demi-droite Sb .

Le **sens positif** est le sens antihoraire (« sens de la baffe »).

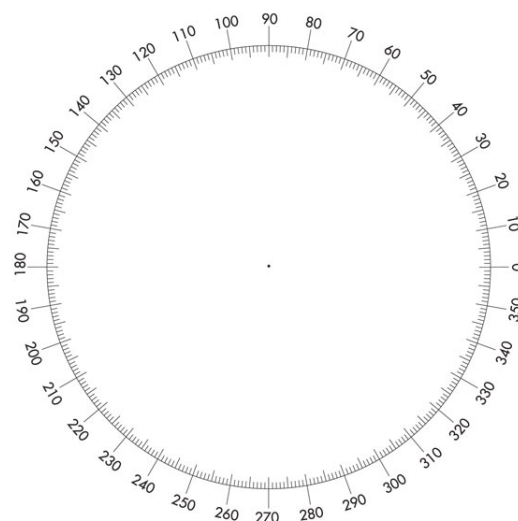
Remarque :

- On désigne généralement les angles avec des lettres grecques minuscules :
alpha : α bêta : β gamma : γ delta : δ epsilon : ε ...
- La mesure d'un angle orienté n'est pas unique. Il y a plusieurs rotations qui envoient la première demi-droite sur la seconde, par exemple en ajoutant un tour complet.

Dans l'Antiquité, les Babyloniens ont utilisé les angles pour leurs travaux en astronomie (cartographie du ciel). Pour faciliter leurs calculs, ils ont subdivisé la circonférence du cercle en 360 parties égales. Cette subdivision a donné naissance aux degrés.

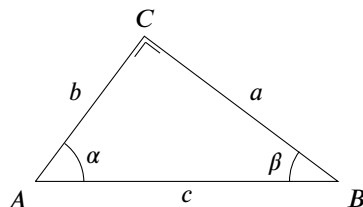
Le **degré** est une unité de mesure des angles qui correspond à la rotation de $\frac{1}{360}$ tour dans le sens choisi.

Cette unité est notée $^\circ$.



6.2 Les rapports trigonométriques

Définition 6.22 Soit un triangle ABC rectangle en C . Sauf mention particulière, on nommera ses côtés et ses angles comme dans la figure ci-dessous :

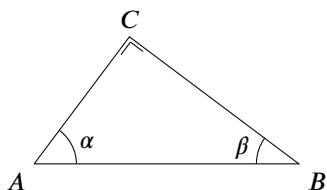


- Le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse**. Il est abrégé par « hyp ». C'est le côté le plus long.
- Les deux autres côtés sont appelés **cathètes**. Pour les différencier, il faut se référer par rapport à l'un des angles non droits.

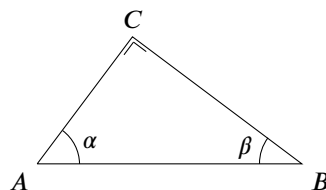
La **cathète adjacente** à l'angle α , notée « adj_α », est la cathète qui est un des côtés de α . L'autre cathète est la **cathète opposée** à l'angle α , notée « opp_α ».

Exemple :

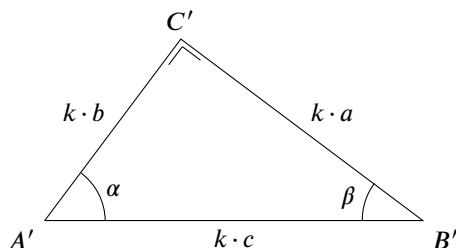
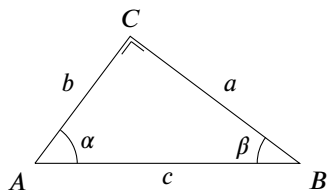
a) Placer les mots hyp, adj_α et opp_α ci-dessous.



b) Placer les mots hyp, adj_β et opp_β ci-dessous.



Si deux triangles rectangles ont le même angle α , alors ils sont semblables. Leurs côtés sont donc proportionnels.



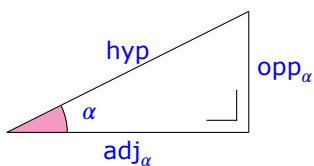
Ainsi, si l'on calcule $\frac{\text{opp}_\alpha}{\text{hyp}}$, on obtient le même résultat dans les deux triangles, car $\frac{a}{c} = \frac{k \cdot a}{k \cdot c}$.

Ce rapport ne dépend donc pas des dimensions des côtés du triangle, mais uniquement de l'angle α . On l'appelle le **sinus** de l'angle α .

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opp}_\alpha}{\text{hyp}}$$

Des raisonnements similaires permettent de définir le **cosinus** et la **tangente** de l'angle α .

Définition 6.23 Les **rapports trigonométriques** de l'angle α sont :



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opp}_\alpha}{\text{hyp}}$$

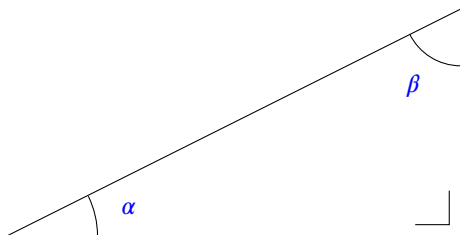
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adj}_\alpha}{\text{hyp}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opp}_\alpha}{\text{adj}_\alpha}$$

Remarque : Il existe un quatrième rapport trigonométrique que nous utiliserons peu, la **cotangente**.

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\text{adj}_\alpha}{\text{opp}_\alpha}$$

Exemple : a) Mesurer les côtés puis calculer les valeurs des rapports trigonométriques de l'angle α et de l'angle β du triangle représenté en vraie grandeur ci-dessous :



b) Mesurer les angles α et β et utiliser la calculatrice pour obtenir leurs rapports trigonométriques.

Théorème 6.1 (Propriétés des rapports trigonométriques dans le triangle rectangle)

Soit α un des angles non droits d'un triangle rectangle.

$$(i) \quad 0 < \sin(\alpha) < 1$$

$$(iv) \quad \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$(ii) \quad 0 < \cos(\alpha) < 1$$

$$(v) \quad \sin(\alpha) = \cos(90 - \alpha)$$

$$(iii) \quad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$(vi) \quad \cos(\alpha) = \sin(90 - \alpha)$$

$$(vii) \quad \tan(\alpha) = \frac{1}{\tan(90 - \alpha)}$$

Preuve :

#

ex. 6.1 à 6.6

Remarque : À partir de la valeur d'un rapport trigonométrique de l'angle α , il est possible de retrouver la mesure de l'angle α .

Sur la machine à calculer, on utilise les touches :

arcsinus $\boxed{\sin^{-1}}$ **arccosinus** $\boxed{\cos^{-1}}$ **arctangente** $\boxed{\tan^{-1}}$.

Exemple : Soit un triangle ABC rectangle en C tel que $a=3$ et $c=5$. Calculer les angles α et β .

ex. 6.7

6.3 Résolution de triangles rectangles

Définition 6.24 On dit qu'on **résout un triangle** rectangle lorsqu'on cherche les éléments non donnés : angles, côtés, aire (notée $\mathcal{A}$ ou σ).

Exemple : Résoudre le triangle ABC rectangle en C dont on donne le côté $b=8,2$ et l'angle $\alpha=37^\circ$.

Exemple : Résoudre le triangle ABC rectangle en C dont on donne les côtés $a=7,6$ et $b=7,6$.

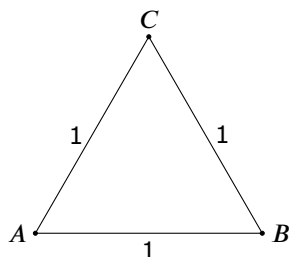
Remarque : Dans les problèmes de résolution de triangle par la trigonométrie, il faut être très attentif aux arrondis. Dans la mesure du possible, il faut utiliser les valeurs de la consigne plutôt que des valeurs calculées. Si l'on a pas le choix, il faut utiliser les valeurs calculées non arrondies de la machine.

ex. 6.8 à 6.19

6.4 Angles particuliers

À l'aide des triangles particuliers, il est possible de calculer la valeur exacte des rapports trigonométriques de certains angles : 30° , 60° et 45° .

- Calculer et justifier les rapports trigonométriques des angles 30° et 60° en utilisant le triangle équilatéral dont les côtés mesurent 1.



$$\sin(60^\circ) =$$

$$\cos(60^\circ) =$$

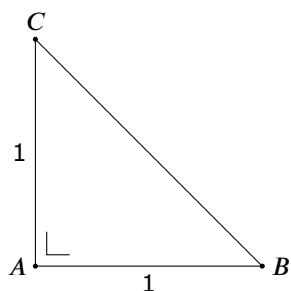
$$\tan(60^\circ) =$$

$$\sin(30^\circ) =$$

$$\cos(30^\circ) =$$

$$\tan(30^\circ) =$$

- Calculer et justifier les rapports trigonométriques de 45° à l'aide du triangle isocèle rectangle dont les cathètes mesurent 1.



$$\sin(45^\circ) =$$

$$\cos(45^\circ) =$$

$$\tan(45^\circ) =$$

ex. 6.20 à 6.21

7 Autres unités de mesure d'angle

7.1 Les degrés décimaux et sexagésimaux

Comme vu dans le chapitre précédent, pour mesurer un angle, on utilise généralement les degrés [$^{\circ}$] qui consistent à subdiviser le cercle en 360 parties égales. Les angles sont utilisés, entre autres, pour situer une position sur la Terre. Il est alors nécessaire d'avoir une grande précision.

Nous avons l'habitude, pour mesurer des angles plus petits que 1° , de les exprimer en dixièmes, centièmes, millièmes ... de degrés. On parle de **degrés décimaux**.

Les Babyloniens, qui eux comptaient en base 60 et les utilisaient notamment en astronomie, les partageaient en $60^{\text{èmes}}$, donc en minutes d'arc et secondes d'arc. On parle de **degrés sexagésimaux**.

Définition 7.25 Une **minute d'arc** est $1' = \frac{1}{60}$ degré.

Une **seconde d'arc** est $1'' = \frac{1}{60}$ minute d'arc = $\frac{1}{3600}$ degré.

On note :

$$0^{\circ}0'0''$$

La mesure des angles en degrés sexagésimaux est couramment utilisée en aéronautique, sur les cartes marines et pour les coordonnées GPS.

Proposition 7.1 (Règles de conversion degrés sexagésimaux $\leftrightarrow$ décimaux) *Pour convertir des mesures d'angle en degrés décimaux en degrés sexagésimaux (et vice-versa), on utilise les relations suivantes :*

$$1^{\circ} \longleftrightarrow 60'$$

$$1' \longleftrightarrow 60''$$

Exemple : Convertir $17,23^{\circ}$ en degrés sexagésimaux.

Exemple : Convertir $39^{\circ}25'34''$ en degrés décimaux.

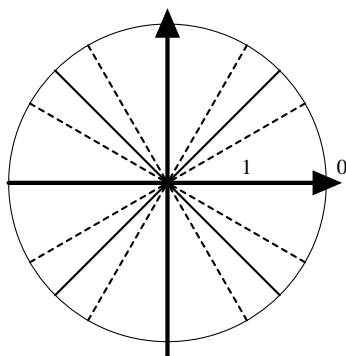
Remarque : La méthode de conversion est identique à la conversion des unités de temps.

La calculatrice permet de faire ces transformations grâce aux touches "DD" et "DMS".

ex. 7.1 à 7.3

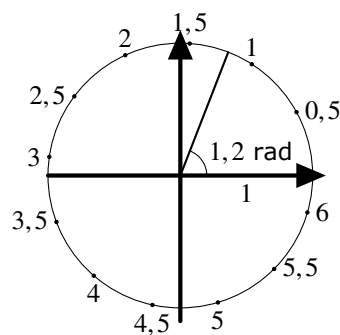
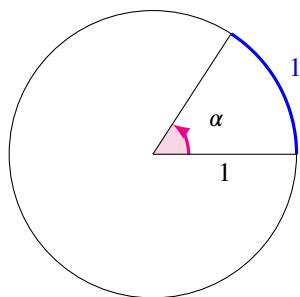
7.2 Les radians

Prenons un cercle de rayon 1 et graduons-le grâce à la longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre. Il est plus simple de laisser les valeurs en fonction de π .



Quel angle en degré correspond à l'arc de longueur 1 ?

Définition 7.26 On dit qu'un angle au centre d'un cercle de rayon 1 mesure **1 radian** lorsqu'il intercepte un arc de cercle de longueur 1.



Le radian est donc une façon de mesurer un angle à l'aide d'une longueur d'arc.

L'unité radian se note **rad** ou ne se note pas. Ainsi un angle sans unité est en radians.

Proposition 7.2 (Règles de conversion degrés $\leftrightarrow$ radians) Pour convertir des mesures d'angle en radians (et vice-versa), on utilise les relations suivantes :

$$180^\circ \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$

Preuve : Le périmètre d'un cercle de rayon 1 vaut 2π .

Ainsi un angle de 360° correspond à un angle de 2π radians.

#

Exemples :

a) Convertir 2,5 rad en degrés décimaux et vérifier sur le rapporteur de la page précédente. Refaire le calcul à l'aide de la touche DRG de la calculatrice.

b) Convertir $\frac{5\pi}{10}$ rad en degrés décimaux.

c) Convertir 210° en radians décimaux et vérifier sur le rapporteur de la page précédente. Refaire le calcul à l'aide de la touche DRG de la calculatrice.

d) Convertir 210° en radians, sous forme de fraction de π .

Remarque : Les angles en radians sont souvent notés sous forme de fractions de π .

Les plus utilisés sont :

radians								
degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

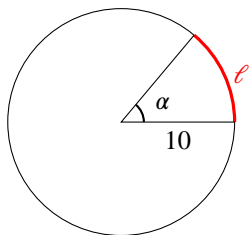
ex. 7.4 à 7.8

8 Arcs et secteurs

8.1 Longueurs d'arcs et aires de secteurs

Exemple : On considère un cercle de rayon 5 cm et un arc correspondant à un angle au centre α .

a) Calculer la longueur de l'arc si $\alpha = 10^\circ$.



b) Calculer la longueur de l'arc si $\alpha = 1,2 \text{ rad}$.

c) Calculer l'aire du secteur circulaire si $\alpha = 10^\circ$.

d) Calculer l'aire du secteur circulaire si $\alpha = 1,2 \text{ rad}$.

Théorème 8.1 (Longueur d'un arc) Soit un cercle de rayon r et α un angle au centre. On note ℓ la longueur d'arc correspondant à α .

- Si α est mesuré en radians, alors :

$$\ell = r \cdot \alpha$$

- Si α est mesuré en degrés, alors :

$$\ell = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180}$$

Théorème 8.2 (Aire d'un secteur circulaire) Soit un cercle de rayon r et α un angle au centre. On note $\mathcal{A}$ l'aire du secteur circulaire correspondant à α .

- Si α est mesuré en radians, alors :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \alpha$$

- Si α est mesuré en degrés, alors :

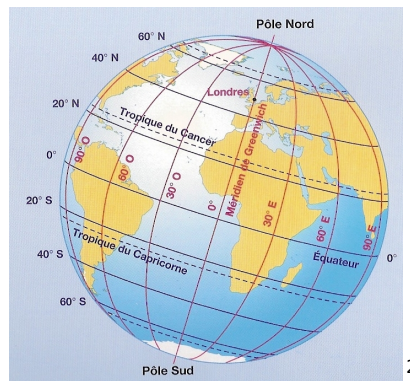
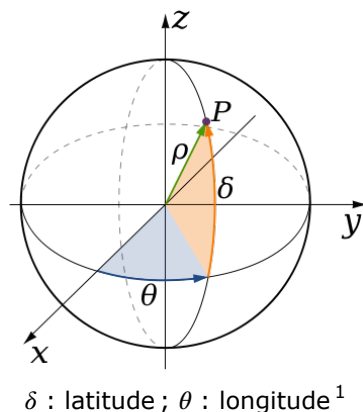
$$\mathcal{A} = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2$$

ex. 8.1 à 8.9

8.2 Applications géographiques

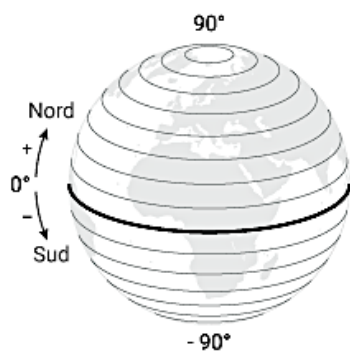
Les angles sont utilisés pour indiquer le positionnement géographique d'un endroit sur la Terre. On appelle cela les **coordonnées géographiques**. Ces coordonnées sont notamment utilisées par les systèmes GPS. Une position sur la Terre est ainsi définie par deux mesures d'angle :

- la **latitude** pour le positionnement Nord-Sud,
- la **longitude** pour le positionnement Est-Ouest.



Exemple : Indiquer sur l'image de droite ci-dessus le point de coordonnées $20^\circ\text{S} / 30^\circ\text{E}$.

Parallèles :

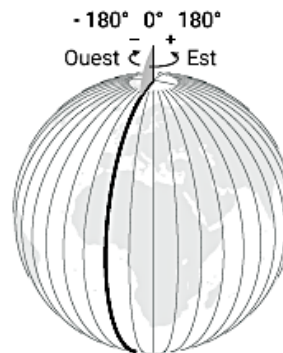


Les parallèles sont numérotés de 90°S à 90°N .
Le parallèle 0° est appelé **l'équateur**.

Les parallèles sont des cercles qui sont parallèles à l'équateur. Leur rayon diminue lorsqu'on s'approche des pôles.

Les parallèles indiquent la **latitude**.

Méridiens :



Les méridiens sont numérotés de 180°O à 180°E .
Le méridien 0° est appelé **méridien de Greenwich**.

Les méridiens sont des cercles qui passent tous par les deux pôles. Ils ont tous le même rayon.

Les méridiens indiquent la **longitude**.³

1. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Spherical Coordinates \(Latitude, Longitude\).svg](https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Spherical_Coordinates_(Latitude,_Longitude).svg)
2. <http://maitresse-myriam.eklablog.com/se-reperer-sur-la-terre-a100345825>
3. <https://www.sciencespo.fr/cartographie/khartis/docs/definitions/>

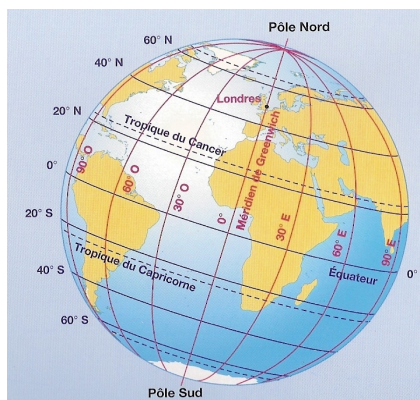
Lorsqu'on utilise une projection pour faire une carte de la Terre, les parallèles et les méridiens forment un quadrillage. Il est important de remarquer que le côté d'un carré du quadrillage représente partout le même nombre de degrés, mais pas la même distance.



Carte de la Terre en projection de Mercator⁴

Exemple : Les villes d’Alexandrie (Égypte) et de Kirkenes (Norvège) sont toutes deux positionnées sur le méridien 30°E. La latitude d’Alexandrie est 31°10’51’’ N ; celle de Kirkenes 69°43’35’’ N.

- Placer approximativement ces villes sur les cartes ci-dessous.
- Quelle distance sépare ces deux villes ? (rayon de la terre = 6370 km)



Remarque : Lorsque les endroits ne sont pas situés sur un même méridien, les calculs sont beaucoup plus compliqués. Nous nous limiterons donc aux cas simples.

ex. 8.10 à 8.15

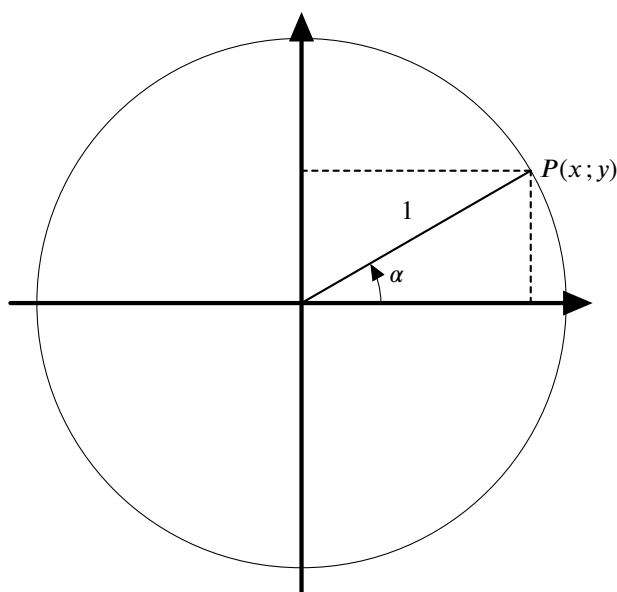
4. <https://www.educaplay.com/printablegame/2098665-meridiens-et-paralleles.html>

9 Cercle trigonométrique

9.1 Rapports trigonométriques généralisés

Jusqu'à présent, nous avons défini les rapports trigonométriques pour des angles dans des triangles rectangles, donc des angles aigus. Nous aimerions maintenant pouvoir travailler dans des triangles quelconques et donc aussi avec des angles obtus. Et pourquoi se limiter aux angles convexes ? Comment peut-on généraliser la notion de rapports trigonométriques à tous les angles ?

Pour cela nous allons avoir besoin du cercle trigonométrique. Avant de définir cette nouvelle notion, observons la figure ci-dessous. Il s'agit d'un cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1. Le point $P(x;y)$ est sur le cercle et l'angle entre Ox et OP est α .



Déterminer $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ à l'aide des coordonnées de P .

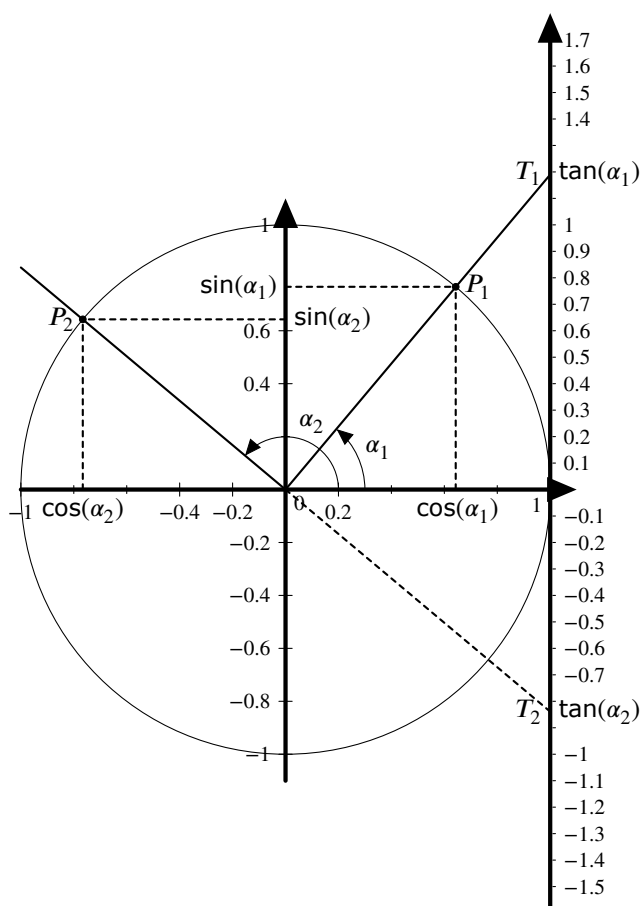
Sur cette même figure, représenter un triangle rectangle dont un des angles est α et tel que adj_α mesure 1.

Où peut-on retrouver la valeur de $\tan(\alpha)$?

Définition 9.27 On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre $O(0;0)$ de rayon 1 muni de 3 axes gradués tels que ci-dessous.

On définit les **rapport trigonométriques** de l'angle α de la manière suivante :

- Le **cosinus de l'angle** α , $\cos(\alpha)$, est la 1^{ère} coordonnée du point P , où P est le point du cercle tel que l'angle entre Ox et OP est α .
- Le **sinus de l'angle** α , $\sin(\alpha)$, est la 2^{ème} coordonnée du point P .
- La **tangente de l'angle** α , $\tan(\alpha)$, est la 2^{ème} coordonnée du point T , où T est le point de la tangente verticale telle que l'angle entre Ox et OT est α .



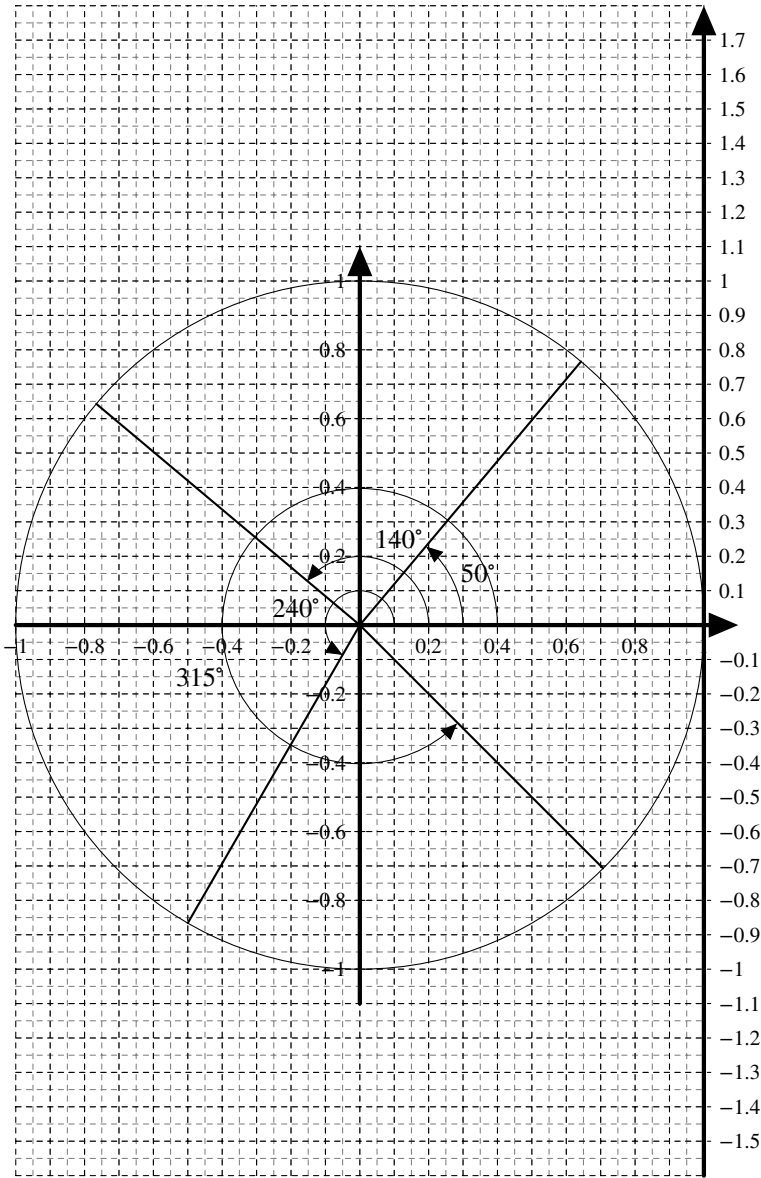
Remarques :

Cette définition induit que $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ donnent des valeurs comprises entre -1 et 1 .
Par contre, $\tan(\alpha)$ n'a pas de limitations.

Pour les angles aigus, cette définition est équivalente à celle vue précédemment.

La **cotangente de l'angle** α , $\cot(\alpha)$, est la 1^{ère} coordonnée du point U , où U est le point de la tangente horizontale passant par $(0;1)$ et telle que l'angle entre Ox et OU est α .

Exemple : Estimer les rapports trigonométriques des angles ci-dessous grâce au cercle trigonométrique. Comparer ensuite aux valeurs données par la calculatrice. Mettre la calculatrice en mode RAD pour calculer avec un angle en radians.



degrés	240°	140°	50°	315°	-45°	0°				
radians							$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{25\pi}{9}$
sin										
cos										
tan										

Quelles sont les valeurs interdites de la fonction tan ?

ex. 9.1 à 9.3

9.2 Propriétés

Théorème 9.1 (Propriétés des rapports trigonométriques généralisés)

Soit un angle α .

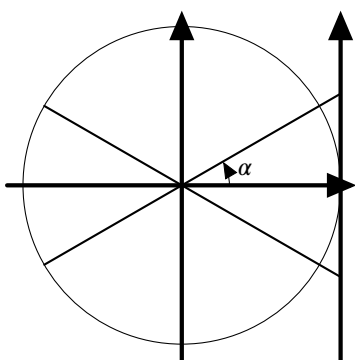
(i) $-1 < \sin(\alpha) < 1$

(ii) $-1 < \cos(\alpha) < 1$

(iii) $\tan(\alpha)$ n'est pas défini pour $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

(iv) $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\cot(\alpha)}$

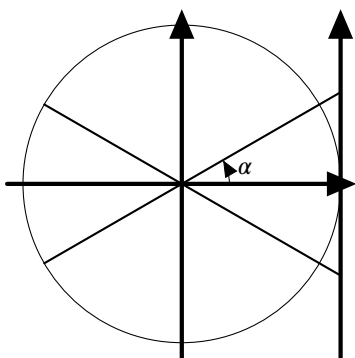
(v) $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$



Théorème 9.2 (Propriétés du cosinus)

Soit un angle α .

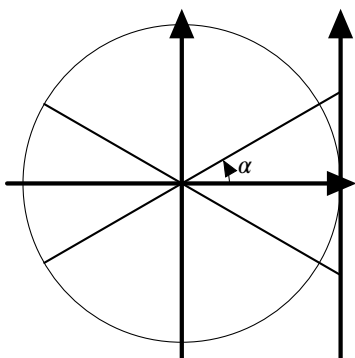
$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha) = -\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\pi + \alpha)$$



Théorème 9.3 (Propriétés du sinus)

Soit un angle α .

$$\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = -\sin(\pi + \alpha)$$



Théorème 9.4 (Propriétés de la tangente)

Soit un angle α .

$$\tan(\alpha) = \tan(\pi + \alpha) = -\tan(-\alpha) = -\tan(\pi - \alpha)$$

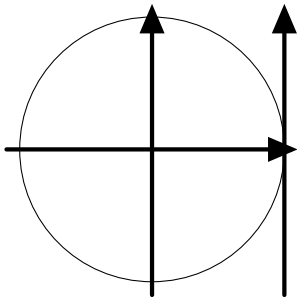
Remarque : La fonction **arcsinus**, $\sin^{-1}$, ne donne qu'un des angles ayant le sinus choisi. Il en va de même pour les fonctions **arccosinus**, $\cos^{-1}$, et **arctangente**, $\tan^{-1}$.

Exemple : Expliquer pourquoi $\sin^{-1}(\sin(150^\circ)) \neq 150^\circ$.

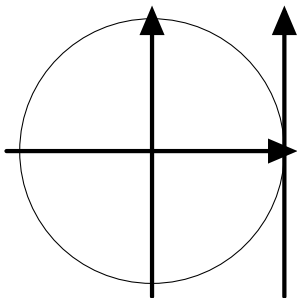
ex. 9.4 à 9.7

Exemples : Représenter ces angles dans un cercle trigonométrique et compléter ces tableaux sans calculatrice.

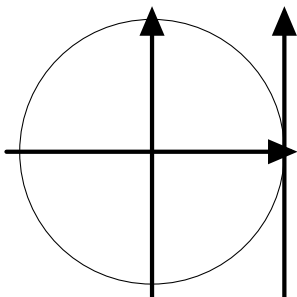
angle	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
sin		
cos		
tan		



angle	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
sin		
cos		
tan		



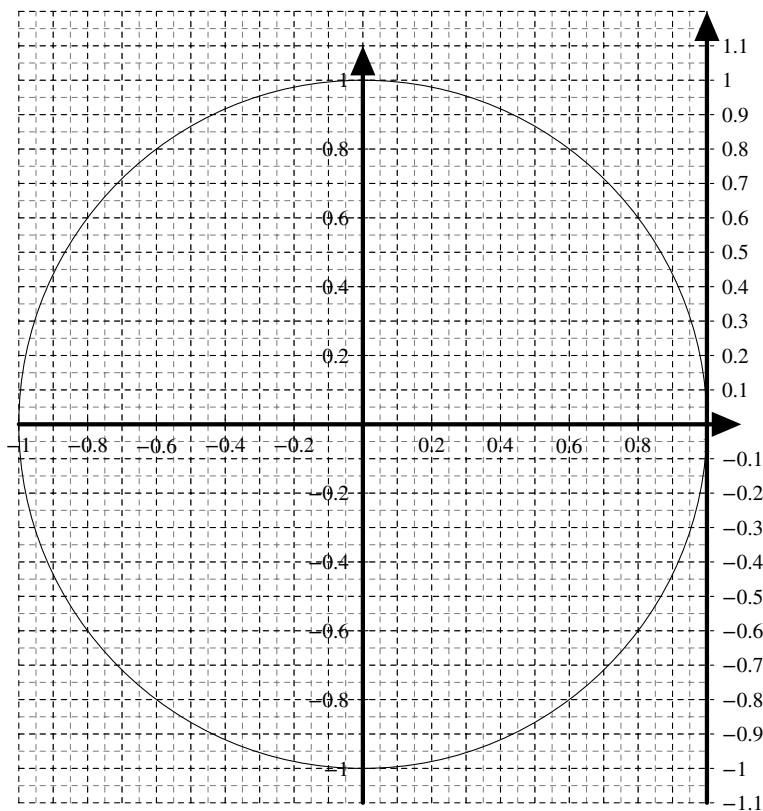
angle	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$
sin		
cos		
tan		



ex. 9.8

10 Équations trigonométriques simples

Exemple : À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre $\sin(\alpha) = 0,2$ pour α en degrés, puis pour α en radians.



Une équation trigonométrique a soit une infinité de solutions, soit aucune solution. Dès que l'on trouve une solution, il suffit d'ajouter un nombre entier de tours, donc $k \cdot 2\pi$ en radians ou $k \cdot 360^\circ$ en degrés avec $k \in \mathbb{Z}$, pour obtenir une autre solution.

La calculatrice permet de trouver une solution en utilisant les fonctions $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ et $\tan^{-1}$.

Les propriétés des rapports trigonométriques ou un croquis de cercle trigonométrique permettent d'en trouver d'autres.

Exemple : Résoudre $\cos(\alpha) = -0,3$ avec la calculatrice pour α en degrés, puis pour α en radians.

Exemple : Sans calculatrice, résoudre $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$ pour α en radians. Donner toutes les solutions entre -2π et 2π .

Théorème 10.1 (Solutions d'équations trigonométriques simples)

- $\boxed{\sin(\alpha) = c \text{ avec } c > 1 \text{ ou } c < -1}$ $\implies \mathcal{S} = \emptyset$
- $\boxed{\cos(\alpha) = c \text{ avec } c > 1 \text{ ou } c < -1}$ $\implies \mathcal{S} = \emptyset$
- $\boxed{\sin(\alpha) = c \text{ avec } -1 \leq c \leq 1}$

$$\implies \mathcal{S} = \{\sin^{-1}(c) + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{180^\circ - \sin^{-1}(c) + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

ou en radians : $\mathcal{S} = \{\sin^{-1}(c) + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \sin^{-1}(c) + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- $\boxed{\cos(\alpha) = c \text{ avec } -1 \leq c \leq 1}$

$$\implies \mathcal{S} = \{\cos^{-1}(c) + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\cos^{-1}(c) + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

ou en radians : $\mathcal{S} = \{\cos^{-1}(c) + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\cos^{-1}(c) + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- $\boxed{\tan(\alpha) = c \text{ avec } c \in \mathbb{R}}$

$$\implies \mathcal{S} = \{\tan^{-1}(c) + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{180^\circ + \tan^{-1}(c) + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\tan^{-1}(c) + k \cdot 180^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

ou en radians : $\mathcal{S} = \{\tan^{-1}(c) + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + \tan^{-1}(c) + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$= \{\tan^{-1}(c) + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

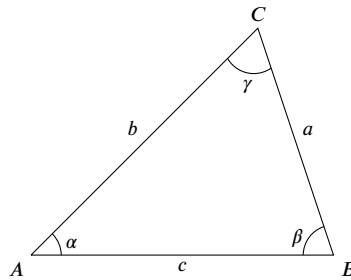
ex. 10.1 à 10.5

11 Résolution de triangles quelconques

11.1 Théorème du cosinus

Nous avons vu comment résoudre un triangle rectangle. Nous allons maintenant faire de même pour les triangles quelconques.

Nous nommerons les côtés et les angles comme ci-dessous :



Exemple : a) Calculer la longueur a d'un triangle quelconque, sachant que l'angle $\alpha = 60^\circ$, $c = 5$ et $b = 6$. Pour y arriver, partager le triangle en deux triangles rectangles à l'aide de la hauteur issue de C et utiliser uniquement le cosinus comme rapport trigonométrique. Noter soigneusement le raisonnement.

b) En utilisant le raisonnement fait ci-dessus, exprimer a à l'aide des lettres α , c et b .

Théorème 11.1 (théorème du cosinus ou Pythagore généralisé) Soit un triangle ABC . On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

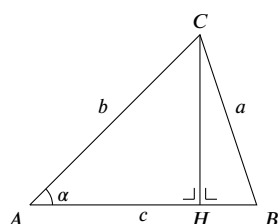
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Exemple : Calculer, à l'aide de ce théorème, la longueur a d'un triangle quelconque, sachant que l'angle $\alpha = 60^\circ$, $c = 5$ et $b = 6$.

Preuve :

- Si α est un angle aigu, la hauteur issue de C partage le triangle en deux triangles rectangles.



Par trigonométrie dans le triangle rectangle AHC , on a :

$$AH = b \cos(\alpha).$$

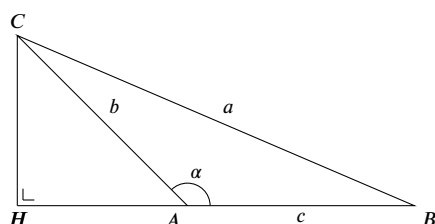
De plus, $HB = c - AH = c - b \cos(\alpha)$.

Par Pythagore, $CH^2 = AC^2 - AH^2 = b^2 - (b \cos(\alpha))^2 = b^2 - b^2 \cos^2(\alpha)$

$$\begin{aligned} \text{et } a^2 &= CH^2 + BH^2 = b^2 - b^2 \cos^2(\alpha) + (c - b \cos(\alpha))^2 \\ &= b^2 - b^2 \cos^2(\alpha) + c^2 - 2cb \cos(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha) \\ &= b^2 + c^2 - 2cb \cos(\alpha) \end{aligned}$$

On peut procéder de même pour les autres angles s'ils sont aigus.

- Si α est un angle obtus, la hauteur issue de C est hors du triangle.



Par trigonométrie dans le triangle rectangle AHC , on a :

$$AH = b \cos(180 - \alpha) = -b \cos(\alpha).$$

Notons que $\cos(\alpha)$ est négatif, car α est obtus.

De plus, $HB = c + AH = c - b \cos(\alpha)$.

Par Pythagore, $CH^2 = AC^2 - AH^2 = b^2 - (-b \cos(\alpha))^2 = b^2 - b^2 \cos^2(\alpha)$

$$\begin{aligned} \text{et } a^2 &= CH^2 + BH^2 = b^2 - b^2 \cos^2(\alpha) + (c - b \cos(\alpha))^2 \\ &= b^2 - b^2 \cos^2(\alpha) + c^2 - 2cb \cos(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha) \\ &= b^2 + c^2 - 2cb \cos(\alpha) \end{aligned}$$

#

Remarque : Si $\alpha = 90^\circ$, on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(90) = b^2 + c^2$. On retrouve le théorème de Pythagore.

Nous utiliserons le théorème du cosinus pour résoudre des triangles lorsqu'on connaît la longueur des trois côtés ou deux côtés et un angle.

Exemple : Résoudre le triangle ABC sachant que $a = 4$, $b = 5$ et $c = 7$ (sauf l'aire). Vérifier par construction.

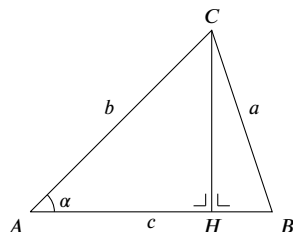
Exemple : Résoudre le triangle ABC sachant que $\alpha = 40^\circ$, $b = 5$ et $c = 7$ (sauf l'aire). Vérifier par construction.

Exemple : Résoudre le triangle ABC sachant que $\alpha = 40^\circ$, $a = 4$ et $b = 5$ (sauf l'aire).
Vérifier par construction.

ex. 11.1 à 11.2

11.2 Théorème de l'aire

Exemple :



a) Exprimer la hauteur CH en fonction de b et de α .

b) Exprimer l'aire du triangle en fonction de b , de c et de α .

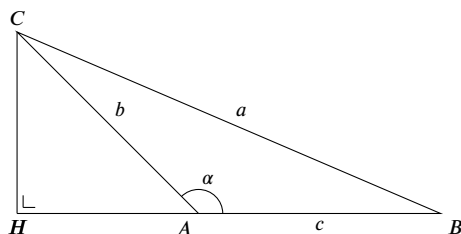
Théorème 11.2 (théorème de l'aire) Soit un triangle ABC . On a :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}ab \cdot \sin(\gamma)$$

Exemple : Calculer l'aire du triangle ABC tel que l'angle $\alpha = 60^\circ$, $c = 5$ et $b = 6$.

Preuve :

- Si α est un angle aigu, l'exemple du haut de la page prouve la partie du théorème concernant α . On peut faire de même pour les autres angles aigus du triangle.
- Si α est un angle obtus, la hauteur issue de C est hors du triangle.



Par trigonométrie dans le triangle rectangle AHC , on a :

$$CH = b \cdot \sin(180 - \alpha) = b \cdot \sin(\alpha).$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2}c \cdot b \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2}bc \cdot \sin(\alpha)$$

#

ex. 11.3

11.3 Théorème du sinus

Théorème 11.3 (théorème du sinus) Soit un triangle ABC . On a :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Exemple : Calculer l'angle β du triangle ABC , à l'aide de ce théorème, sachant que l'angle $\alpha = 40^\circ$, $a = 4$ et $b = 5$. Trouver toutes les possibilités et vérifier par construction.

Preuve : Par le théorème de l'aire, on a $\frac{1}{2}bc \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac \cdot \sin(\beta)$.

En multipliant par 2 et en divisant par $c \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$, on obtient : $\frac{a}{\sin(\beta)} = \frac{b}{\sin(\alpha)}$. #

Exemple :

Calculer l'angle β du triangle ABC , à l'aide du théorème du sinus, sachant que l'angle $\alpha = 40^\circ$, $b = 5$ et $c = 3$. Trouver toutes les possibilités et vérifier par construction.

Remarque : Ce théorème est plus facile d'utilisation que le théorème du cosinus. Néanmoins, lorsqu'on l'utilise pour trouver un angle, il donne parfois des solutions que l'on doit éliminer.

Malheureusement, il n'y a pas toujours des critères simples, à part la construction, pour savoir si l'on doit éliminer une possibilité ou non. De ce fait, il vaut mieux éviter d'utiliser le théorème du sinus pour trouver des angles.

Nous utiliserons le théorème du sinus pour résoudre des triangles lorsqu'on connaît deux angles et un côté.

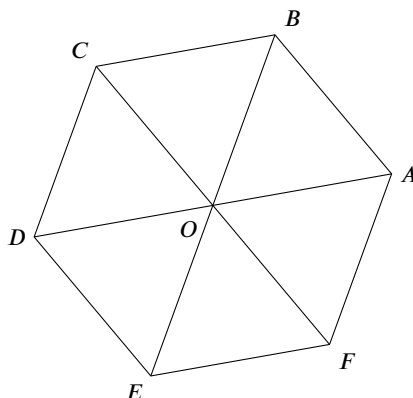
Exemple : Résoudre le triangle ABC sachant que $a = 6$, $\alpha = 45^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$. Vérifier par construction.

ex. 11.4 à 11.8

12 Exercices

12.1 Vecteurs

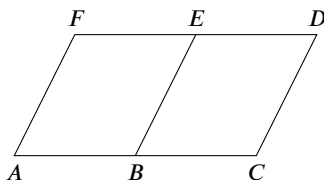
Exercice 1.1 Dans l'hexagone régulier ci-dessous, identifier toutes les flèches qui représentent un même vecteur. (On ne considérera que les flèches portées par les segments dessinés.)



Exercice 1.2 Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses pour la figure de l'exercice précédent.

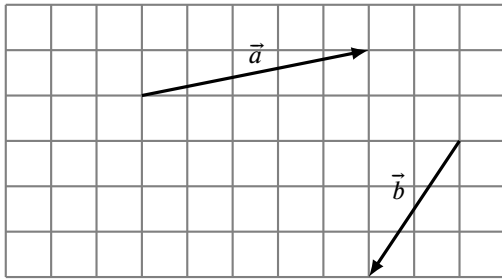
- a) Le $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{CD}$.
- b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DE}$.
- c) Le $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{CF}$.
- d) Le $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AF}$.
- e) Le $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{FF}$.
- f) Le $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OF}$.
- g) Le $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{OF}$.

Exercice 1.3 Dans la figure ci-dessous, composée de deux parallélogrammes identiques, identifier toutes les flèches qui représentent un même vecteur. (On ne considérera que les flèches portées par les segments dessinés.)

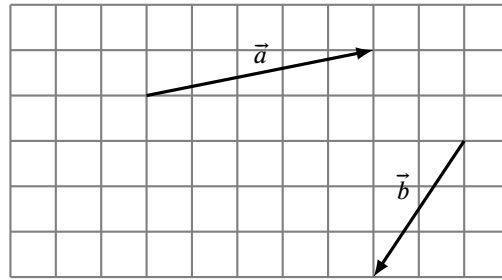


Exercice 1.4 Dessiner, dans chaque cas, le vecteur $\vec{v}$.

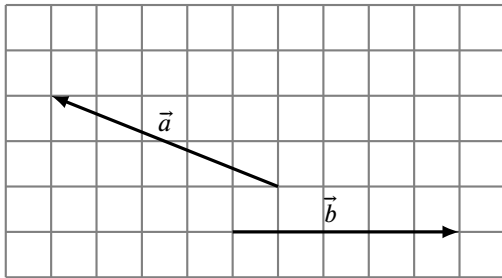
a) $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$



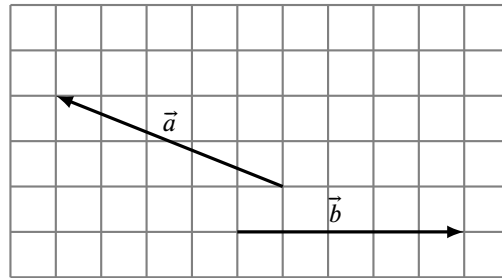
$\vec{v} = \vec{b} + \vec{a}$



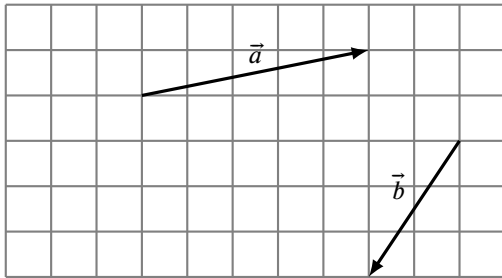
b) $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$



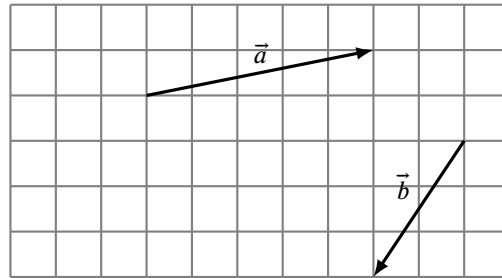
$\vec{v} = \vec{b} + \vec{a}$



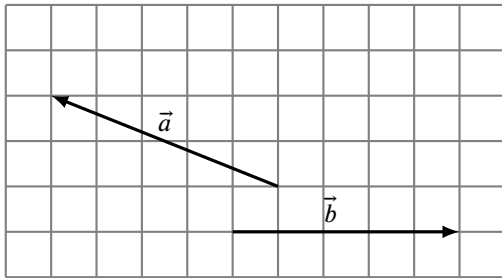
c) $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$



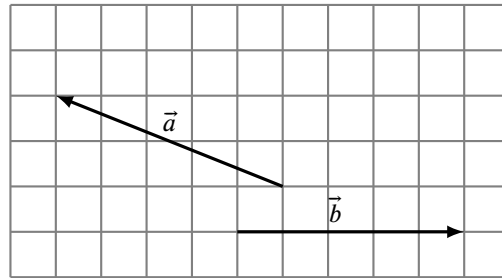
$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$



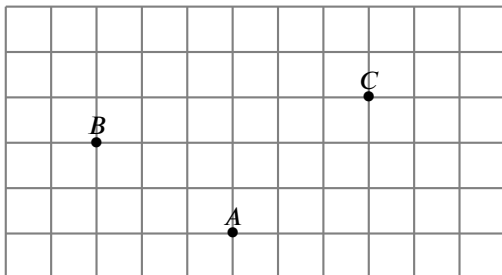
d) $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$



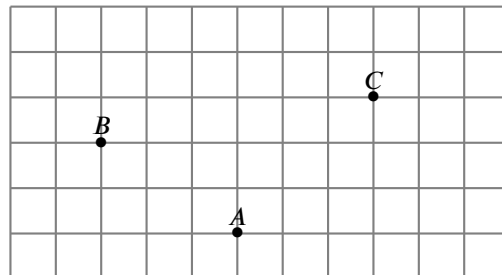
$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$



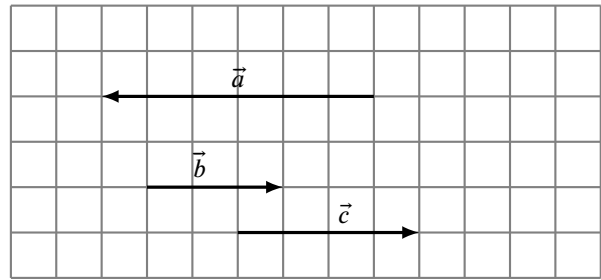
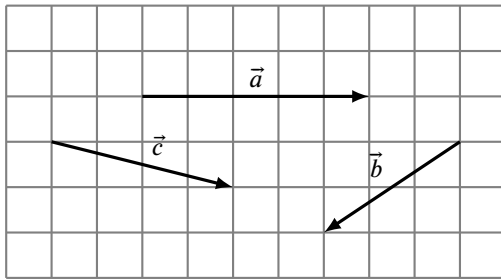
e) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



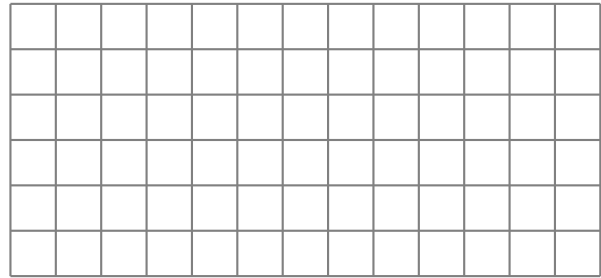
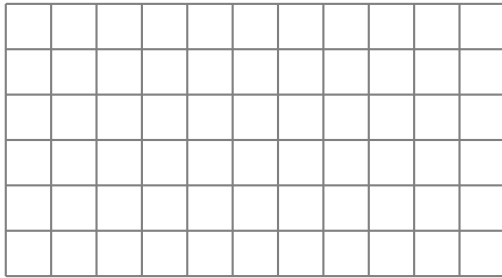
$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



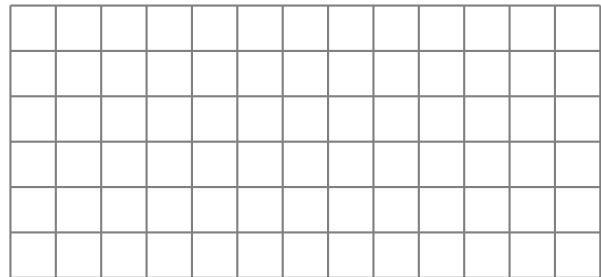
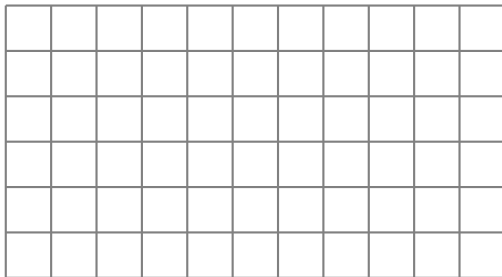
Exercice 1.5 Dessiner, dans chaque cas, le vecteur demandé.



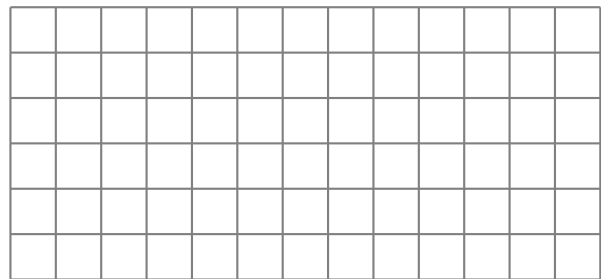
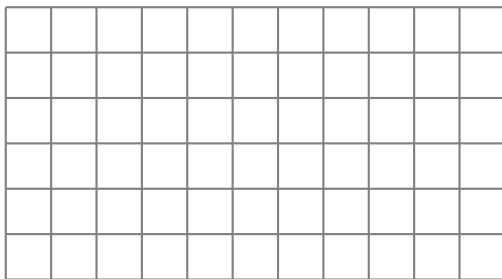
a) le vecteur $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



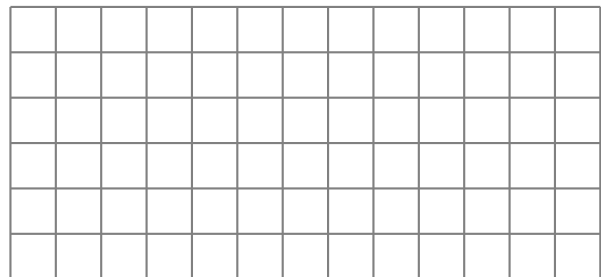
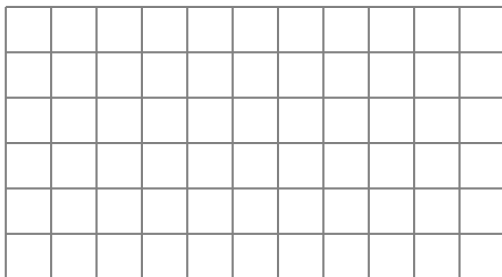
b) le vecteur $\vec{b} - \vec{c} + \vec{a}$



c) le vecteur $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$

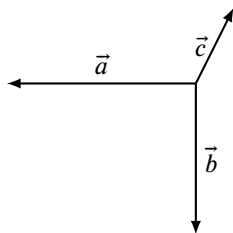


d) le vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$

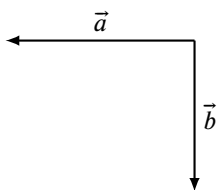


Exercice 1.6 On considère les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ci-dessous.

- a) Construire le vecteur $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



- b) Construire le vecteur $\vec{e}$ tel que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{e} = \vec{0}$.



Exercice 1.7 Soit les points A , B , C , D et E . En utilisant la règle de Chasles, simplifier autant que possible les expressions suivantes.

a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$

d) $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$

Exercice 1.8 On considère le parallélépipède $ABCD EFGH$ représenté ci-dessous. Exprimer, aussi simplement que possible, les vecteurs suivants.

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

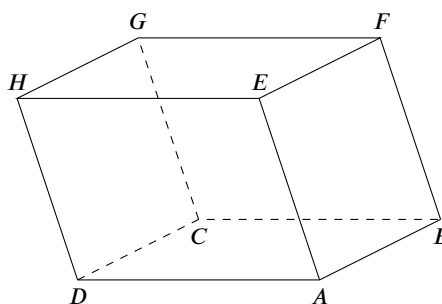
b) $\vec{b} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$

d) $\vec{d} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$

e) $\vec{e} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$

f) $\vec{f} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$



Exercice 1.9 On donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Construire les vecteurs ci-dessous.

$$\vec{a} = 3\vec{u}$$

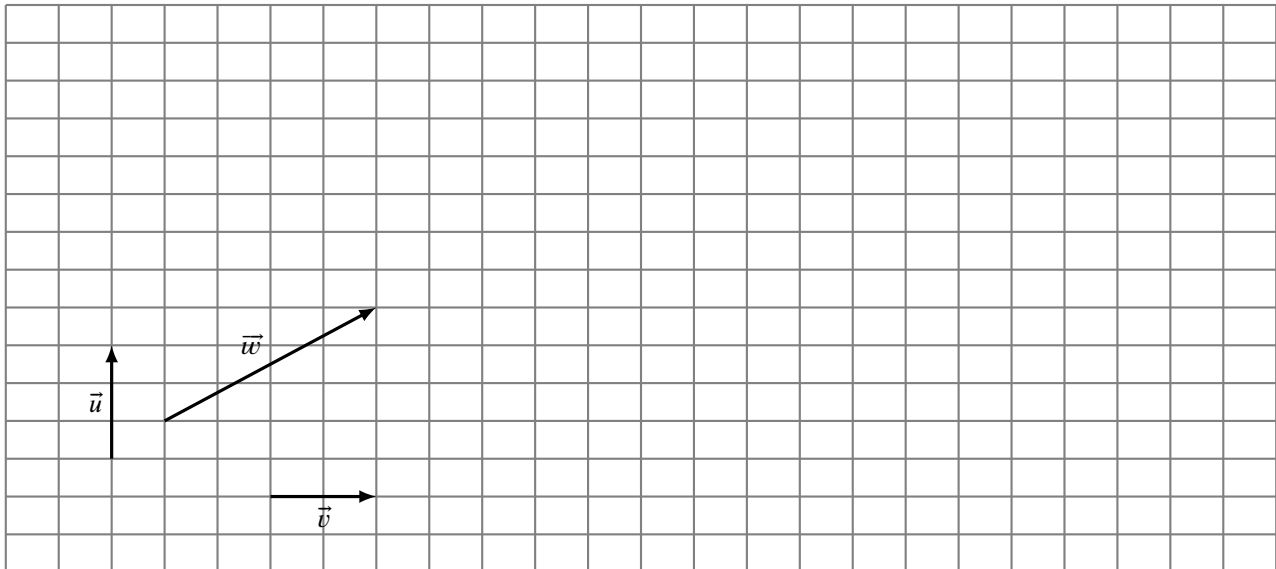
$$\vec{d} = \frac{3}{4}\vec{w}$$

$$\vec{b} = -2\vec{v}$$

$$\vec{e} = -\frac{4}{3}\vec{w}$$

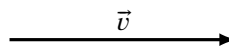
$$\vec{c} = 2,5\vec{w}$$

$$\vec{f} = \frac{9}{2}\vec{v}$$

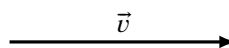


Exercice 1.10 On donne le vecteur $\vec{v}$ ci-dessous. Construire les vecteurs suivants (à la règle et au compas, sans machine à calculer).

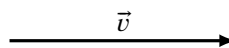
$$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{v}$$



$$\vec{b} = -3\vec{v}$$

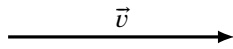


$$\vec{c} = -\frac{3}{5}\vec{v}$$

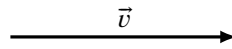


Exercice 1.11 On donne le vecteur $\vec{v}$ ci-dessous. Construire les vecteurs suivants (à la règle et au compas, sans machine à calculer).

$$\vec{d} = \sqrt{2} \cdot \vec{v}$$



$$\vec{e} = -\sqrt{3} \cdot \vec{v}$$



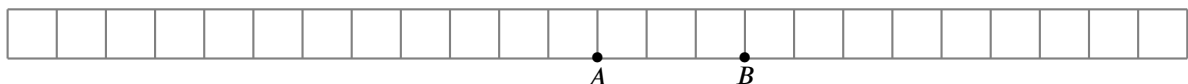
Exercice 1.12 Construire les points P , Q , R et S afin que les égalités ci-dessous soient vérifiées :

$$\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

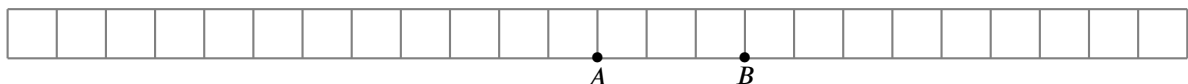
$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$



Exercice 1.13 A l'aide de la règle de Chasles, écrire les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AS}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, en sachant que les égalités ci-dessous sont vérifiées. Puis, construire les points R et S .

$$\overrightarrow{RB} = -2\overrightarrow{AR}$$

$$\overrightarrow{SA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}$$



Exercice 1.14 On donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Construire les vecteurs ci-dessous.

$$\vec{a} = -\vec{u} + 4\vec{v}$$

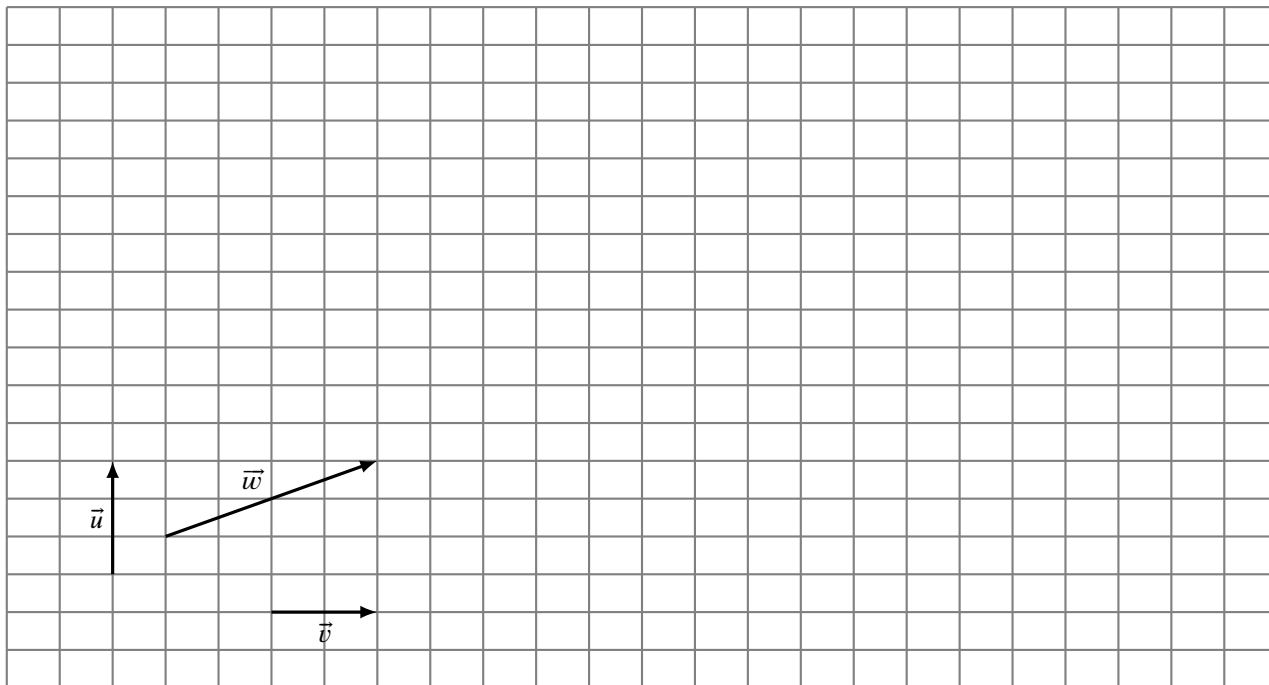
$$\vec{b} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$$

$$\vec{c} = \vec{u} - 2(\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w})$$

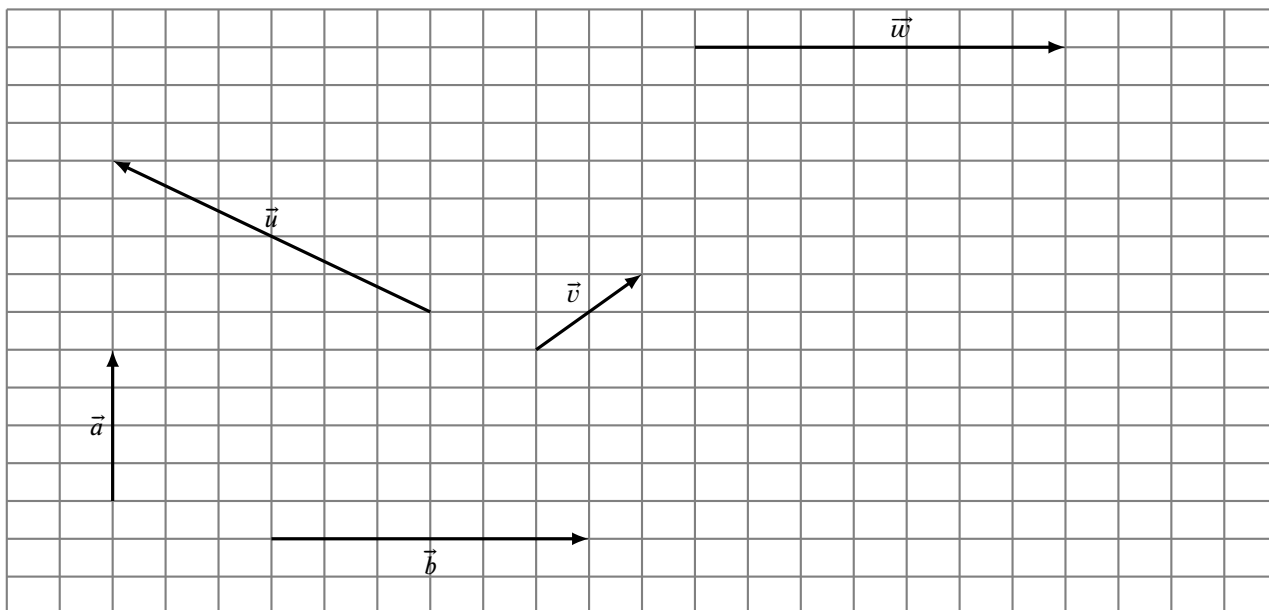
$$\vec{d} = \vec{u} + \vec{v} - 3\vec{w}$$

$$\vec{e} = \frac{4}{3}(\vec{u} + \vec{v})$$

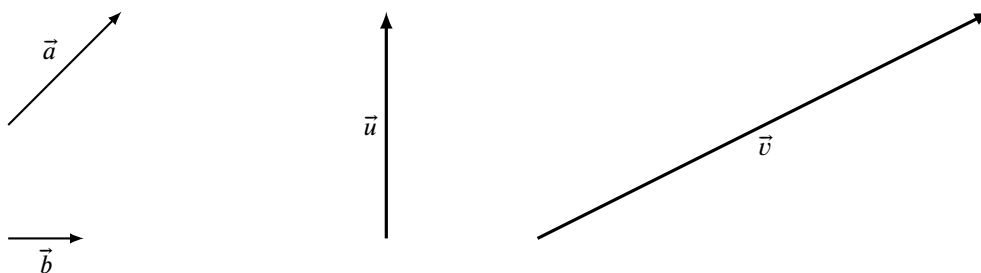
$$\vec{f} = \frac{2}{3}\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$$



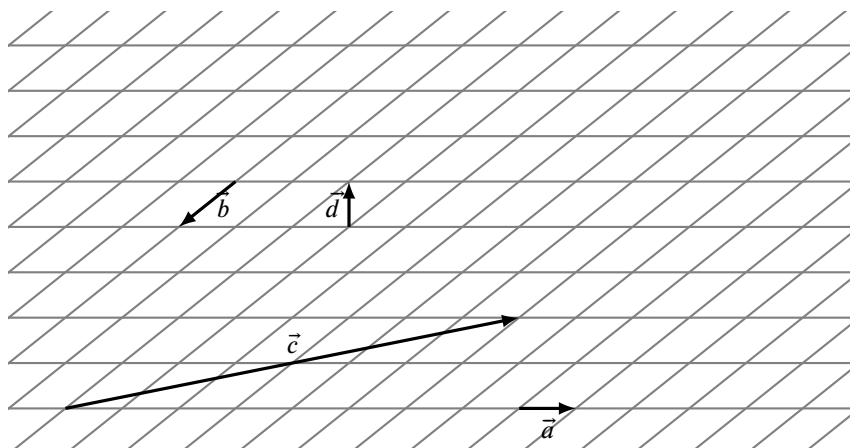
Exercice 1.15 Par rapport aux vecteurs de la figure ci-dessous, écrire les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, puis écrire le vecteur $\vec{a}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.



Exercice 1.16 Décomposer graphiquement les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



Exercice 1.17 Par rapport aux vecteurs de la figure ci-dessous :



- Exprimer $\vec{c}$ puis $\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- Soit le vecteur $\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{c} - 5\vec{d}$.
En utilisant ce qui a été obtenu au a), exprimer $\vec{x}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- En utilisant ce qui a été obtenu au a), exprimer $\vec{a}$ puis $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{d}$.

Exercice 1.18 Un avion est en approche de la piste d'atterrissage. Il vole à 100 km/h (vitesse mesurée par les sondes de l'avion) de manière à compenser le vent qui souffle latéralement à la piste à une vitesse de 50 km/h.

- Faire un croquis et calculer sa vitesse dans la direction de la piste d'atterrissage.
- Calculer son angle de vole par rapport à la piste d'atterrissage.

Exercice 1.19 Un avion est en approche par le Sud d'un aéroport dont la piste d'atterrissage est orientée sud-nord. La tour de contrôle annonce un vent venant du Nord-Est faisant un angle de 40° avec la piste et soufflant à 60 km/h.

Répondre aux questions suivantes à l'aide d'un schéma à l'échelle.

- Sachant que la vitesse de l'avion (mesurée par ses sondes) est de 100 km/h, quel angle par rapport à l'axe de la piste le pilote doit-il donner à son avion pour se maintenir dans l'axe de la piste ?
- Quelle est sa vitesse par rapport au sol ?

12.2 Bases

Exercice 2.1 Soit la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ ci-dessous.

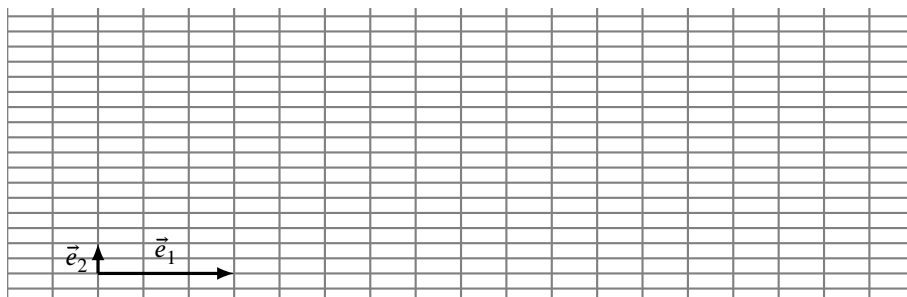
Représenter les vecteurs à partir de leurs composantes relativement à cette base.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Exercice 2.2 Soit la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ ci-dessous.

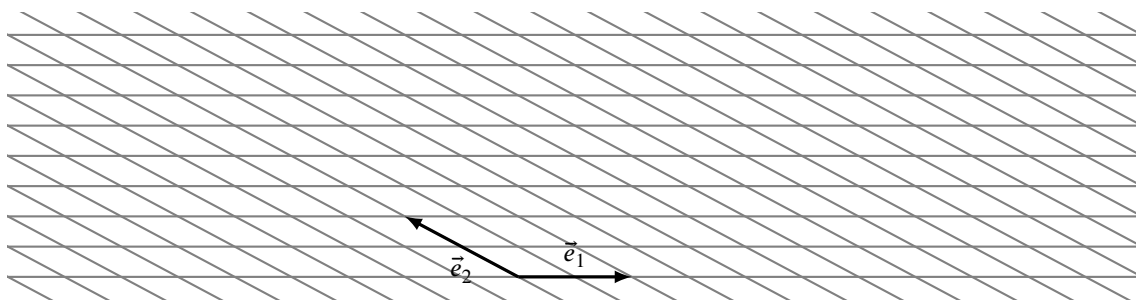
Représenter les vecteurs à partir de leurs composantes relativement à cette base.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Exercice 2.3 On reprend la base et les vecteurs de l'exercice précédent.

a) Représenter les vecteurs ci-dessous.

$$\vec{u} = 2\vec{b}$$

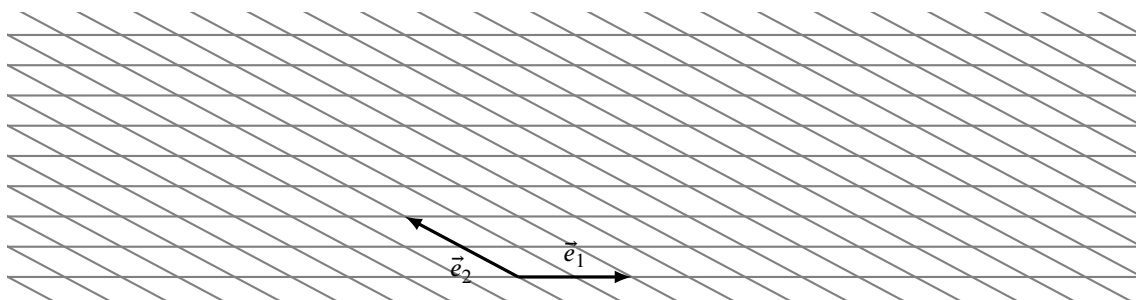
$$\vec{v} = \frac{1}{4}\vec{c}$$

$$\vec{w} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{r} = \vec{d} - \frac{1}{4}\vec{c}$$

b) Déterminer leurs composantes par rapport à la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$.

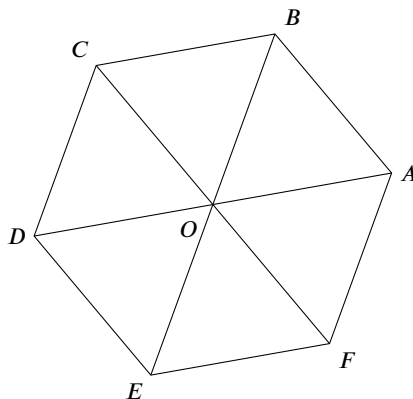
c) Comparer les composantes et les combinaisons linéaires.



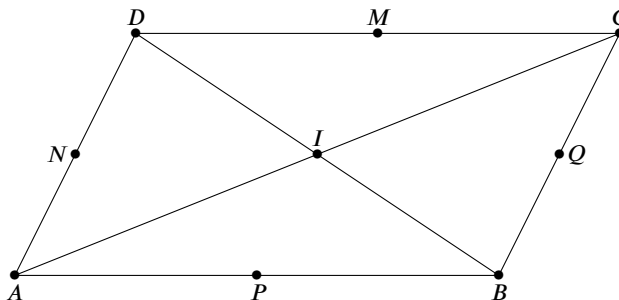
Exercice 2.4 On considère l'hexagone régulier ci-dessous.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{CF}$:

- relativement à la base $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$
- relativement à la base $(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CO})$



Exercice 2.5 Soit le parallélogramme $ABCD$ ci-dessous et les points milieux de ses côtés P , Q , M , N .



Calculer les composantes des vecteurs :

$\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AP}$ $\overrightarrow{AN}$ $\overrightarrow{AQ}$ $\overrightarrow{AM}$ $\overrightarrow{AI}$ $\overrightarrow{IB}$ $\overrightarrow{MN}$ $\overrightarrow{CP}$

- relativement à la base $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$
- relativement à la base $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AP})$

Exercice 2.6 Relativement à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, soit les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes des vecteurs suivants

- $3\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c}$
- $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
- $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$

Exercice 2.7 Relativement à une base $\mathcal{B}$, on considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- Calculer les coefficients k et m de la combinaison linéaire $k\vec{a} + m\vec{b} = \vec{c}$.
- Quelles sont les composantes de $\vec{c}$ dans la base $(\vec{a}; \vec{b})$?
- Quelles sont les composantes de $\vec{c}$ dans la base $(\vec{b}; \vec{a})$?
- Quelles sont les composantes de $\vec{c}$ dans la base $(\vec{a}; \vec{c})$?

Exercice 2.8 Relativement à une base $\mathcal{B}$, soit les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \vec{b} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \vec{c} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} & \vec{d} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} & \vec{e} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{f} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} & \vec{g} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} & \vec{h} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} & \vec{i} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires. Justifier par calcul.

Exercice 2.9 Calculer le paramètre $m \in \mathbb{R}$ tel que les vecteurs suivants soient colinéaires :

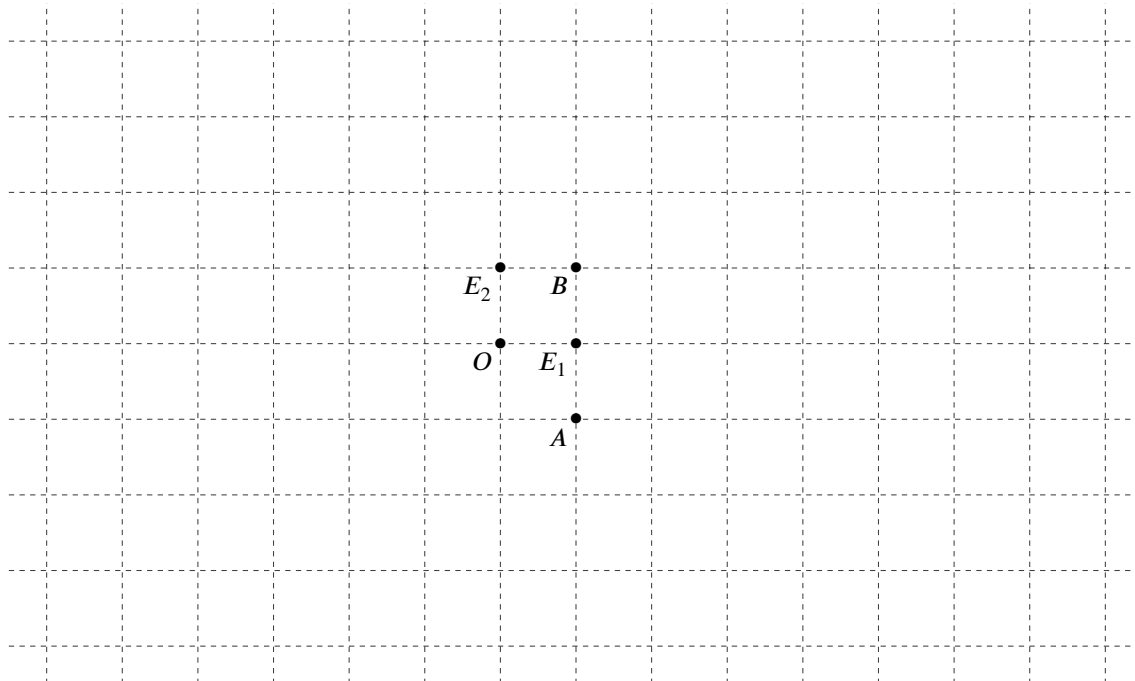
$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} m-1 \\ 2-m \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2m \\ 2m-3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.10 Calculer le paramètre $m \in \mathbb{R}$ tel que les vecteur suivants soient colinéaires :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{pmatrix} m \\ 2m-1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ m+2 \end{pmatrix} & \text{c) } & \begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} m+1 \\ m+1 \end{pmatrix} \\ \text{b) } & \begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix} & \text{d) } & \begin{pmatrix} m \\ 3m \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12.3 Repères et coordonnées

Exercice 3.1 On considère la figure suivante :



a) Représenter les points suivants dont les coordonnées relativement à la base $\mathcal{R}_1 = (O; E_1; E_2)$ sont :

$$\begin{array}{ccccc} M(4;2) & N(-3;3) & P(-4;-4) & Q(2;3) & R(1;-3) \\ S(0;-3) & T(5;0) & U(-1;-4) & V(-2;3) & \end{array}$$

b) Déterminer les coordonnées de ces points relativement au repère $\mathcal{R}_2 = (O; A; B)$

Exercice 3.2 Dans un repère, on donne les points de coordonnées :

$$A(0;4) \quad B(8;-1) \quad C(-5;-4) \quad D(-6;0) \quad E\left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$$

Calculer les composantes des vecteurs suivants relativement à la base associée au repère.

- | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $\overrightarrow{AB}$ | c) $\overrightarrow{AC}$ | e) $\overrightarrow{EC}$ | g) $\overrightarrow{ED}$ |
| b) $\overrightarrow{BA}$ | d) $\overrightarrow{DB}$ | f) $\overrightarrow{DA}$ | h) $\overrightarrow{BB}$ |

Exercice 3.3 On donne les points $A(5;2)$, $B(8;0)$, $C(-2;-4)$ et $D(4;-6)$.

Calculer les composantes des vecteurs suivants :

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ | b) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ | c) $4\overrightarrow{AC} - 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC})$ |
|--|--|--|

Exercice 3.4 Calculer les composantes ou les coordonnées manquantes :

$$\text{a) } A(2;3) \quad B(-5;4) \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A(5;-1) \quad B(-2;3) \quad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A(2;-7) \quad B(\dots; \dots) \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A(\dots; \dots) \quad B(7;-9) \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.5 Soit le point $Z(4;-1)$. Calculer les coordonnées des points A , B , C et D tels que :

$$\overrightarrow{AZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BZ} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad 2\overrightarrow{CZ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{3}\overrightarrow{DZ} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Exercice 3.6 Dans un repère, on donne les points de coordonnées :

$$A(-2;-1)$$

$$B(7;0)$$

$$C(1;5)$$

Calculer les coordonnées du point D tel que :

a) le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

b) le quadrilatère $ABDC$ soit un parallélogramme.

Exercice 3.7 On donne les points $A(3;4)$ et $B(-3;3)$. Calculer les coordonnées des points C , D , L et R pour lesquels :

$$\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DB} \quad , \quad \overrightarrow{LA} = \frac{5}{3}\overrightarrow{LB} \quad , \quad \overrightarrow{RA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{RB}$$

Exercice 3.8 Calculer les coordonnées de A tel que $\overrightarrow{AR} - 5\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, sachant que $B(3;-1)$ et $R(1;0)$.

Exercice 3.9 On donne les trois points $M(0;8)$, $P(-2;-1)$ et $H(3;-3)$.

a) Trouver les coordonnées de l'image M' de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{PH}$.

b) Trouver les coordonnées de l'image M'' de M par la symétrie centrale de centre P .

c) Trouver les coordonnées de l'image M''' de M par l'homothétie de centre H et de rapport -2 .

Exercice 3.10 On donne les points $A(3;2)$, $B(-5;6)$ et $C(-2;-3)$. Déterminer les coordonnées des points suivants :

- a) le point P situé au quart du segment AB depuis A ;
- b) le point Q situé aux deux tiers du segment BC depuis B .

Exercice 3.11 Les points suivants sont-ils alignés ?

$$A(-56;84)$$

$$B(16;-24)$$

$$C(-8;12)$$

Exercice 3.12 Calculer le(s) valeur(s) du paramètre k afin que les points A , B et C soient alignés.

$$a) A(1;2)$$

$$B(-3;3)$$

$$C(k;1)$$

$$b) A(2;k)$$

$$B(7k-29;5)$$

$$C(-4;2)$$

Exercice 3.13 Dans un repère, soit les points A , B et M tels que M soit le milieu du segment AB . Calculer les coordonnées manquantes.

$$a) A(5;1)$$

$$B(-1;6)$$

$$M(\dots; \dots)$$

$$b) A(\dots; \dots)$$

$$B(5;8)$$

$$M(6;-2)$$

$$c) A(-5;4)$$

$$B(\dots; \dots)$$

$$M(-2;-2)$$

Exercice 3.14 Soit un triangle ABC avec $A(2;-3)$, $B(14;1)$ et $C(5;3)$. Calculer les coordonnées du point $Z(x;y)$ situé aux deux-tiers de la distance entre A et le milieu du côté BC . Dessiner la situation. Quel est le nom du point Z ?

Exercice 3.15 Soit un triangle ABC et son centre de gravité G . Calculer les coordonnées manquantes :

$$a) A(-3;4)$$

$$B(4;16)$$

$$C(0;-4)$$

$$G(\dots; \dots)$$

$$b) A(12;0)$$

$$B(0;0)$$

$$C(1;-3)$$

$$G(\dots; \dots)$$

$$c) A(6;-1)$$

$$B(-2;6)$$

$$C(\dots; \dots)$$

$$G(3;4)$$

$$d) A(10;6)$$

$$B(\dots; \dots)$$

$$C(-7;22)$$

$$G(-1;-4)$$

Exercice 3.16 Dans un repère, on donne les points de coordonnées

$$A(4;0)$$

$$B(0;6)$$

$$C(6;10)$$

$$D(-2;-4)$$

- a) Calculer les coordonnées des points M , R , S , T milieux respectivement des segments AC , BC , BD et AD .
- b) Représenter le problème et la solution dans un dessin à l'échelle.
- c) Montrer par calcul que le quadrilatère $TMR S$ est un parallélogramme.

Exercice 3.17 Relativement à un repère, on donne les coordonnées des sommets $A(3;-2)$ et $B(7;5)$ d'un parallélogramme $ABCD$, ainsi que $P(5;4)$, le point d'intersection de ses diagonales. Calculer les coordonnées des deux autres sommets C et D .

Exercice 3.18 Soit le parallélogramme $ABCD$ avec $A(4;-1)$, $B(12;0)$, $C(x;y)$ et $D(6;4)$. Dessiner ce parallélogramme et calculer les coordonnées du point C de 3 manières différentes.

Exercice 3.19 Soit les points $A(3;-2)$ et $B(19;14)$. Calculer les coordonnées des points C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 , C_6 , C_7 partageant le segment AB en huit parties de même longueur. Dessiner la situation.

12.4 Normes

Exercice 4.1 Soit un repère orthonormé.

a) Calculer les normes des vecteurs suivants :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \frac{1}{2}\vec{d} \quad \vec{f} = 10\vec{d}$$

b) Comparer les normes de $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{f}$. Que peut-on constater ?

c) Calculer les composantes et la norme du vecteur $\vec{a} + \vec{b}$. Que peut-on constater ?

Exercice 4.2 Relativement à un repère orthonormé, soit les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer si le résultat est un nombre ou un vecteur, puis calculer :

$$\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\| \quad \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| \quad \|-2\vec{a}\| + \|2\vec{a}\|$$

$$\|\vec{a}\| \cdot \vec{c} \quad \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \quad \left\| \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \right\|$$

Exercice 4.3 Soit le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}$.

Calculer la valeur du paramètre k et les composantes du vecteur $\vec{v}$ tels que $\|\vec{v}\| = 10$.

Exercice 4.4 Soit les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculer la valeur du paramètre m telle que $\|\vec{u} + m\vec{v}\| = \sqrt{82}$.

Exercice 4.5 Calculer le périmètre du triangle ABC pour les points de coordonnées :

$$A(2;1) \quad B(5;5) \quad C(0;-7)$$

Exercice 4.6 Relativement à un repère orthonormé, soit les points de coordonnées :

$$A(6;4) \quad B(12;-2) \quad C(17;9)$$

Montrer que le triangle ABC est isocèle, puis calculer son aire.

Exercice 4.7 Soit les points de coordonnées :

$$A(7;1) \quad B(5;5) \quad C(5;-3) \quad I(2;1)$$

Montrer que les points A , B et C sont sur un même cercle centré en I et calculer le rayon de ce cercle.

Exercice 4.8 Soit le triangle ABC dont les coordonnées des sommets sont :

$$A(3;1) \quad B(2;3) \quad C(6;5)$$

Montrer par Pythagore que ce triangle est rectangle et déterminer en quel sommet se trouve l'angle droit.

Exercice 4.9 On considère le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Calculer les composantes du vecteur qui est colinéaire à $\vec{a}$ et qui est :

- a) de norme égale à 1 et de même sens que $\vec{a}$.
- b) de norme égale à 1 et de sens opposé à $\vec{a}$.
- c) de norme égale à 15 et de même sens que $\vec{a}$.
- d) de norme égale à 7 et de sens opposé à $\vec{a}$.

Exercice 4.10 Calculer les composantes des vecteurs unitaires colinéaires aux vecteurs suivants :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.11 On donne les points $A(20; -5)$ et $B(-25; 55)$. Déterminer les points de la droite AB qui sont situés à une distance 15 de A .

12.5 Produit scalaire

Exercice 5.1

- a) Déterminer les composantes des vecteurs qui sont perpendiculaires au vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et de même norme que ce dernier.
- b) Déterminer les composantes des vecteurs qui sont perpendiculaires au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et de norme moitié de celle de $\vec{v}$.
- c) Déterminer les composantes des vecteurs qui sont perpendiculaires au vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ et de norme égale à 10.

Exercice 5.2 Soit les sommets $A(1; 3)$ et $C(7; 9)$ d'un losange $ABCD$.

Faire un dessin à l'échelle de la situation puis calculer les coordonnées des sommets B et D afin que la diagonale $[BD]$ ait une longueur double de la diagonale $[AC]$.

On rappelle que les diagonales d'un losange se coupent perpendiculairement en leur point milieu.

Exercice 5.3 Soit les points $A(2; 1)$ et $B(3; -5)$.

- a) Calculer les coordonnées des points C et D afin que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.
(Faire un dessin à l'échelle de la situation)
- b) Calculer les coordonnées des points P et Q afin que le quadrilatère $APBQ$ soit un carré.
(Faire un dessin à l'échelle de la situation)

Exercice 5.4 Soit les points $A(-6; -2)$ et $C(-8; 2)$. Calculer les coordonnées du troisième sommet du triangle ABC , sachant que le triangle est rectangle en C et que $2 \cdot \|\vec{BC}\| = 5 \cdot \|\vec{AC}\|$.

Exercice 5.5 En utilisant le produit scalaire, indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix}$

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

Exercice 5.6 Soit les points de coordonnées :

$$A(-4; -3)$$

$$B(2; 0)$$

$$C(0; 4)$$

Montrer que les droites AB et BC sont perpendiculaires. Puis, calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

Exercice 5.7 Soit les points de coordonnées :

$$A(7; 5)$$

$$B(8; 7)$$

$$C(12; 5)$$

$$D(13; 2)$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze rectangle.

Exercice 5.8 Calculer les composantes manquantes ou le paramètre m pour que les vecteurs soient perpendiculaires.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 14 \\ \dots \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \dots \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} m+1 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} m-1 \\ m+2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \dots \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} m+2 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5 \\ m-3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} m+1 \\ m-1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2m \\ m+9 \end{pmatrix}$

Exercice 5.9 Soit les points de coordonnées :

$$A(-2; 4)$$

$$B(1; -2)$$

$$C(\lambda; \lambda)$$

Calculer la valeur du paramètre λ pour que le triangle ABC soit rectangle :

a) en A

b) en B

c) en C

Exercice 5.10 Soit les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer et comparer les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies.

- a) $\vec{a} \bullet (7 \cdot \vec{b} + \vec{c})$ c) $\vec{a} + (\vec{b} \bullet \vec{c})$ e) $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b})$ g) $(\vec{a} \bullet \vec{b}) \cdot \vec{b}$
 b) $(\vec{a} \bullet 7 \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \bullet \vec{c})$ d) $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c})$ f) $\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2$ h) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \bullet \vec{b}$

Exercice 5.11 Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ des vecteurs et $k \in \mathbb{R}$.

Démontrer les propriétés suivantes :

- a) $\vec{a} \bullet \vec{0} = \vec{0} \bullet \vec{a} = 0$
 b) $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ (commutativité)
 c) $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{b}) + (\vec{a} \bullet \vec{c})$ (distributivité)
 d) $k(\vec{a} \bullet \vec{b}) = (k\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (k\vec{b})$
 e) $(\vec{a} \bullet \vec{a}) = \|\vec{a}\|^2$

Exercice 5.12 Calculer les angles internes du triangle de sommets $A(2; -3)$, $B(3; 2)$ et $C(-2; 4)$.

Exercice 5.13 On considère le triangle de sommets $A(3; 3)$, $B(2; 4)$ et $C(1; 2)$.

- a) Montrer que le triangle ABC est isocèle et préciser en quel sommet.
 b) Soit D le point tel que $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}$.
 Montrer que le point D est sur une bissectrice de l'angle $A\hat{O}B$.

Exercice 5.14 Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$, si $A(2; 1)$, $B(5; 3)$, $C(7; 9)$ et $D(4; 7)$.

Exercice 5.15 Calculer l'aire du triangle ABC , si $A(3; -1)$, $B(-1; 2)$ et $C(7; 5)$.

Exercice 5.16 Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$, si $A(3; 0)$, $B(1; 4)$, $C(-5; -1)$ et $D(0; -6)$.

12.6 Les rapports trigonométriques

Exercice 6.1 Construire un vrai triangle isocèle rectangle pour calculer une bonne valeur approchée de $\sin(45^\circ)$, $\cos(45^\circ)$ et $\tan(45^\circ)$.

Exercice 6.2 Construire un vrai triangle isocèle équilatéral pour calculer une bonne valeur approchée de $\sin(30^\circ)$, $\cos(30^\circ)$ et $\tan(30^\circ)$.

Exercice 6.3 Construire un triangle qui permette de mesurer une bonne valeur approchée de l'angle dont la tangente est $\frac{7}{5}$. Combien mesure cet angle ?

Exercice 6.4 Construire un triangle qui permette de mesurer une bonne valeur approchée de l'angle dont le cosinus est $\frac{3}{5}$. Combien mesure cet angle ?

Exercice 6.5 Construire un triangle qui permette de mesurer une bonne valeur approchée de l'angle dont le sinus est $\frac{9}{5}$. Combien mesure cet angle ?

Exercice 6.6 Soit α un angle aigu.

- a) Calculer $\sin(\alpha)$ sans déterminer α , sachant que $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$.
- b) Calculer $\tan(\alpha)$ sans déterminer α , sachant que $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$.
- c) Calculer $\sin(90 - \alpha)$ sans déterminer α , sachant que $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$.
- d) Calculer $\tan(90 - \alpha)$ sans déterminer α , sachant que $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Exercice 6.7 A l'aide d'une calculatrice, résoudre les équations suivantes. (Solutions arrondies au centième de degré et comprises entre 0° et 90°)

- | | | |
|------------------------|------------------------|--------------------|
| a) $\sin(x) = 0,58322$ | c) $\tan(x) = 0,65426$ | e) $\sin(x) = 0,5$ |
| b) $\cos(x) = 0,94824$ | d) $\cot(x) = 1,5428$ | f) $\cos(x) = 1,1$ |

Exercice 6.8 Résoudre le triangle rectangle ABC tel que :

- | | |
|---|--|
| a) ABC est rectangle en C , $c = 4,25$ et $\beta = 67,20^\circ$ | c) ABC est rectangle en A , $b = 48,52$ et $\beta = 53,46^\circ$ |
| b) ABC est rectangle en B , $b = 25,43$ et $c = 12,30$ | d) ABC est rectangle en B , $c = 22,3$ et $a = 46,8$ |

Exercice 6.9 Résoudre le triangle rectangle ABC tel que ABC est rectangle en A , $b = 39,50$ et $\mathcal{A} = 987,20$

Exercice 6.10 Un triangle ABC est isocèle en A . Résoudre ce triangle connaissant :

- | | |
|--|---|
| a) $a = 23,60$ et $\alpha = 42,50^\circ$ | b) $a = 10,30$ et $\beta = 56,30^\circ$ |
|--|---|

Exercice 6.11 L'ombre horizontale d'une tour verticale mesure $L = 42$ m lorsque le soleil est élevé de $\alpha = 35,5^\circ$ au-dessus de l'horizon. Calculer la hauteur de la tour.

Exercice 6.12 Stonehenge, dans les plaines de Salisbury en Angleterre, a été construit à l'aide de blocs de pierre pesant plus de 45'000 kg chacun. Pour soulever une de ces pierres, il a fallu 550 personnes qui poussaient la pierre le long d'une rampe inclinée d'un angle de 9° .

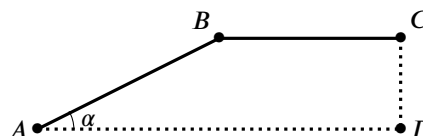
Calculer sur quelle distance (arrondir la réponse au cm près) la pierre a été déplacée pour la dresser à une hauteur de 9 m.

Exercice 6.13 Le « raidillon » des Boveresses à Lausanne mesure 4 mm sur une carte au 1 : 25'000 ; la différence d'altitude entre le bas et le haut est de 20 m.

- Quelle est sa pente (en %) ?
- Quel angle moyen fait-il avec l'horizontale ?
- Quelle distance (réponse arrondie au m près) parcourt un cycliste en le gravissant ?

Exercice 6.14

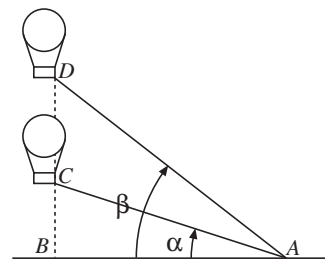
La figure ci-contre représente une rampe.



On sait que l'angle α mesure 25° , que AD mesure 20 mètres et que CD mesure 5 mètres. Calculer la longueur totale (arrondie à 0,1 m près) de la rampe (soit la somme des distances AB et BC).

Exercice 6.15

On mesure depuis un point A du sol les angles d'élévation α et β pour deux positions C et D d'un ballon à air chaud. On sait que le point A se trouve à 780 mètres du point de départ B du ballon (voir ci-contre).



- Sachant que $\alpha = 65^\circ$ et $\beta = 73^\circ$, déterminer :
 - La différence d'altitude CD du ballon entre les deux mesures.
 - La distance AD .
- Si le ballon continue à monter verticalement, quel sera l'angle d'élévation γ du ballon lorsque la différence d'altitude avec le point de départ B sera de 5'200 m ?

Exercice 6.16 La voûte d'un tunnel routier est un arc de cercle d'angle au centre $\alpha = 220^\circ$. Calculer le rayon de ce cercle pour que la largeur de la route soit de $L = 12$ m, ainsi que la hauteur de la voûte maximale au-dessus du sol.

Exercice 6.17 Un observateur, placé à une altitude de 252 m au-dessus de la mer, a trouvé que le rayon visuel aboutissant à l'horizon faisait un angle de $89,49^\circ$ avec la verticale. Calculer, d'après cette mesure, le rayon terrestre.

Exercice 6.18 Un homme aperçoit un arbre vertical sous un angle de $41,20^\circ$. Il recule de 25 m et voit l'arbre sous un angle de $22,10^\circ$ (on admet que les yeux de l'observateur et le pied de l'arbre sont au même niveau).

- A quelle distance du pied de l'arbre l'observateur se trouvait-il au début ?
- Quelle est la hauteur de l'arbre ?

Exercice 6.19 Déterminer la hauteur d'une tour sachant que son ombre s'allonge de 62 mètres quand l'élévation du soleil au-dessus de l'horizon passe de 52° à $23,5^\circ$.

Exercice 6.20 Compléter le tableau ci-dessous, uniquement grâce à votre mémoire ou un croquis.

angle	sin	cos	tan
30°			
45°			
60°			

Exercice 6.21 Résoudre les équations suivantes sans calculatrice. (Solutions exactes, en degré et comprises entre 0° et 90°)

- $\sin(x) = 0,5$
- $\cos(45) = x$
- $\tan^{-1}(x) = 30$
- $\cos(x) = \frac{1}{2}$
- $\tan(x) = 1$
- $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x$

12.7 Autres unités de mesure d'angles

Exercice 7.1 Sans utiliser les touches DD et DMS de la calculatrice.

A) Exprimer l'angle en degrés sous forme décimale en arrondissant au dix-millième de degré près.

- $37^\circ 41'$
- $83^\circ 17'$
- $115^\circ 26' 27''$
- $258^\circ 39' 52''$

B) Exprimer l'angle en degrés, minutes et secondes, en arrondissant à la seconde près.

- $63,169^\circ$
- $12,864^\circ$
- $310,6215^\circ$
- $81,7138^\circ$

Exercice 7.2 Refaire l'exercice précédent en utilisant les touches DD et DMS de la calculatrice.

Exercice 7.3

- Transformer les coordonnées géographiques de la gare de Lausanne en degrés décimaux :

$$46^\circ 31' 04,9'' \text{ N} / 06^\circ 37' 45,22'' \text{ E}$$

- Transformer les coordonnées géographiques de la statue de la Liberté en DMS :

$$46,689253^\circ \text{ N} / 74,044548^\circ \text{ O}$$

Exercice 7.4 Les angles suivants sont donnés par leur mesure en radians. Calculer leur mesure en degrés.

- a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{10}$ d) 4π e) $-\frac{5\pi}{6}$ f) $\frac{15\pi}{4}$

Exercice 7.5 Les angles suivants sont donnés par leur mesure en radians. Calculer, en valeur exacte, leur mesure en degrés, puis leur valeur approximative et vérifier à l'aide de la touche DRG de la calculatrice.

- a) 1 b) -2 c) 3

Exercice 7.6 Les angles suivants sont donnés par leur mesure en degré. Calculer, en valeur exacte, leur mesure en radians.

- a) 45° b) 60° c) 75° d) -30° e) 120° f) 315°

Exercice 7.7 Les angles suivants sont donnés par leur mesure en degré. Calculer leur mesure en radians. (Précision au dix-millième de degré)

- a) $22,7^\circ$ b) $-107,9^\circ$ c) $292,3^\circ$ d) $152,5^\circ$

Exercice 7.8 L'angle au sommet d'un triangle isocèle mesure 72° . Calculer la mesure exacte, en radians, des angles de ce triangle.

12.8 Arcs et secteurs

Exercice 8.1 Le rayon d'un cercle mesure 24 cm. Calculer la longueur de l'arc et la surface du secteur circulaire défini par un angle au centre de 20° .

Exercice 8.2 On considère un cercle de rayon 24 cm. Calculer la longueur de l'arc sous-tendu par un angle au centre de mesure :

- a) $\frac{2}{3}$ rad b) $\frac{3\pi}{r}$ rad c) 75° d) 130°

Exercice 8.3

- a) Calculer le rayon d'un cercle pour lequel un arc de 3 m correspond à l'angle au centre $\alpha = 20^\circ$.
b) Calculer l'angle au centre α en degré dans un cercle de rayon 2 m pour que l'aire du secteur circulaire correspondant soit de 5 m^2 .

Exercice 8.4 Calculer, en valeur exacte, la mesure en radian de l'angle au centre d'un cercle de rayon 4 qui sous-tend un arc de cercle de longueur 7.

Exercice 8.5 Un vendeur vend deux tailles de tranches de pizza :

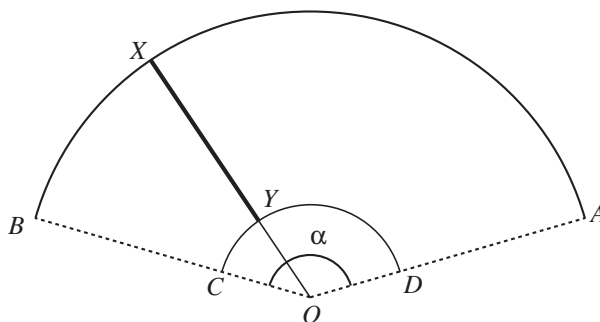
- La première tranche est le $\frac{1}{6}$ d'une pizza ronde de 46 cm de diamètre et il la vend à 6 francs.
- La deuxième tranche est le $\frac{1}{8}$ d'une pizza ronde de 66 cm de diamètre et il la vend à 9 francs.

Quelle est la tranche qui fournit le plus de pizza pour un franc ?

Exercice 8.6 Quelle distance parcourt-on avec un vélo muni de roues de 32 cm de rayon si :

- les roues font exactement un tour ?
- les roues font un demi-tour ?
- les roues font un tiers de tour ?
- les roues font deux tours ?

Exercice 8.7 Un essuie-glace mesure 40 cm de long (de son point de rotation O à son extrémité X) et balaie sur une longueur de 30 cm (entre les points X et Y).



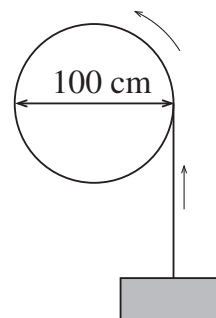
On suppose que l'angle d'oscillation mesure $\alpha = 140^\circ$.

- Calculer la longueur (en cm, arrondi au mm près) de l'arc parcouru par l'extrémité X du balai d'essuie-glace durant une oscillation de gauche à droite.
- Calculer l'aire (en cm^2 , arrondi au mm^2 près) de la surface $ABCD$ balayée par l'essuie-glace XY .

Exercice 8.8

Un grand treuil de 100 cm de diamètre est utilisé pour hisser un chargement comme le montre la figure ci-contre.

- Trouver sur quelle distance (arrondie au mm près) le chargement est soulevé si le treuil tourne de 105° .
- Trouver de quel angle (arrondi au dixième de degré près) il faut tourner le treuil pour soulever la charge de 50 cm.



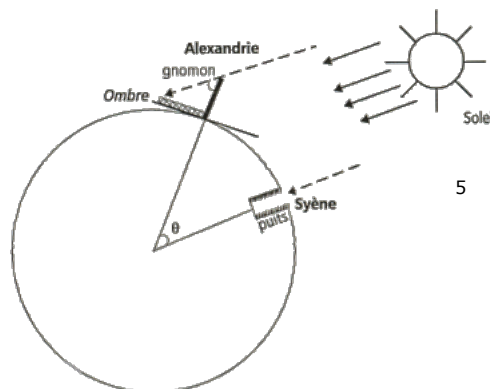
Exercice 8.9 Le balancier de l'horloge de grand-père mesure 1,5 m de long. L'extrémité du balancier parcourt un arc de longueur 40 cm lors d'une oscillation de gauche à droite.

Calculer l'angle (arrondi à $0,1^\circ$ près) parcouru par le balancier lors d'une oscillation de gauche à droite.

Applications géographiques

Exercice 8.10

Erastosthène (276-196 avant J-C) était bibliothécaire d'Alexandrie. Il disposait de tous les renseignements sur les événements curieux observés dans l'empire d'Alexandrie. C'est ainsi qu'il apprit qu'un certain jour de l'année, le soleil se réfléchissait à midi dans l'eau d'un puits profond de Syène (aujourd'hui Assouan). À ce moment, le soleil était donc à la verticale du puits. Le même jour à midi, dans la ville d'Alexandrie située à 800 km au Nord, l'ombre d'un pilier (appelé gnomon) permettait de déterminer que le Soleil était à $7,2^\circ$ de la verticale.



Cela veut dire que si l'on considère que les rayons du soleil sont parallèles, les rayons de la sphère terrestre aboutissant à Syène et à Alexandrie forment un angle de $7,2^\circ$ et interceptent un arc dont la longueur est de 800 km.

Utiliser ces renseignements pour calculer le rayon et la circonférence de la terre comme le fit Eratosthène.

Pour les exercices qui suivent, on utilisera un rayon terrestre de 6370 km.

Exercice 8.11 Deux points situés sur un même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de $1,5^\circ$. Quelle est la distance (à 0,1 km près) à vol d'oiseau entre ces deux points ?

Exercice 8.12 Sion et Delémont se trouvent sur le même méridien terrestre. Leur distance à vol d'oiseau est de 123 km. Sachant que Delémont est au Nord de Sion et que la latitude de Sion est de $46^\circ 14' N$, déterminer celle de Delémont (à la minute près).

Exercice 8.13 Les coordonnées géographiques du gymnase d'Yverdon sont $46^\circ 46' 49'' N / 006^\circ 39' 59'' E$. A quelle distance à vol d'oiseau le gymnase se trouve-t-il du Pôle Nord ? (précision 10^{-2} km)

Exercice 8.14 La distance à vol d'oiseau entre Lausanne et Genève est de 50 km. Quel est l'angle formé par la verticale à Lausanne avec la verticale à Genève ?
Donner la réponse tout d'abord au millième de degré près, puis en degrés sexagésimaux, à la seconde près.

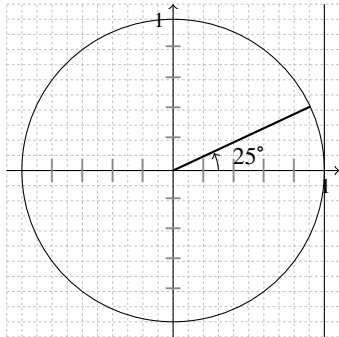
Exercice 8.15 Le mille marin (M) correspond à la distance séparant deux points situés sur le même méridien terrestre et qui ont des latitudes qui diffèrent de $1'$.
Que vaut un mille marin en mètres ? (au cm près)

5. [http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc mat/pratique/textes/eratoste.htm](http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc%20mat/pratique/textes/eratoste.htm)

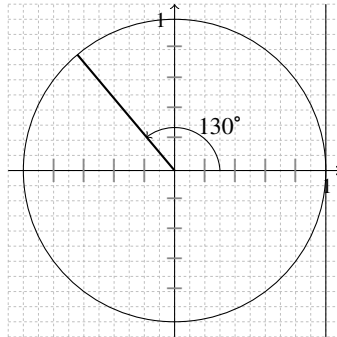
12.9 Cercle trigonométrique

Exercice 9.1 A l'aide du cercle trigonométrique, donner une bonne approximation des valeurs des rapports trigonométriques ($\cos$, $\sin$, $\tan$) des angles suivants :

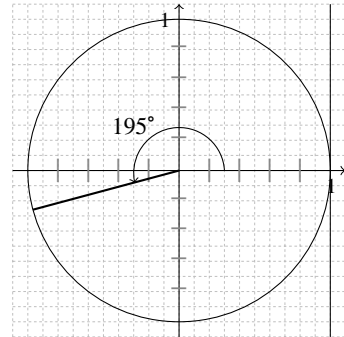
a) $\alpha = 25^\circ$



b) $\alpha = 130^\circ$

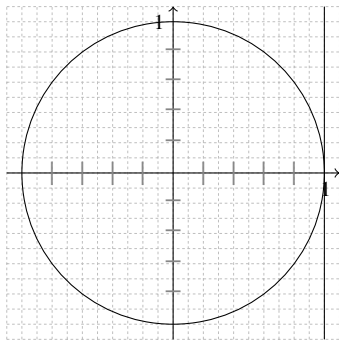


c) $\alpha = 195^\circ$

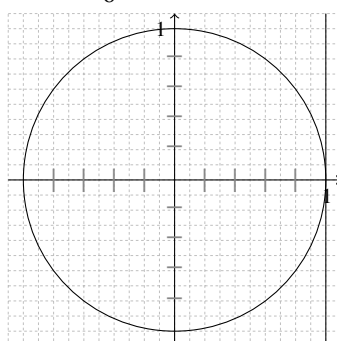


Exercice 9.2 A l'aide du cercle trigonométrique, donner une bonne approximation des valeurs des rapports trigonométriques ($\cos$, $\sin$, $\tan$) des angles en radians suivants :

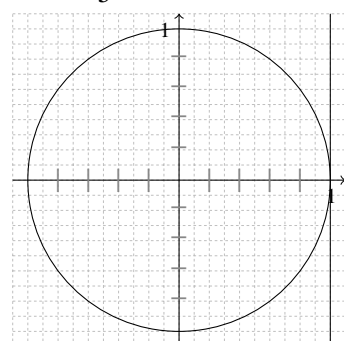
a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$



b) $\alpha = \frac{11\pi}{6}$

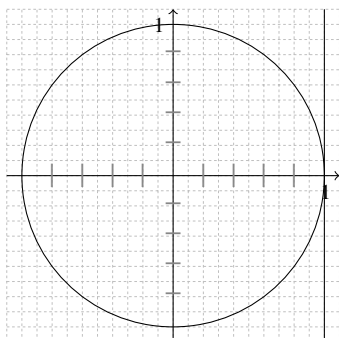


c) $\alpha = \frac{6\pi}{5}$

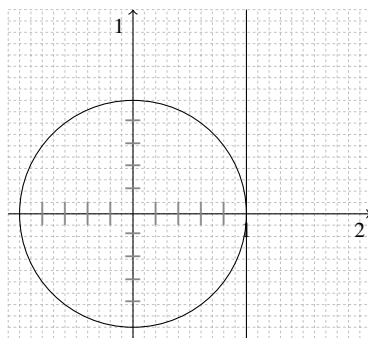


Exercice 9.3 Représenter dans le cercle trigonométrique les triangles équilatéraux et isocèles rectangles qui permettent de justifier les valeurs exactes des rapports trigonométriques ($\cos$, $\sin$, $\tan$) des angles en radians suivants. Donner ces valeurs exactes uniquement grâce aux dessins.

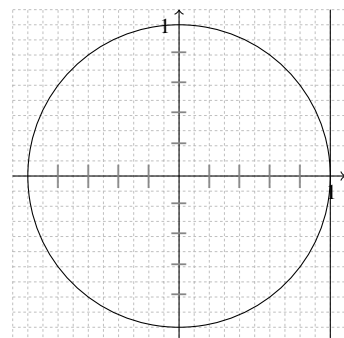
a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$



b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$

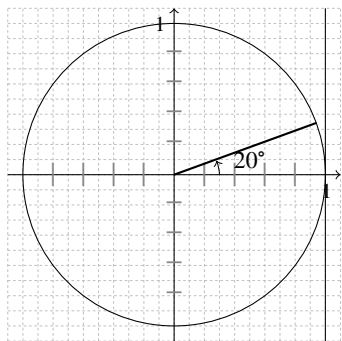


c) $\alpha = \frac{\pi}{6}$

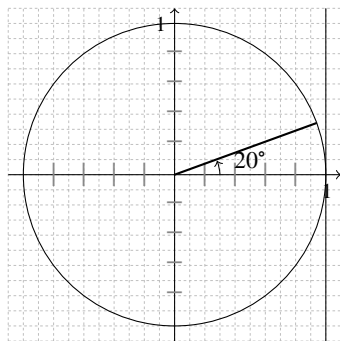


Exercice 9.4 Représenter l'angle demandé, donner les rapports trigonométriques des deux angles et les comparer. Expliquer le pourquoi de ce que l'on peut observer.

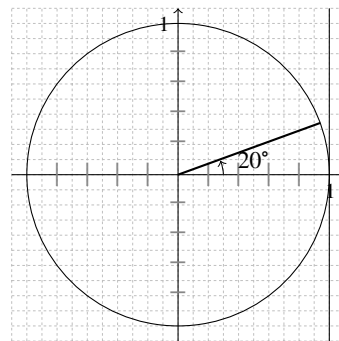
a) $\alpha = 160^\circ$



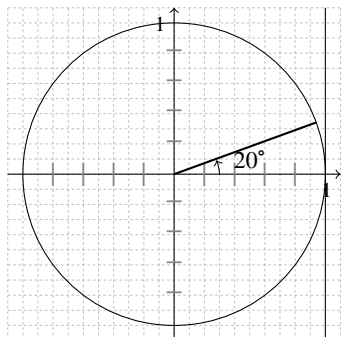
c) $\alpha = 200^\circ$



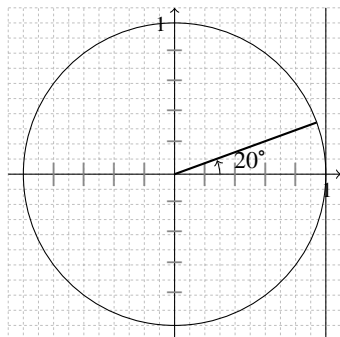
e) $\alpha = 70^\circ$ (sauf tan)



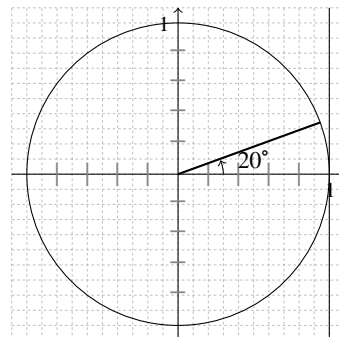
b) $\alpha = 340^\circ$



d) $\alpha = 110^\circ$ (sauf tan)

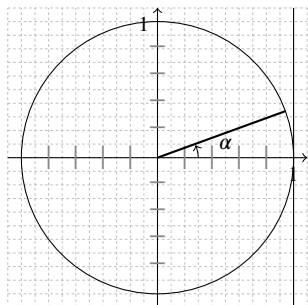


f) $\alpha = 740^\circ$

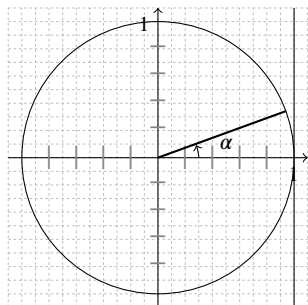


Exercice 9.5 Soit l'angle α donné en radians. Représenter l'angle β demandé.

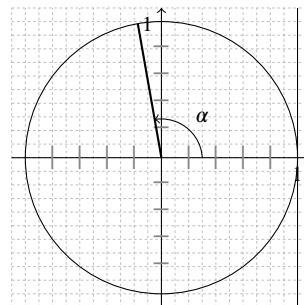
a) $\beta = \pi + \alpha$



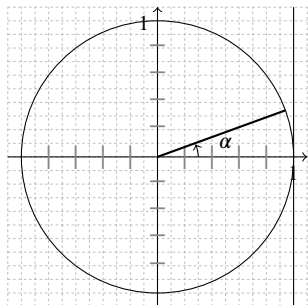
c) $\beta = -\alpha$



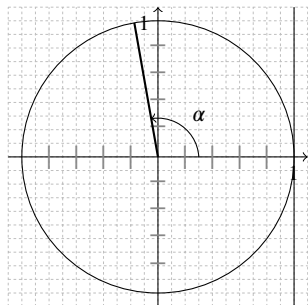
e) $\beta = \pi - \alpha$



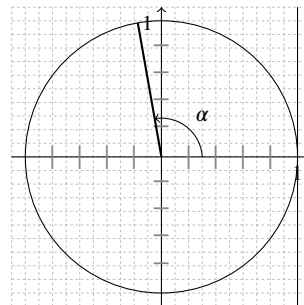
b) $\beta = \pi - \alpha$



d) $\beta = \pi + \alpha$



f) $\beta = -\alpha$



Exercice 9.6 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier dans chaque cas à l'aide d'un petit cercle trigonométrique.

a) $\sin(10^\circ) = \sin(170^\circ)$

c) $\cos(70^\circ) = \sin(20^\circ)$

e) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\cos(140^\circ) = -\cos(40^\circ)$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

f) $\tan(40^\circ) = \tan(220^\circ)$

Exercice 9.7 Soit un angle α . Exprimer en fonction de α tous les angles β tels que :

a) $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$

c) $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$

e) $\sin(\alpha) = -\sin(\beta)$

b) $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$

d) $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$

f) $\tan(\alpha) = -\tan(\beta)$

Exercice 9.8 Compléter ce tableau sans machine à calculer, en notant les valeurs exactes.

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
120°			
$-\frac{\pi}{3}$			
945°			
$-\frac{5\pi}{6}$			
270°			
6π			

12.10 Équations trigonométriques simples

Exercice 10.1 Calculer les solutions, comprises entre 0° et 360° des équations trigonométriques suivantes.

a) $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}$

c) $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$

e) $\sin(\alpha) = 0$

b) $\cos(\alpha) = -0,9$

d) $\tan(\alpha) = -2$

f) $\cos(\alpha) = 1,4$

Exercice 10.2 Calculer les solutions, comprises entre -180° et 180° des équations trigonométriques suivantes.

a) $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$

b) $\cos(\alpha) = 0,3$

c) $\sin(\alpha) = 0,92$

d) $\cos(\alpha) = 0,83$

Exercice 10.3 Calculer les solutions, comprises entre 0 et 2π des équations trigonométriques suivantes.

a) $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$

b) $\tan(\alpha) = \sqrt{2}$

c) $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\sin(\alpha) = 0,4$

Exercice 10.4 Résoudre en radians les équations trigonométriques suivantes.

a) $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ b) $\tan(\alpha) = \sqrt{2}$ c) $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sin(\alpha) = 0,4$

Exercice 10.5 Résoudre en radians les équations trigonométriques suivantes.

a) $\sin(2\alpha) = \frac{1}{2}$ b) $\tan(3\alpha) = \sqrt{2}$ c) $\cos(4\alpha) = \frac{1}{2}$ d) $\sin(5\alpha) = -1$

12.11 Résolution de triangles quelconques

Exercice 11.1 Résoudre les triangles ABC suivants à l'aide du théorème du cosinus (sauf l'aire).

a) $a = 7$ $b = 9$ $\gamma = 35^\circ$
 b) $a = 13,4$ $b = 9,7$ $c = 8,1$
 c) $a = 57,89$ $b = 10,48$ $\beta = 7,26^\circ$

Exercice 11.2 Soit un triangle ABC avec $c = 6$ et $\alpha = 30^\circ$. Calculer b à l'aide du théorème du cosinus et faire à la construction pour comparer. Expliquer le nombre de solutions obtenues dans chaque cas.

a) $a = 2$ b) $a = 3$ c) $a = 4$ d) $a = 6$ e) $a = 7$

Exercice 11.3 Calculer l'aire des triangles de l'exercice 11.1.

Exercice 11.4 Résoudre les triangles ABC suivants à l'aide du théorème du sinus.

a) $a = 10$ $\alpha = 85^\circ$ $\gamma = 40^\circ$
 b) $a = 85,67$ $\beta = 123,18^\circ$ $\gamma = 24,54^\circ$
 c) $c = 78,54$ $\alpha = 67,66^\circ$ $\beta = 85,93^\circ$

Exercice 11.5 Calculer les angles des triangles ABC suivants.

a) $a = 4$ $b = 9$ $c = 10$
 b) $a = 60$ $b = 94$ $c = 38$
 c) $a = 68,87$ $b = 35,57$ $c = 81,46$

Exercice 11.6 Résoudre les triangles ABC suivants.

a) $a = 70,24$ $b = 82,12$ $\gamma = 30,69^\circ$
 b) $a = 20,46$ $\beta = 58,25^\circ$ $\gamma = 39,38^\circ$
 c) $a = 98,06$ $b = 364,04$ $\beta = 30,65^\circ$
 d) $a = 85,80$ $c = 57,29$ $\beta = 117,81^\circ$

Exercice 11.7 Soit le parallélogramme $ABCD$. On a $AB = 30$ cm, $BC = 20$ cm et $\beta = 60^\circ$.

Calculer la longueur des diagonales AC et BD , ainsi que l'angle aigu θ qu'elles forment entre elles.

Exercice 11.8 Soit un quadrilatère convexe $ABCD$ dont on connaît l'angle $\alpha = 110^\circ$ ainsi que les longueurs de ses quatre côtés : $AB = 3$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 6$ cm et $DA = 5$ cm.

Que peut-on dire sur le triangle BCD ? Utiliser cette observation pour calculer l'aire et les angles du quadrilatère.

13 Solutions

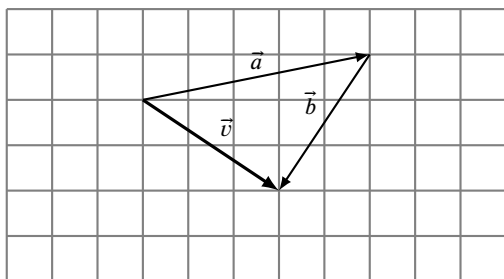
13.1 Vecteurs

1.1 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AF}$ $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FA}$ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{FE}$	$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{EF}$ $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD}$ $= \overrightarrow{EE} = \overrightarrow{FF} = \overrightarrow{OO}$
--	---	--

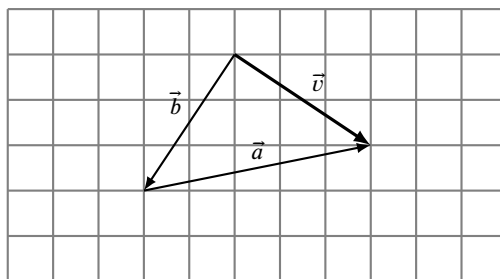
1.2 a) faux b) vrai c) vrai d) faux e) vrai f) vrai g) vrai

1.3 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{ED}$	$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DE}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD}$ $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DF}$	$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD}$ $= \overrightarrow{EE} = \overrightarrow{FF}$
--	---	--

a) $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$

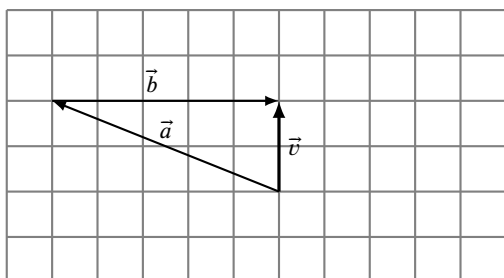


$\vec{v} = \vec{b} + \vec{a}$

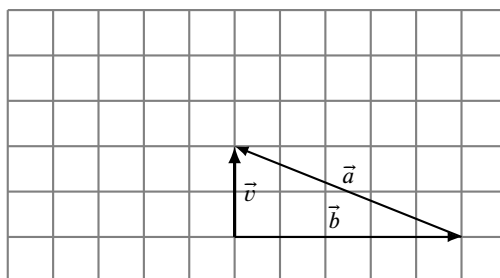


1.4

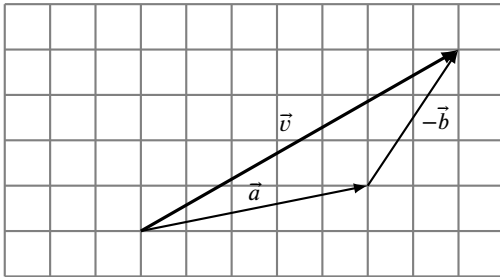
b) $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$



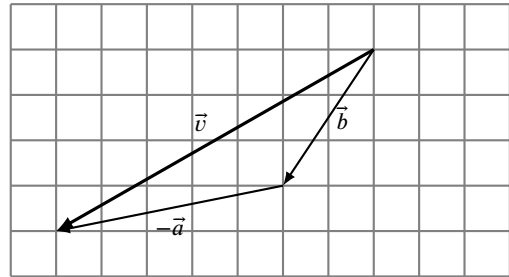
$\vec{v} = \vec{b} + \vec{a}$



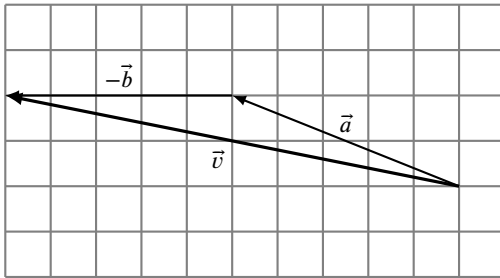
c) $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$



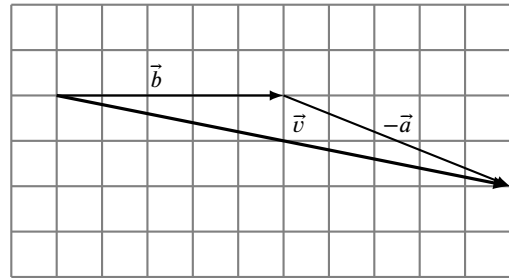
$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$



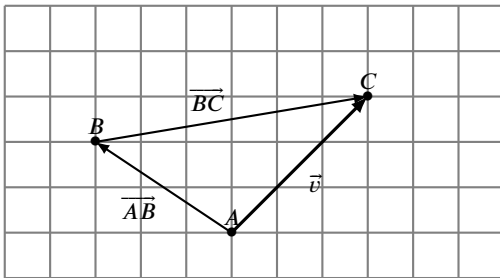
d) $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$



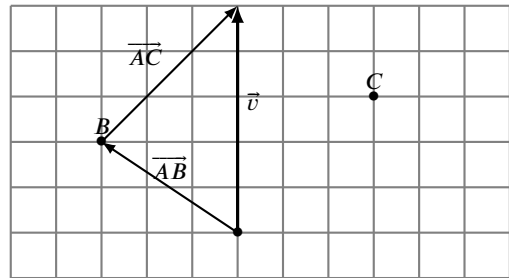
$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$



e) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

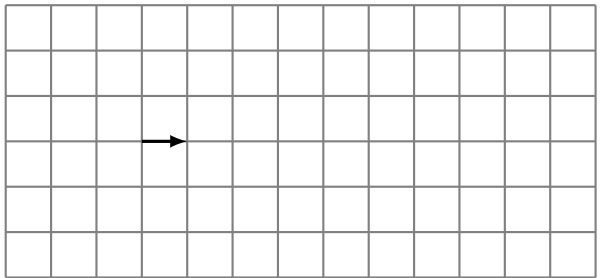


$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

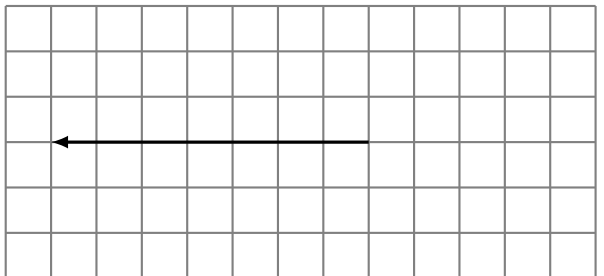


1.5

a)

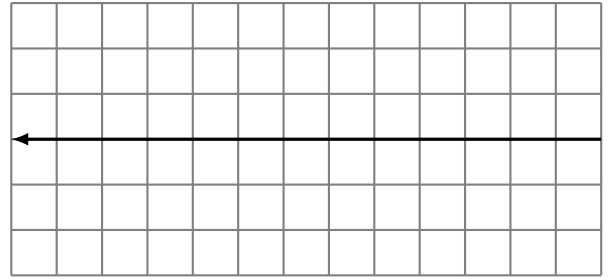
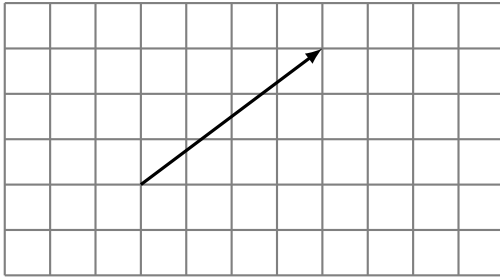


b)

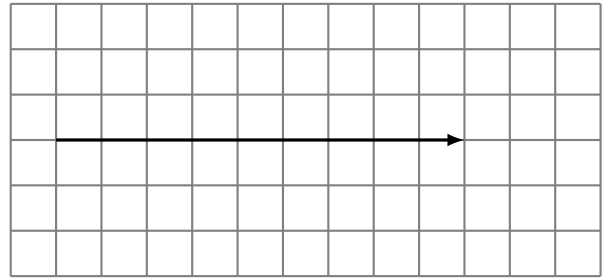
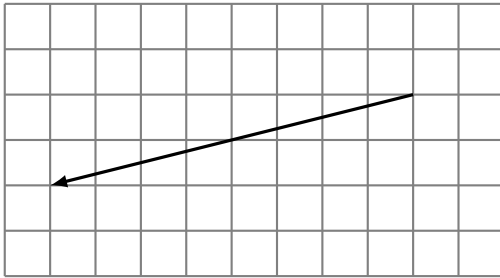


1.5

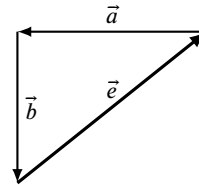
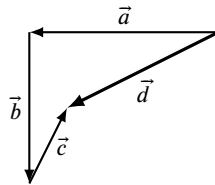
c)



d)



1.6



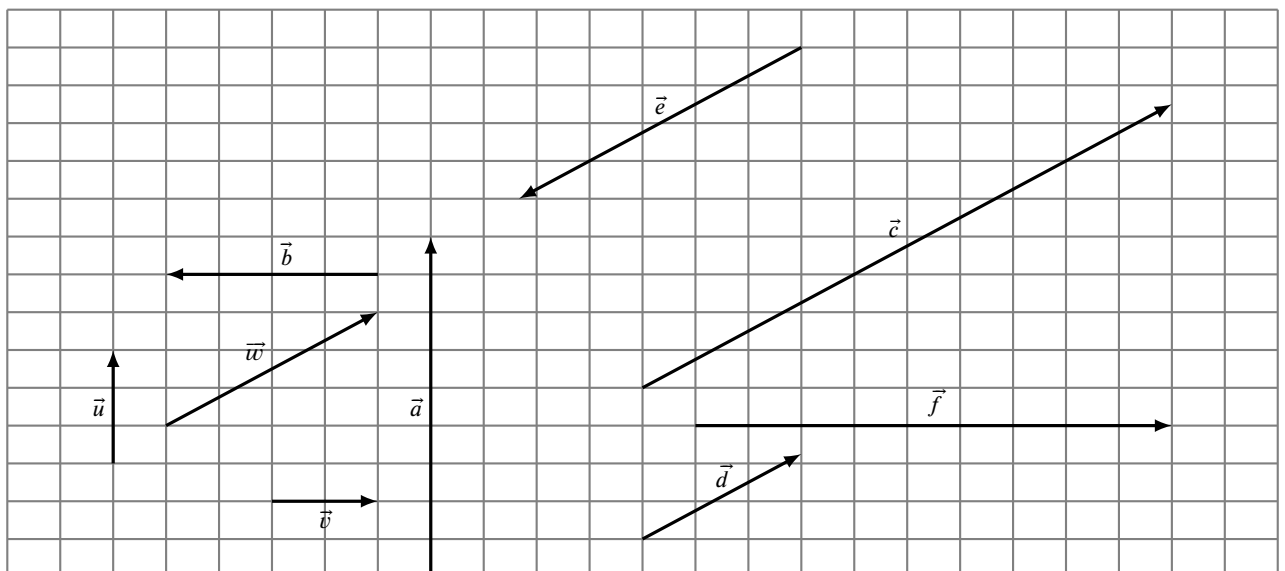
1.7

a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ d) $\vec{0}$

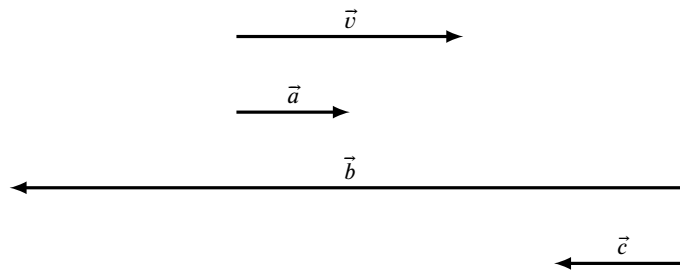
1.8

a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AH}$ c) $\overrightarrow{HA}$ d) $\overrightarrow{EA}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{AE}$

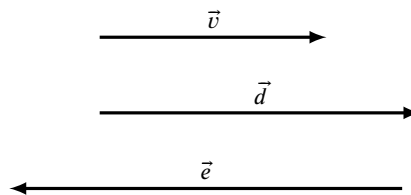
1.9



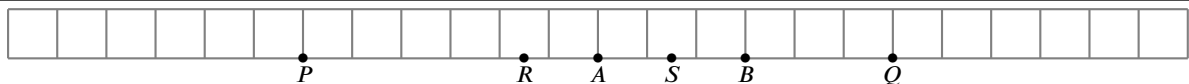
1.10



1.11



1.12



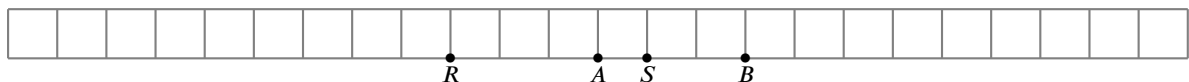
$$\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AR}$$

$$\overrightarrow{AR} = -\overrightarrow{AB}$$

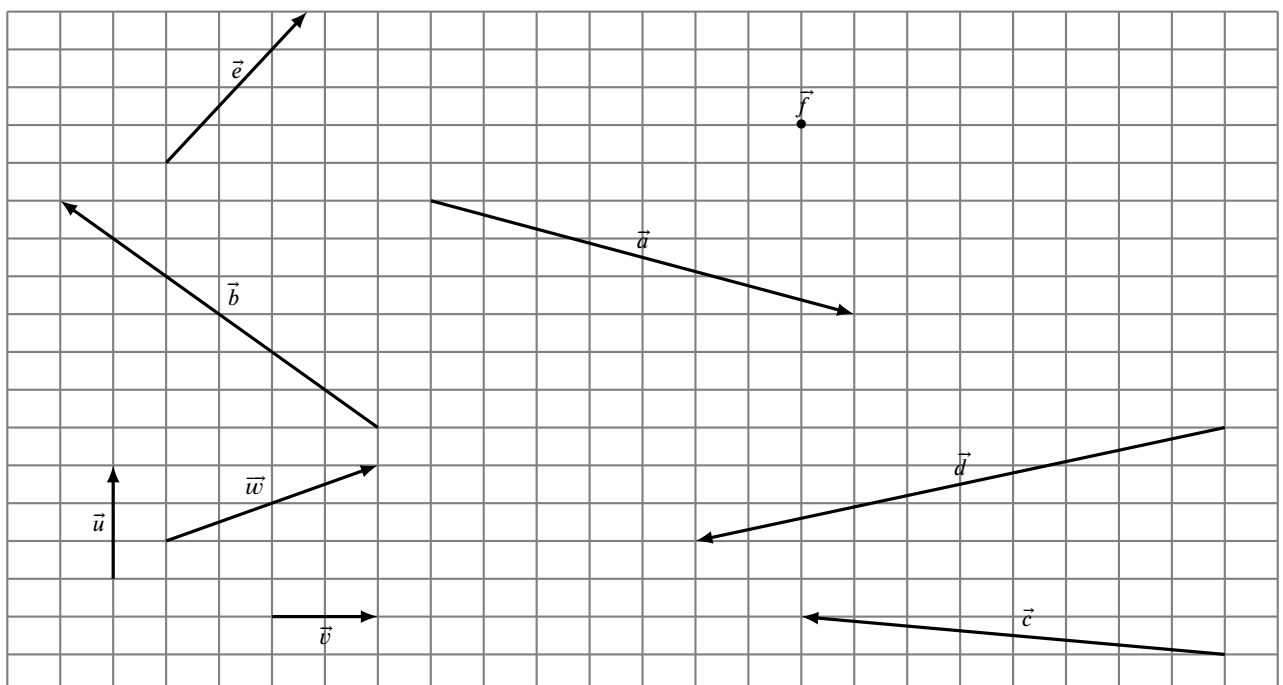
$$\overrightarrow{SA} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

1.13



1.14



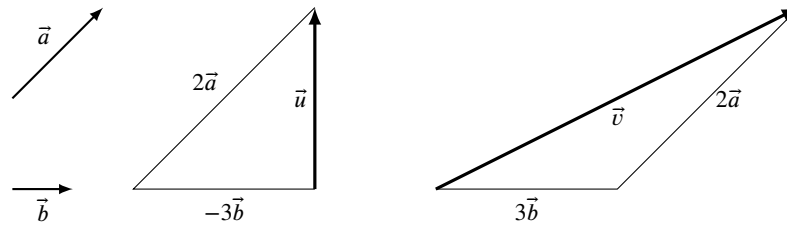
$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{w} = \frac{7}{6}\vec{b}$$

$$\vec{a} = 2\vec{v} - \frac{4}{7}\vec{w}$$

1.16



1.17

a) $\vec{c} = 6\vec{a} - 2\vec{b}$

b) $\vec{x} = 2\vec{a} + 6\vec{b}$

c) $\vec{a} = -\frac{1}{8}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}$

$\vec{d} = -\vec{a} - \vec{b}$

$\vec{b} = -\frac{1}{8}\vec{c} - \frac{3}{4}\vec{d}$

1.18

a) 86,60 km/h

b) $\alpha = 30^\circ$

1.19

a) $\sim 17^\circ$

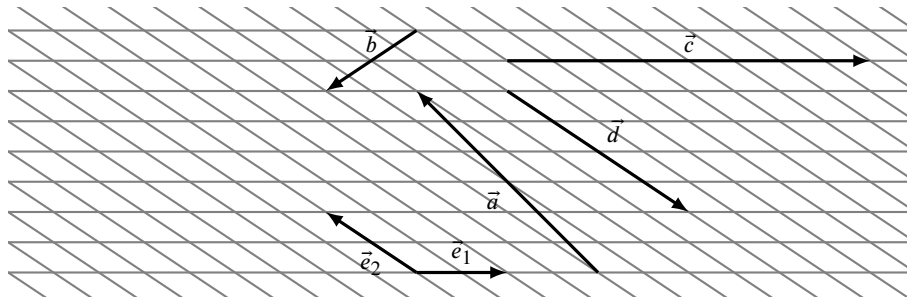
b) ~ 46 km/h

13.2 Bases

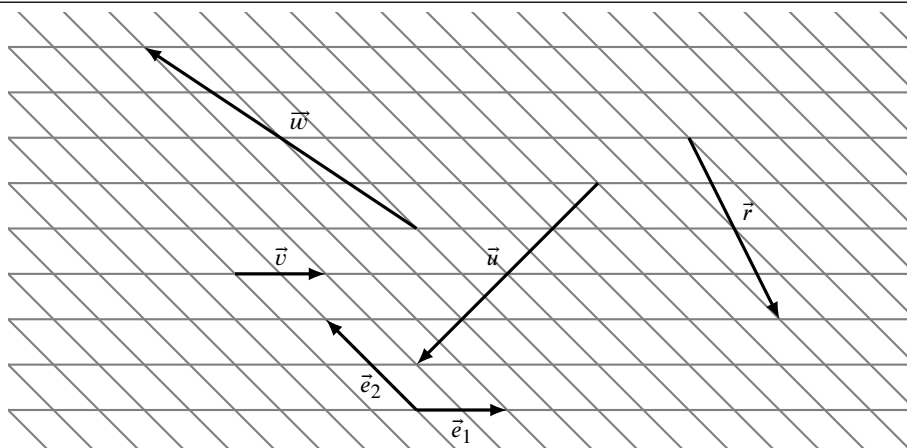
2.1



2.2



2.3



$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.4

$$\text{a) } \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.5

$$\text{a) } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.6

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} -41 \\ 27 \end{pmatrix}$$

2.7

$$\text{a) } k=3$$

$$m=2$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

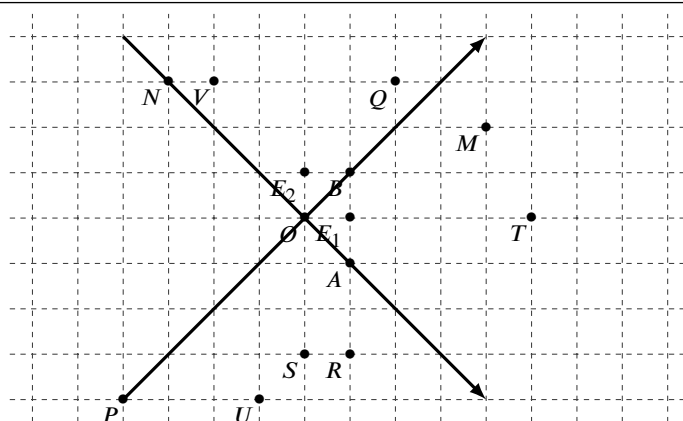
$$2.8 \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{d} = -9\vec{h} \quad \vec{b} = -\frac{3}{2}\vec{i} \quad \vec{c} = -2\vec{g} \quad \vec{e} = 0\vec{a} = 0\vec{b} = \dots = 0\vec{i}$$

$$2.9 \quad \text{a) } m = -14 \quad \text{b) } m = 3$$

$$2.10 \quad \text{a) } m = 1 \text{ ou } m = 3 \quad \text{b) } m = -2 \text{ ou } m = 6 \quad \text{c) } m = -1 \text{ ou } m = 3 \quad \text{d) } m \in \mathbb{R}$$

13.3 Repères et coordonnées

3.1



$$M(1;3)$$

$$N(-3;0)$$

$$P(0;-4)$$

$$Q(-\frac{1}{2};\frac{5}{2})$$

$$R(2;-1)$$

$$S(\frac{3}{2};-\frac{3}{2})$$

$$T(\frac{5}{2};\frac{5}{2})$$

$$U=(\frac{3}{2};-\frac{5}{2})$$

$$V(-\frac{5}{2};\frac{1}{2})$$

3.2

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{h) } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.3

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} -19 \\ -30 \end{pmatrix}$$

3.4

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } B(5;-3)$$

$$\text{d) } A(7;-6)$$

3.5

$$A(4;-4)$$

$$B(2;3)$$

$$C(1;-2)$$

$$D(-2;-4)$$

3.6

$$\text{a) } D(-8;4)$$

$$\text{b) } D(10;6)$$

3.7

$$C(-27;-1)$$

$$D(-1;\frac{10}{3})$$

$$L(-12;\frac{3}{2})$$

$$R(\frac{3}{7};\frac{25}{7})$$

3.8

$$A(3;-2)$$

3.9 a) $M'(5;6)$ b) $M''(-4;-10)$ c) $M'''(9;-25)$.

3.10 $P(1;3)$ $Q(-3;0)$.

3.11 oui, car $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$

3.12 a) $k=5$ b) $k=1$ ou $k=\frac{32}{7}$

3.13 a) $M(2; \frac{7}{2})$ b) $A(7;-12)$ c) $B(1;-8)$

3.14 $M(\frac{19}{2}; 2)$ $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ $Z(7; \frac{1}{3})$.

Le point Z est le centre de gravité du triangle ABC , c'est le point d'intersection des 3 médianes.

3.15 a) $G(\frac{1}{3}; \frac{16}{3})$ b) $G(\frac{13}{3}; -1)$ c) $C(5;7)$ d) $B(-6;-40)$

3.16 a) $M(5;5)$ $R(3;8)$ $S(-1;1)$ $T(1;-2)$
 c) Il faut montrer que $\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{SR}$ ou que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{TS}$

3.17 $C(7;10)$ et $D(3;3)$

3.18 $C(14;5)$ On peut utiliser $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ ou $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ avec M point milieu des diagonales.

3.19 $C_1(5;0)$ $C_2(7;2)$ $C_3(9;4)$ $C_4(11;6)$ $C_5(13;8)$ $C_6(15;10)$ $C_7(17;12)$
 On trouve C_1 grâce à l'équation $8\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB}$ ou on utilise la formule du milieu d'un segment plusieurs fois.

13.4 Normes

a) $\|\vec{a}\| = 4$ $\|\vec{b}\| = 3$ $\|\vec{c}\| = \sqrt{73}$ $\|\vec{d}\| = 13$ $\|\vec{e}\| = \frac{13}{2}$ $\|\vec{f}\| = 130$
4.1 b) On a $\vec{e} = \frac{1}{2}\vec{d}$ et $\|\vec{e}\| = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{d}\|$ et $\vec{f} = 10\vec{d}$ et $\|\vec{f}\| = 10 \cdot \|\vec{d}\|$.
 c) $\|\vec{a} + \vec{b}\| = 5 < 7 = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

$\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\| = 24$ $\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| = \sqrt{82}$ $\| -2\vec{a} \| + \| 2\vec{a} \| = 20$

4.2 $\|\vec{a}\| \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ $\left\| \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} \right\| = 1$

4.3 $k=7$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ ou $k=-5$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

4.4 $m = -\frac{23}{5}$ ou $m = 3$

4.5 $18 + 2\sqrt{17} \approx 26,25$

4.6 $\|\vec{AC}\| = \|\vec{BC}\| = \sqrt{146}$ Aire = 48

4.7 $r = \|\vec{IA}\| = \|\vec{IB}\| = \|\vec{IC}\| = 5$

4.8 $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ $\|\vec{BC}\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ $\|\vec{AC}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
 On a $\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2$. Vu Pythagore, le triangle est rectangle en B .

4.9 a) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -\frac{28}{5} \\ \frac{21}{5} \end{pmatrix}$

4.10 $\vec{a}_u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\vec{b}_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{c}_u = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ $\vec{d}_u = \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{89}} \\ -\frac{5}{\sqrt{89}} \end{pmatrix}$

4.11 $P_1(11;7)$ et $P_2(29;-17)$.

13.5 Produit scalaire

5.1 a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \frac{120}{13} \\ -\frac{50}{13} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -\frac{120}{13} \\ \frac{50}{13} \end{pmatrix}$

5.2 $B(10;0)$ $D(-2;12)$

5.3 a) $C(9;-4)$ et $D(8;2)$ ou $C(-3;-6)$ et $D(-4;0)$ b) $P(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2})$ et $Q(\frac{11}{2};-\frac{3}{2})$

5.4 $B(2;7)$ ou $B'(-18;-3)$

5.5 a) Non, car $\vec{a} \bullet \vec{b} = -1$. d) Non, car $\vec{a} \bullet \vec{b} = \frac{9}{4}$.
 b) Oui, car $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$. e) Non, car $\vec{a} \bullet \vec{b} = -1$.
 c) Oui, car $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$. f) Oui, car $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$.

5.6 $\vec{AB} \bullet \vec{BC} = 0$ $D(-6;1)$

- 5.7** En calculant les produits scalaires, on montre que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.
Le quadrilatère a bien deux angles droits, en A et en B . C'est donc un trapèze rectangle.

- 5.8**
- | | | |
|--|--|---------------------|
| a) $\begin{pmatrix} 14 \\ -4 \end{pmatrix}$ | c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ou un autre nombre) | e) Pas de solution. |
| b) $\begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ | d) $m = \frac{2}{9}$ | f) $m = 3$ |

- 5.9**
- | | | |
|-------------------|-------------------|--|
| a) $\lambda = 10$ | b) $\lambda = -5$ | c) $\lambda = -2$ ou $\lambda = \frac{5}{2}$ |
|-------------------|-------------------|--|

- 5.10**
- | | | | |
|-------------------------|-------|--|-------------------------|
| a) 102 | d) 36 | g) $\begin{pmatrix} 55 \\ -11 \end{pmatrix}$ | h) Ce n'est pas défini. |
| b) 102 | e) -1 | | |
| c) Ce n'est pas défini. | f) -1 | | |

- 5.11**
- | |
|--|
| a) $a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = 0$ |
| b) $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2$ |
| c) $a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2) + (a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2)$ |
| d) $k(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2) = k \cdot a_1 \cdot b_1 + k \cdot a_2 \cdot b_2$ |
| e) $a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 = a_1^2 + a_2^2 = \ \vec{a}\ ^2$ |

- 5.12** $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{31}{\sqrt{1690}}\right) \approx 41,05^\circ$ $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-5}{\sqrt{1885}}\right) \approx 100,49^\circ$ $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{34}{\sqrt{754}}\right) \approx 38,45^\circ$

- 5.13** a) $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{5} \implies$ Il est isocèle en C b) $A\hat{C}D = D\hat{C}B = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{90}}\right) \approx 18,43^\circ$

5.14 14

5.15 18

5.16 $\frac{79}{2}$

13.6 Rapports trigonométriques

- 6.1** Vérifier grâce aux touches sin, cos et tan de la calculatrice.

- 6.2** Vérifier grâce aux touches sin, cos et tan de la calculatrice.

- 6.3** Vérifier grâce à la touche $\tan^{-1}$ de la calculatrice.

6.4 Vérifier grâce à la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice.

6.5 C'est impossible.

6.6	a) $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{8}}{3}$	d) $\sin(90 - \alpha) = \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
	b) $\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cos(90 - \alpha) = \sin(\alpha) = \frac{1}{2}$
	c) $\sin(90 - \alpha) = \cos(\alpha) = \frac{1}{3}$	$\tan(90 - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$

6.7	a) $x \simeq 35,68^\circ$	c) $x \simeq 33,20^\circ$	e) $x = 30^\circ$
	b) $x \simeq 18,52^\circ$	d) $x \simeq 32,95^\circ$	f) pas de solution

6.8	a) $a = 1,65, b = 3,92, \alpha = 22,80^\circ, \mathcal{A} = 3,23$	c) $a = 60,39, c = 35,96, \gamma = 36,54^\circ, \mathcal{A} = 872,28$
	b) $a = 22,26, \alpha = 61,07^\circ, \gamma = 28,93^\circ, \mathcal{A} = 136,88$	d) $b = 51,8, \alpha = 64,52^\circ, \gamma = 25,48^\circ, \mathcal{A} = 521,82$

6.9 $a = 63,71, c = 49,98, \beta = 38,32^\circ, \gamma = 51,68^\circ$

6.10	a) $b = c = 32,56, \beta = \gamma = 68,75^\circ, \mathcal{A} = 358,06$	b) $b = c = 9,28, \alpha = 67,40^\circ, \mathcal{A} = 39,77$
-------------	--	--

6.11 $\sim 29,96$ m

6.12 $\sim 57,53$ m

6.13	a) 20%	b) $\sim 11,31^\circ$	c) ~ 102 m
-------------	--------	-----------------------	-----------------

6.14 $\sim 21,1$ m

6.15	a) $CD \simeq 878,55$ m et $AD \simeq 2'667,84$ m	b) $\sim 81,47^\circ$
-------------	---	-----------------------

6.16 $r \simeq 6,39$ m, $h \simeq 8,57$ m

6.17 $\sim 6'360'937,23$ m

6.18	a) $d \simeq 21,63$ m	b) $h \simeq 18,93$ m
-------------	-----------------------	-----------------------

6.19 $\sim 40,83$ m

6.20

angle	sin	cos	tan
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

6.21 a) 30° b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) 60° e) 45° f) 45°

13.7 Autres unités de mesure d'angles

7.1 a) $\sim 37,6833^\circ$ b) $\sim 83,2833^\circ$ c) $\sim 115,4408^\circ$ d) $\sim 258,6644^\circ$
 a) $\sim 63^\circ 10' 8''$ b) $\sim 12^\circ 51' 50''$ c) $\sim 310^\circ 37' 17''$ d) $\sim 81^\circ 42' 50''$

7.2 -

7.3 a) 46,51803 N / 6,629228 E b) $46^\circ 41' 21,3''$ N / $74^\circ 02' 40,3''$ O

7.4 a) 30° b) 120° c) 18° d) 720° e) -150° f) 675°

7.5 a) $\frac{180^\circ}{\pi}$ b) $-\frac{360^\circ}{\pi}$ c) $\frac{540^\circ}{\pi}$

7.6 a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{12}$ d) $-\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{2\pi}{3}$ f) $\frac{7\pi}{4}$

7.7 a) 0,3962 b) -1,8832 c) 5,1016 d) 2,6616

7.8 Mesure de l'angle au sommet : $72^\circ = \frac{2\pi}{5}$ Mesure des angles isométriques : $\frac{1}{2} \cdot \left(\pi - \frac{2\pi}{5} \right) = \frac{3\pi}{10}$

13.8 Arcs et secteurs

8.1 $L \simeq 8,38$ cm et $\mathcal{A} \simeq 100,53$ cm²

8.2 a) $\ell = 16$ cm b) $\ell = 3\pi$ cm c) $\ell = 10\pi$ cm d) $\ell = \frac{52\pi}{3}$ cm

8.3 a) $r \approx 8,59$ m b) $r \approx 143,24^\circ$

8.4 $\alpha = \frac{7}{4}$

8.5 La deuxième tranche.

8.6 a) $\sim 201,06$ cm b) $\sim 100,53$ cm c) $\sim 67,02$ cm d) $\sim 402,12$ cm

8.7 a) $\sim 97,7$ cm b) $\sim 1832,60$ cm²

8.8 a) $\sim 91,6$ cm b) $\sim 57,3^\circ$

8.9 $\sim 15,3^\circ$

8.10 $\sim 6366,2$ km

8.11 $\sim 166,8$ km

8.12 $47^\circ 20'$

8.13 $\sim 4805,06$ km

8.14 $\sim 0,450^\circ \simeq \sim 0^\circ 26' 59''$

8.15 $\sim 1852,96$ m

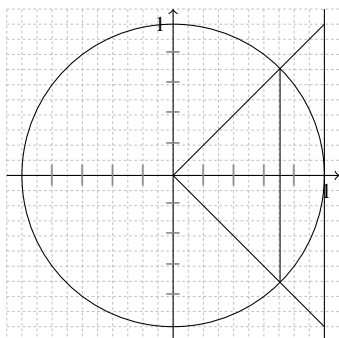
13.9 Cercle trigonométrique

9.1	a) $\cos(\alpha) \simeq 0,91$	b) $\cos(\alpha) \simeq -0,64$	c) $\cos(\alpha) \simeq -0,97$
	$\sin(\alpha) \simeq 0,42$	$\sin(\alpha) \simeq 0,77$	$\sin(\alpha) \simeq -0,26$
	$\tan(\alpha) \simeq 0,47$	$\tan(\alpha) \simeq -1,19$	$\tan(\alpha) \simeq 0,27$

9.2	a) $\cos(\alpha) \simeq 0,71$	b) $\cos(\alpha) \simeq 0,87$	c) $\cos(\alpha) \simeq -0,81$
	$\sin(\alpha) \simeq 0,71$	$\sin(\alpha) \simeq -0,5$	$\sin(\alpha) \simeq -0,59$
	$\tan(\alpha) \simeq 1$	$\tan(\alpha) \simeq -0,58$	$\tan(\alpha) \simeq 0,73$

9.3

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$

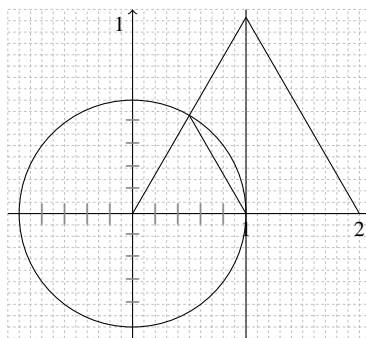


$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$

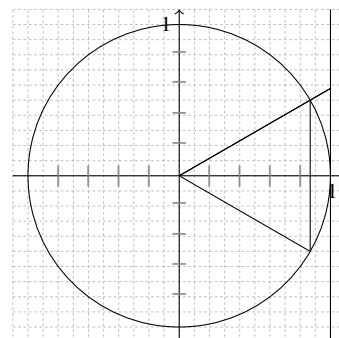


$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

c) $\alpha = \frac{\pi}{6}$



$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

9.4

a) $\cos(160^\circ) = -\cos(20^\circ) \simeq -0,94$

$$\sin(160^\circ) = \sin(20^\circ) \simeq 0,34$$

$$\tan(160^\circ) = -\tan(20^\circ) \simeq -0,36$$

symétrie d'axe Oy

b) $\cos(340^\circ) = \cos(20^\circ) \simeq 0,94$

$$\sin(340^\circ) = -\sin(20^\circ) \simeq -0,34$$

$$\tan(340^\circ) = -\tan(20^\circ) \simeq -0,36$$

symétrie d'axe Ox

c) $\cos(200^\circ) = -\cos(20^\circ) \simeq -0,94$

$$\sin(200^\circ) = -\sin(20^\circ) \simeq -0,34$$

$$\tan(200^\circ) = \tan(20^\circ) \simeq 0,36$$

symétrie de centre O ou rotation de 180°

d) $\cos(110^\circ) = -\sin(20^\circ) \simeq -0,34$

$$\sin(110^\circ) = \cos(20^\circ) \simeq 0,94$$

rotation de 90°

e) $\cos(70^\circ) = \sin(20^\circ) \simeq 0,34$

$$\sin(70^\circ) = \cos(20^\circ) \simeq 0,94$$

symétrie d'axe $y = x$

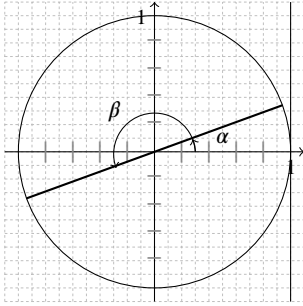
f) $\cos(740^\circ) = \cos(20^\circ) \simeq 0,94$

$$\sin(740^\circ) = \sin(20^\circ) \simeq 0,34$$

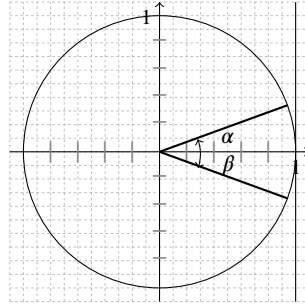
$$\tan(740^\circ) = \tan(20^\circ) \simeq 0,36$$

rotation de 2 tours complets ($2 \cdot 360^\circ$)

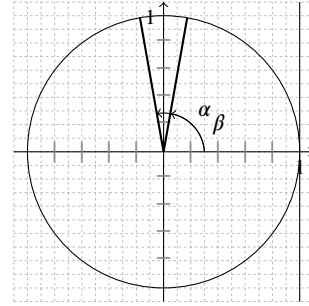
a) $\beta = \pi + \alpha$



c) $\beta = -\alpha$

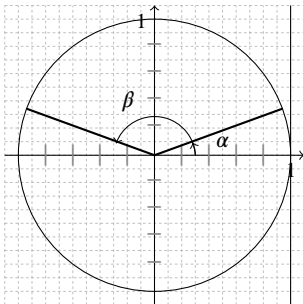


e) $\beta = \pi - \alpha$

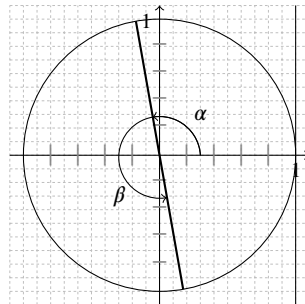


9.5

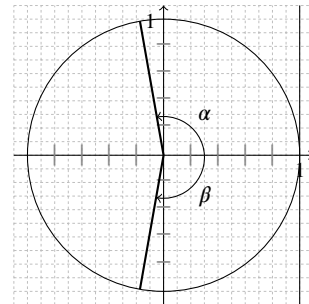
b) $\beta = \pi - \alpha$



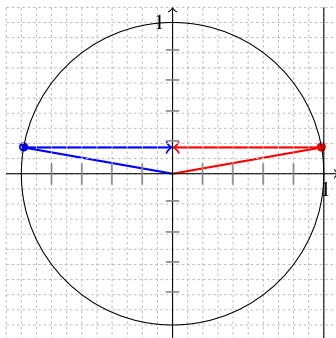
d) $\beta = \pi + \alpha$



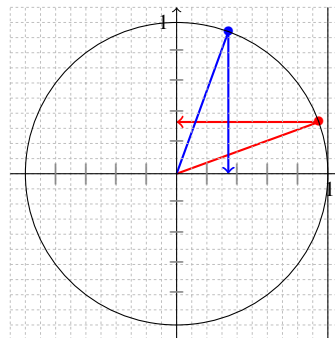
f) $\beta = -\alpha$



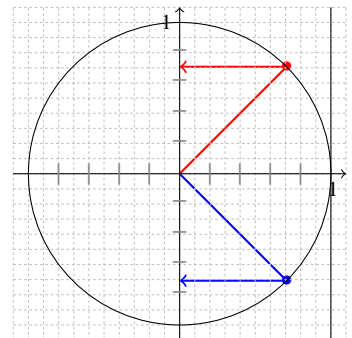
a) oui



c) oui

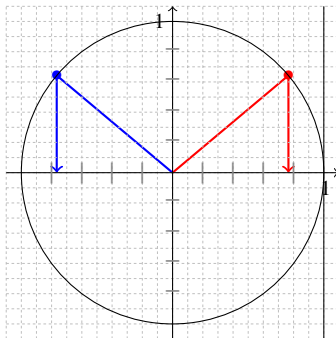


e) non

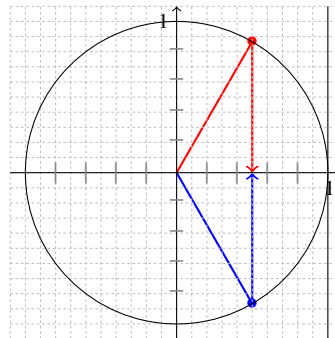


9.6

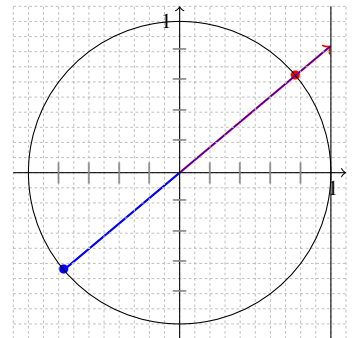
b) oui



d) non



f) oui



a) $\beta = \pm\alpha + k \cdot 2\pi$

d) $\beta = (\pi \pm \alpha) + k \cdot 2\pi$

9.7

b) $\beta = \alpha + k \cdot 2\pi$ et
 $\beta = (\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi$

e) $\beta = -\alpha + k \cdot 2\pi$ et
 $\beta = (\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi$

c) $\beta = \alpha + k \cdot \pi$

f) $\beta = -\alpha + k \cdot \pi$

9.8

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
120°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
945°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
270°	0	-1	/
6π	1	0	0

13.10 Équations trigonométriques simples

10.1

a) $S = \{19,47^\circ ; 160,53^\circ\}$

c) $S = \{60^\circ ; 300^\circ\}$

e) $S = \{0^\circ ; 180^\circ ; 360^\circ\}$

b) $S = \{154,16^\circ ; 205,84^\circ\}$

d) $S = \{116,57^\circ ; 296,57^\circ\}$

f) $S = \emptyset$

10.2

a) $S = \{26,57^\circ ; -153,43^\circ\}$

c) $S = \{66,93^\circ ; 113,07^\circ\}$

b) $S = \{72,54^\circ ; -72,54^\circ\}$

d) $S = \{33,90^\circ ; -33,90^\circ\}$

10.3

a) $S = \left\{ \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\}$

c) $S = \left\{ \frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} \right\}$

b) $S = \{0,955 ; 4,097\}$

d) $S = \{0,412 ; 2,730\}$

10.4

a) $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \forall k \in \mathbb{Z} ; \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $S = \left\{ \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \forall k \in \mathbb{Z} ; -\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $S = \{0,955 + k \cdot \pi \forall k \in \mathbb{Z}\}$

d) $S = \{0,412 + k \cdot 2\pi \forall k \in \mathbb{Z} ; 2,730 + k \cdot 2\pi \forall k \in \mathbb{Z}\}$

10.5

a) $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \forall k \in \mathbb{Z} ; \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $S = \left\{ \frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2} \forall k \in \mathbb{Z} ; -\frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2} \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $S = \left\{ 0,318 + k \cdot \frac{\pi}{3} \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) $S = \left\{ \frac{3\pi}{10} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \forall k \in \mathbb{Z} \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$

13.11 Résolution de triangles quelconques

11.1

a) $c = 5,18$

b) $\alpha = 97,26^\circ$

c) $c = 64,94$

$\alpha = 50,87^\circ$

$\beta = 45,90^\circ$

$\alpha = 44,23^\circ$

$\beta = 94,13^\circ$

$\gamma = 36,84^\circ$

$\gamma = 128,51^\circ$

a) impossible : Δ est négatif et le cercle ne coupe pas le 2^{ème} côté de l'angle.

b) $b = 5,20$, 1 solution : $\Delta = 0$ et le cercle est tangent au 2^{ème} côté de l'angle.

c) $b = 7,84$ ou $b = 2,55$, 2 solutions : Δ est positif et le cercle coupe le 2^{ème} côté de l'angle en 2 points.

11.2

d) $b = 10,39$, 1 solution : Δ est positif mais une des solutions est 0 et le cercle coupe le 2^{ème} côté de l'angle en 2 points dont un est A .

e) $b = 11,52$, 1 solution : Δ est positif mais une des solutions est négative et le cercle coupe le 2^{ème} côté de l'angle en 1 point.

11.3 a) 18,1 b) 39,0 c) 237,4

11.4	a) $\beta = 55^\circ$	b) $\alpha = 32,28^\circ$	c) $\gamma = 26,41^\circ$
	$b = 8,22$	$b = 134,26$	$a = 163,32$
	$c = 6,45$	$c = 66,62$	$b = 176,13$
	$\mathcal{A} = 26,4$	$\mathcal{A} = 2388,5$	$\mathcal{A} = 6397,6$

11.5	a) $\alpha = 23,56^\circ$	b) $\alpha = 20,76^\circ$	c) $\alpha = 56,98^\circ$
	$\beta = 64,06^\circ$	$\beta = 146,26^\circ$	$\beta = 25,66^\circ$
	$\gamma = 92,38^\circ$	$\gamma = 12,98^\circ$	$\gamma = 97,36^\circ$

11.6	a) $c = 41,92$	b) $\alpha = 82,37^\circ$	c) $\alpha = 7,89^\circ$	d) $b = 123,41$
	$\alpha = 58,79^\circ$	$b = 17,55$	$\gamma = 141,46^\circ$	$\alpha = 37,95^\circ$
	$\beta = 90,52^\circ$	$c = 13,10$	$c = 444,92$	$\gamma = 24,24^\circ$
	$\mathcal{A} = 1472$	$\mathcal{A} = 113,9$	$\mathcal{A} = 22'241,9$	$\mathcal{A} = 2173,9$

11.7 $AC = 26,46$ cm $BD = 43,59$ cm $\theta = 64,31^\circ$

11.8 Le triangle BCD est isocèle en C
 $\beta = 101,26^\circ$ $\gamma = 67,34^\circ$ $\delta = 81,4^\circ$ $\mathcal{A}_{ABCD} = 23,7$ cm²

Références

- [1] H. Bovet et M. Cherix : Géométrie. CH-1608 Oron-le-Châtel, 1998.
- [2] CRM : Géométrie vectorielle et analytique. Num. 29 de Monographies de la CRM. CRM, 2400 Le Locle, g d'encre édn, 2016.
- [3] J.-P. Javet : Notions élémentaires d'algèbre et de trigonométrie 1mstand. <http://www.javmath.ch>, 2019-2020.