

1M standard

Algèbre et analyse

2^{ème} partie

Sarah Delmonico

Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2022-2023

Table des matières

1	Systèmes d'équations	2
1.1	Système d'équations linéaires 2 x 2	2
1.1.1	Résolution par substitution	3
1.1.2	Résolution par combinaison linéaire	4
1.1.3	Applications	6
1.2	Système d'équations du deuxième degré	7
1.3	Systèmes d'équations linéaires 3 x 3	9
1.3.1	Résolution d'un système d'équations linéaires 3 x 3	9
1.3.2	Applications	11
2	Degrés 3 et plus	12
2.1	Factorisation	12
2.1.1	Méthode 1 : Produits remarquables du 3 ^e degré	12
2.1.2	Méthode 2 : Changement de variable	13
2.1.3	Méthode 3 : Méthode du groupement	15
2.2	Factorisation par division	16
2.2.1	Division Euclidienne	16
2.2.2	Méthode 4 : Factorisation par division :	21
2.3	Signe d'une fonction polynomiale	23
2.3.1	Généralités	23
2.3.2	Signe d'un produit	26
2.3.3	Signe d'une fonction affine	26
2.3.4	Signe d'une fonction quadratique	28
2.3.5	Signe d'une fonction polynomiale	30
2.3.6	Signe de $(g(x))^n$	31
3	Fonctions rationnelles	33
3.1	Généralités	33
3.2	Simplification	34
3.3	Opérations de base	35
3.4	Résolution d'équations rationnelles	37
3.5	Signe d'une fonction rationnelle	39
4	Inéquations	40
4.1	Inéquations du premier degré à une inconnue	40
4.1.1	Résolution par voie graphique	41
4.1.2	Résolution algébrique	42
4.2	Cas particuliers	44
4.3	Autres inéquations	45
4.4	Ensemble de définition d'une racine carrée	46
5	Exercices	47
5.1	Systèmes d'équations	47
5.2	Degrés 3 et plus	51
5.3	Fonctions rationnelles	59
5.4	Inéquations	65
6	Solutions	70
6.1	Réponses - Systèmes d'équations	70
6.2	Réponses - Degrés 3 et plus	72
6.3	Réponses - Fonctions rationnelles	77
6.4	Réponses - Inéquations	81

1 Systèmes d'équations

1.1 Système d'équations linéaires 2 x 2

Une équation à deux inconnues x et y est **linéaire** lorsqu'elle est équivalente à une équation de la forme :

$$ax + by = c \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}$$

La forme $ax + by = c$ est dite forme **normale** de l'équation.

Un **système d'équations linéaires 2 x 2** est composé de deux équations linéaires qui ont au total deux inconnues et que l'on considère simultanément. Une accolade indique que les équations forment un système.

Exemples :

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 6x - 5y = -21 \\ -2x = 7 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = -3y - 5 \\ 2x + 11 = 5y \end{cases}$$

Résoudre un système d'équations, c'est trouver l'ensemble des couples de la forme $(x; y)$ qui vérifient toutes les équations du système simultanément. On notera $\mathcal{S} = \{(1; 2)\}$, si la seule solution du système est $(1; 2)$.

Exemples : Les couples $(-7; 7)$ et $(3; 2)$ sont-ils solutions du système d'équations ci-dessous ?

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

1.1.1 Résolution par substitution

- Isoler une des inconnues d'un côté d'une des équations (**équation de substitution**).
- Substituer l'inconnue par le résultat dans l'autre équation du système.
- Résoudre l'équation à une inconnue obtenue.
- Calculer la deuxième inconnue à l'aide de l'équation de substitution et la valeur obtenue.

Exemples : Résoudre ces systèmes d'équations par substitution.

a)
$$\begin{cases} 2x + 5y = -7 \\ 3x - y = 15 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x + 5y = 11 \\ 7y - 24 = 3x \end{cases}$$

On observe que cette méthode n'est pas toujours pratique.

ex. 1.1

1.1.2 Résolution par combinaison linéaire

- Mettre les équations sous forme normale.
- Amplifier chaque équation par un nombre, de sorte que le coefficient d'une des inconnues dans la première équation soit opposé à celui de la même inconnue dans la deuxième équation.
- Additionner membre à membre les deux équations obtenues. Une inconnue sera ainsi éliminée.
- Résoudre l'équation à une inconnue.
- Trouver l'autre inconnue, soit en substituant celle obtenue dans une des équations de départ, soit en reprenant depuis le début et en faisant une combinaison linéaire qui élimine l'autre inconnue.

Exemples : Résoudre les systèmes d'équations par combinaison linéaire.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 5y = -7 \\ 3x - y = 15 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + 5y = 11 \\ 7y - 24 = 3x \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3y - 6 = 7x \\ 5x - 5y + 9 = 0 \end{cases}$$

Comparer les résolutions du a) et du b) avec celles de la page précédente. Comment peut-on reconnaître la méthode à choisir ?

ex. 1.2 à 1.3

En général, un système linéaire 2×2 a une unique solution.

Cependant, on peut rencontrer les cas particuliers suivants :

- Un système est **impossible** s'il n'admet pas de solution. On note alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Un système est **indéterminé** s'il admet une infinité de solutions. (Voir l'exemple b) ci-dessous pour la notation de l'ensemble des solutions.)

Exemples :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = 9 \end{cases}$$

En examinant ce système, on observe que les membres de gauche des équations sont le double l'un de l'autre, mais ce n'est pas le cas pour les membres de droite.

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = 12 \end{cases}$$

En examinant ce système, on observe que les membres de gauche des équations sont le double l'un de l'autre, idem pour ceux de droite. Les deux équations sont donc équivalentes.

Le système admet une infinité de solutions.

Vérifier que $(6; 2)$ et $(0; -2)$ sont des solutions de ce système et trouver d'autres solutions.

Notation de l'ensemble des solutions :

ex. 1.4 à 1.6

1.1.3 Applications

Les systèmes d'équations sont souvent utilisés pour la résolution de problèmes. La marche à suivre est semblable à celle vue pour les problèmes à une inconnue :

- Lire soigneusement tout le problème et faire éventuellement un croquis de la situation.
- Déterminer les grandeurs à trouver, y compris leurs unités, et leur attribuer les inconnues.
- Poser les équations exprimant la situation décrite.
- Résoudre le système.
- Contrôler que l'on a trouvé tout ce qui était demandé.
- Donner la réponse au problème à l'aide d'une phrase, sans oublier les unités.

Exemples : Résoudre les systèmes d'équations par substitution.

- a) Un agriculteur a une exploitation de 100 hectares sur laquelle poussent des laitues et des choux.

Chaque hectare de choux nécessite 600 heures de travail, et chaque hectare de laitues nécessite 400 heures de travail.

Si l'on dispose de 45'000 heures et que tout le terrain et toute la main-d'oeuvre doivent être utilisés, trouver le nombre d'hectares de chaque légume qu'il faudrait planter.

- b) À l'aide d'un système d'équations, déterminer les coefficients m et h de l'équation $y = mx + h$ de la droite passant par les points $A(-1; -2)$ et $B(2; -1)$.

ex. 1.7 à 1.13

1.2 Système d'équations du deuxième degré

Un système d'équations est du **deuxième degré** si une des équations qui le composent est de degré 2 et que l'autre est de degré inférieur ou égal à 2.

Exemples :

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 9x^2 + y^2 + 3x = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y = -5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 + y^2 + 3y = 37 \\ 2x^2 + 2y^2 - 3x = 41 \end{cases}$$

Lorsqu'une des équations est de degré 1, on peut utiliser la substitution.

Exemples :

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 9x^2 + y^2 + 3x = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y = -5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$$

ex. 1.14

Si les deux équations sont de degré 2, on essaiera d'éliminer tous les termes de degré 2 ou une des inconnues par combinaison linéaire.

Exemples :

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 + 3y = 37 \\ 2x^2 + 2y^2 - 3x = 41 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + 3y = 54 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

ex. 1.15

1.3 Systèmes d'équations linéaires 3 x 3

1.3.1 Résolution d'un système d'équations linéaires 3 x 3

Un **système d'équations linéaires 3 x 3** est composé de trois équations à trois inconnues x , y et z , équivalentes à des équations de la forme :

$$ax + by + cz = d \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Une **solution** de ce système est un triplet $(x; y; z)$ qui vérifie les trois équations.

Exemples : Est-ce que $(1; 0; 5)$ est une solution des systèmes d'équations ci-dessous ?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x + 7y - z = -3 \\ -3x + 2y + 3z = 12 \\ -5x - 3y + 2z = 5 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 6 \\ x + y - z = 6 \end{cases} \end{array}$$

Pour résoudre de tels systèmes, nous procéderons de la manière suivante :

- Choisir une des équations et s'en servir pour éliminer une des inconnues dans les deux autres équations, à l'aide de combinaisons linéaires.
- Résoudre le système 2 x 2 obtenu.
- Trouver l'inconnue manquante grâce à l'une des équations de départ.

Exemples : Résoudre.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 7y - z = -3 \\ -3x + 2y + 3z = 12 \\ -5x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

ex. 1.16 à 1.17

$$\text{b) } \begin{cases} 3y + z = 5 \\ x + y = 7 \\ -x + z = 4 \end{cases}$$

ex. 1.18

1.3.2 Applications

Exemples :

a) Un fleuriste vend des roses, des marguerites et des lys.

J'ai acheté un bouquet de 3 roses, 1 marguerite et 3 lys.

Ma soeur a acheté un bouquet de 2 roses, 9 marguerites et 2 lys.

Mon frère a acheté un bouquet de 5 roses, 5 marguerites et 1 lys.

Sachant que nous avons dépensé chacun CHF 25.–, déterminer le prix de chaque sorte de fleur.

ex. 1.19 à 1.23

b) Déterminer l'expression de la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont le graphe passe par les points $(1;0)$, $(-1;6)$ et $(2;3)$.

ex. 1.24 à 1.25

2 Degrés 3 et plus

2.1 Factorisation

Nous allons maintenant voir plusieurs méthodes pour factoriser les polynômes de degré supérieur à 2. Pour choisir la bonne méthode, il est important d'observer le polynôme avant de se lancer dans les calculs.

Comme auparavant, on commence toujours par la mise en évidence. On essaie ensuite une des méthodes suivantes.

2.1.1 Méthode 1 : Produits remarquables du 3^e degré

Tout comme pour le 2^e degré, il existe des identités remarquables pour le 3^e degré :

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

Justifications :

On peut les utiliser pour factoriser certains polynômes.

Exemples : Factoriser.

a) $x^3 - 64$

b) $1000x^3 + 300x^2 + 30x + 1$

ex. 2.1 à 2.3

2.1.2 Méthode 2 : Changement de variable

Effectuer, réduire et comparer :

a) $(x^2 + 5)(x^2 + 2)$

b) $(y + 5)(y + 2)$

Dans certains cas, le polynôme à factoriser ressemble à un polynôme que l'on sait déjà factoriser mais ses puissances ont été doublées.

Exemple : $x^4 - 7x^2 + 12$

Pour le factoriser, on effectue un **changement de variable** : On pose $y = x^2$ et donc $y^2 = x^4$.

Puis on factorise notre polynôme en y .

Ensuite, on revient aux x et on factorise encore si l'on peut.

Exemples : Factoriser.

a) $x^4 - 18x^2 + 81$

b) $30x^5 - 70x^3 - 200x$

Effectuer, réduire et comparer :

a) $(x^3 + 1)(x^3 - 5)$

b) $(y + 1)(y - 5)$

Un changement de variable peut donc aussi s'utiliser si les puissances ont été multipliées par un autre entier que 2.

Exemples : Factoriser.

a) $x^8 - 17x^4 + 16$

b) $x^6 - 1$

ex. 2.4 à 2.6

2.1.3 Méthode 3 : Méthode du groupement

La **méthode du groupement** est une mise en évidence un peu plus complexe que celles effectuées jusqu'à là. Nous l'utiliserons avec des polynômes à 4 termes.

Effectuer les multiplications ci-dessous et observer les résultats obtenus :

a) $3x^2(2x + 11) =$

b) $7(2x + 11) =$

c) $(3x^2 + 7)(2x + 11) =$

Exemples : Factoriser.

a) $11x^3 - 3x^2 - 44x + 12$

b) $x^4 + 7x^3 + 8x + 56$

ex. 2.7 à 2.8

ex. 2.9 à 2.10

2.2 Factorisation par division

2.2.1 Division Euclidienne

Les méthodes de factorisation que nous avons vues ne sont utilisables que dans des cas bien particuliers. Pour pouvoir factoriser d'autres polynômes, nous devons apprendre à faire une division polynomiale, car pour factoriser, il faut parfois diviser.

Exemple : Écrire 5999 sous forme d'une multiplication, sachant qu'il est divisible par 7.

La méthode de division pour les polynômes est très similaire à la division en colonne pour les nombres.

Exemples : Effectuer la division euclidienne de $92'737$ par 5. Expliquer les étapes de la méthode.

Écrire l'égalité fondamentale.

Nous allons maintenant diviser $14x^3 - 29x^2 - 5$ par $2x^2 - 3x + 1$.

Égalité fondamentale :

Exemples : Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x) = 6x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 2x^2 - 5$ et $G(x) = 3x^3 + 7$ b) $F(x) = 4x^3 - 28x + 24$ et $G(x) = x^2 + 2x - 3$

ex. 2.11 à 2.14

Méthode de Horner

Exemples : Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x) = 5x^4 + 6x^2 + x - 5$ et $G(x) = x + 2$

b) $F(x) = 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 19x - 21$ et $G(x) = x - 3$

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
x^3	x^2	x	x^0	reste

En observant le dernier exemple de la page précédente, on peut remarquer que, lorsque le reste est nul, l'écriture de l'égalité fondamentale est une manière de factoriser.

Exemple : $F(x) = 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 19x - 21 =$

Lorsque le résultat de la division de $F(x)$ par $G(x)$ est égal à zéro, on dit que $F(x)$ est **divisible** par $G(x)$.
 $G(x)$ est alors un **diviseur** de $F(x)$.

Exemple : $F(x) = 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 19x - 21$ est divisible par $G(x) = x - 3$.

$G(x) = x - 3$ est un diviseur de $F(x) = 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 19x - 21$.

Mais comment peut-on trouver un diviseur pour un polynôme $F(x)$ donné ?

Exemple : Observons le polynôme factorisé : $F(x) = (x - 10)(2x + 1)(x + 3)$

a) Effectuer et réduire $F(x)$.

b) Comparer le terme de degré zéro avec la forme factorisée de $F(x)$. Que pouvez-vous en dire ? Pouvez-vous l'expliquer ?

c) Calculer $F(10)$ à l'aide du polynôme réduit, puis du polynôme factorisé. Que pouvez-vous en dire ? Pouvez-vous l'expliquer ?

Critère de divisibilité par $x - a$:

Soit un polynôme $F(x)$ et un nombre réel a .

$$F(x) \text{ est divisible par } x - a \text{ si et seulement si } F(a) = 0$$

Preuve : Si $F(x)$ est divisible par $x - a \Rightarrow$ Le reste de la division de $F(x)$ par $x - a$ est nul.

$$\Rightarrow F(x) = (x - a) \cdot Q(x) \text{ pour } Q(x) \text{ le quotient de la division de } F(x) \text{ par } x - a$$

$$\Rightarrow F(a) = (a - a) \cdot Q(a) = 0$$

$$\text{Si } F(a) = 0$$

On appelle $Q(x)$ le quotient de la division de $F(x)$ par $x - a$ et R le reste de cette division.

(R est de degré 0 car on a divisé par un polynôme de degré 1. C'est donc un nombre.)

On a l'égalité fondamentale : $F(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$

$$F(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R = R \text{ et } F(a) = 0 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow F(x) \text{ est divisible par } x - a \quad \#$$

Exemples :

- a) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessous, les polynômes divisibles par $x + 10$.

$$A(x) = x^3 + 7x^2 + 6x - 8$$

$$B(x) = x^{300} - 5x^{23} + 3x + 1$$

$$C(x) = 2x^3 - 7x^2 - 200x + 700$$

$$D(x) = x^3 + 11x^2 + 4x - 60$$

- b) Pour ceux qui sont divisibles par $x + 10$, effectuer la division, écrire l'égalité fondamentale et finir la factorisation.

ex. 2.16 à 2.20

2.2.2 Méthode 4 : Factorisation par division :

Pour factoriser un polynôme $F(x)$ par division, on procède de la manière suivante :

- Recenser les « *suspects* », c'est-à-dire les diviseurs positifs et négatifs du terme de degré 0 de $F(x)$.
- Trouver un des « *coupables* », en testant les suspects jusqu'à avoir trouvé a tel que $F(a) = 0$.
- Effectuer la division de $F(x)$ par $x - a$. Son reste doit être nul.
- Écrire l'égalité fondamentale de cette division. La première étape de factorisation est faite.
- Si cela est possible, continuer la factorisation à l'aide de la même méthode ou d'une autre méthode connue.

Exemples : Factoriser.

a) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

b) $6x^4 - 19x^3 + 13x^2 + 4x - 4$

ex. 2.21

Exemples : Résoudre.

a) $6x^4 + 43x^3 + 6x^2 - 7x = 0$

b) $x^3 + 7x^2 + 11x = -5$

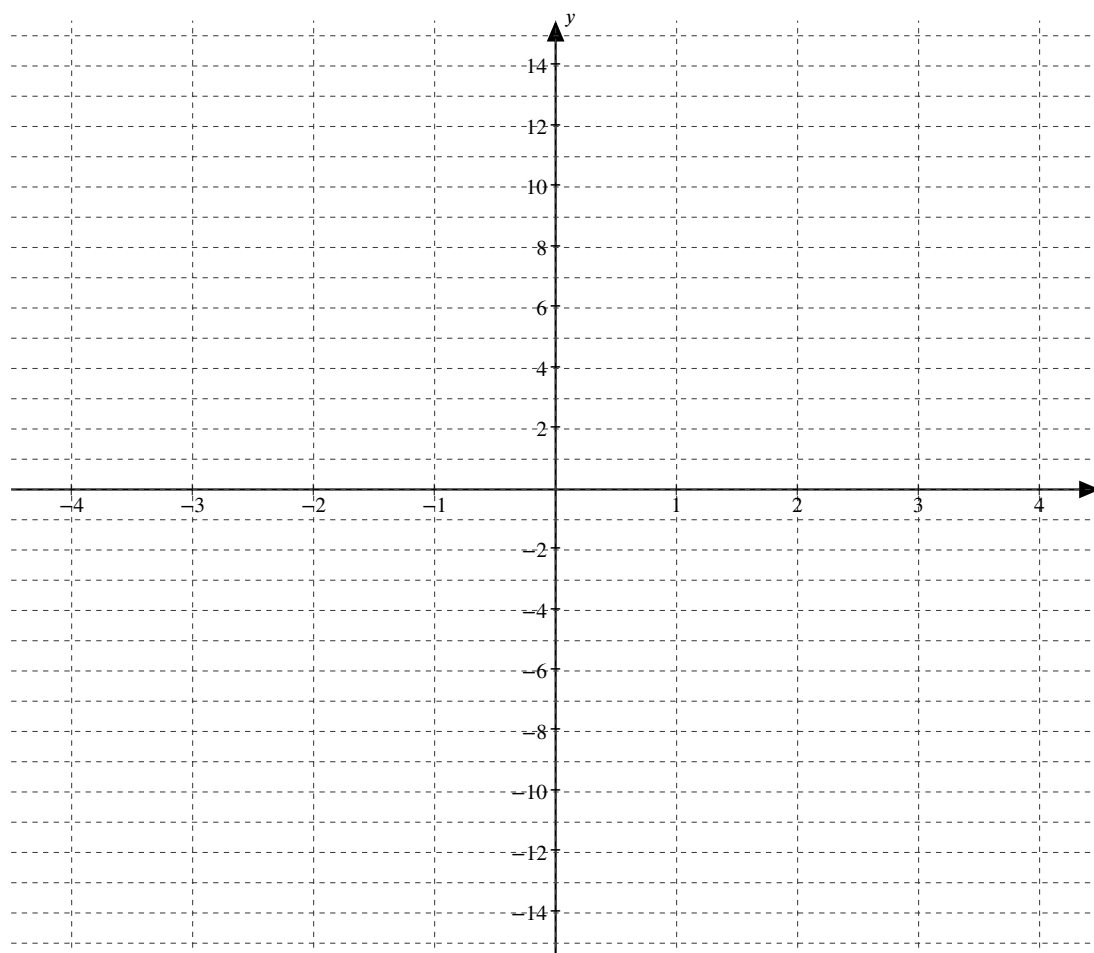
ex. 2.22 à 2.23

2.3 Signe d'une fonction polynomiale

2.3.1 Généralités

Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement la fonction f .

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = (x+2)(x+\frac{1}{2})(x-3)$							



On peut remarquer que le tableau de valeurs n'est pas forcément l'outil idéal pour représenter une fonction polynomiale. Les valeurs intéressantes, comme par exemple les zéros de la fonction, n'apparaissent pas systématiquement dedans. De plus, il y a beaucoup de calculs à effectuer pour le remplir.

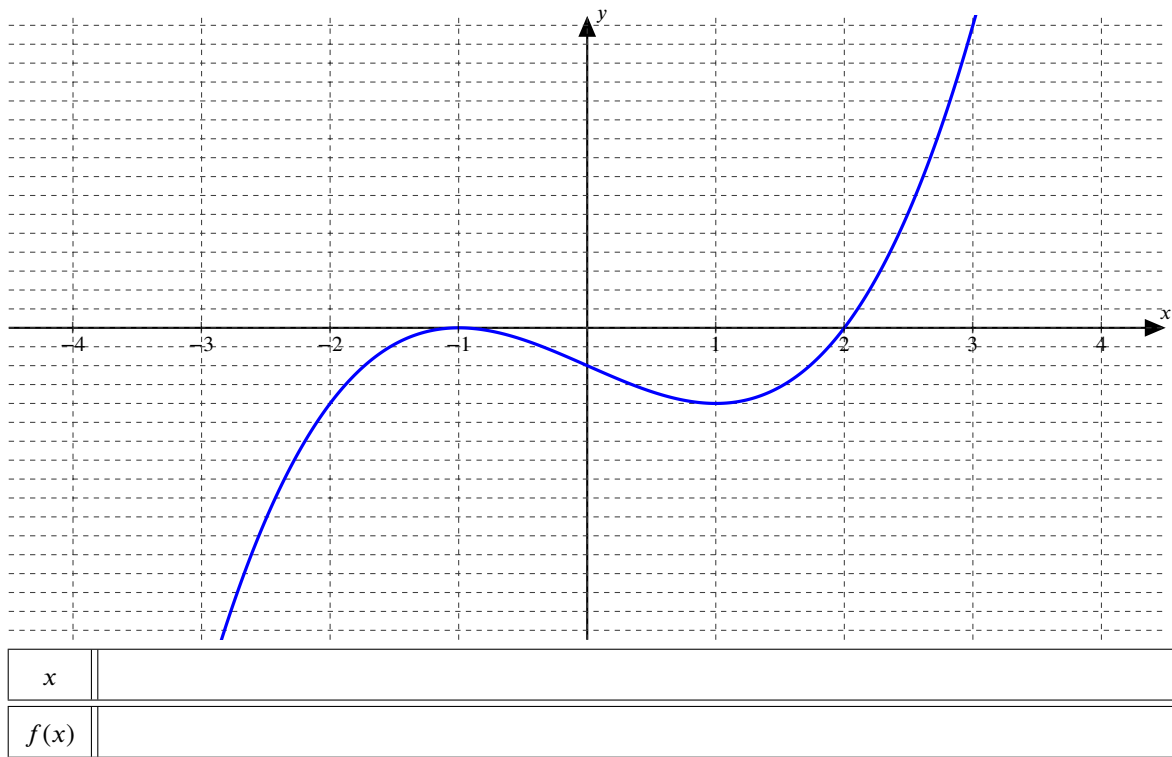
Il est souvent plus simple et approprié d'utiliser le **tableau des signes de la fonction**. C'est un tableau dans lequel la première ligne contient les zéros et les valeurs interdites de la fonction, tandis que la deuxième indique le signe des images obtenues :

x		-2		-0,5		3	
$f(x) = (x+2)(x+0,5)(x-3)$	-	0	+	0	-	0	+

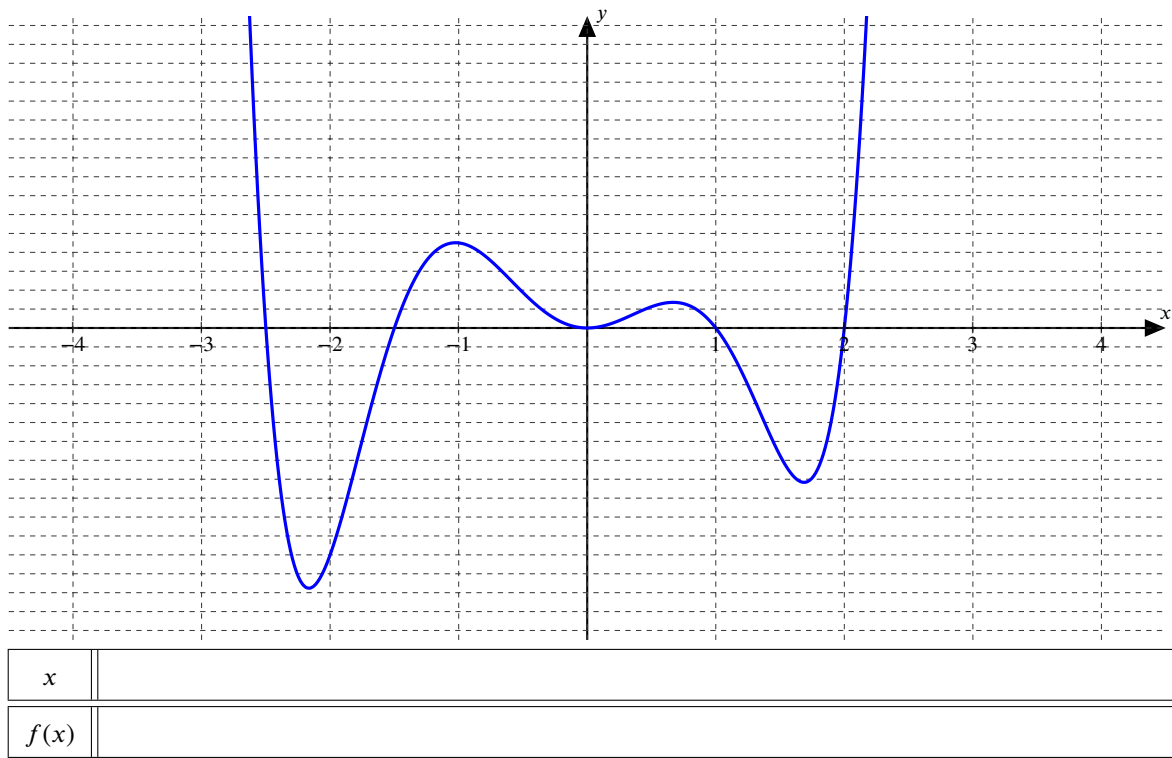
On dit alors qu'on **étudie le signe de la fonction**.

Exemples : Compléter le tableau des signes des fonctions représentées ci-dessous.

a)



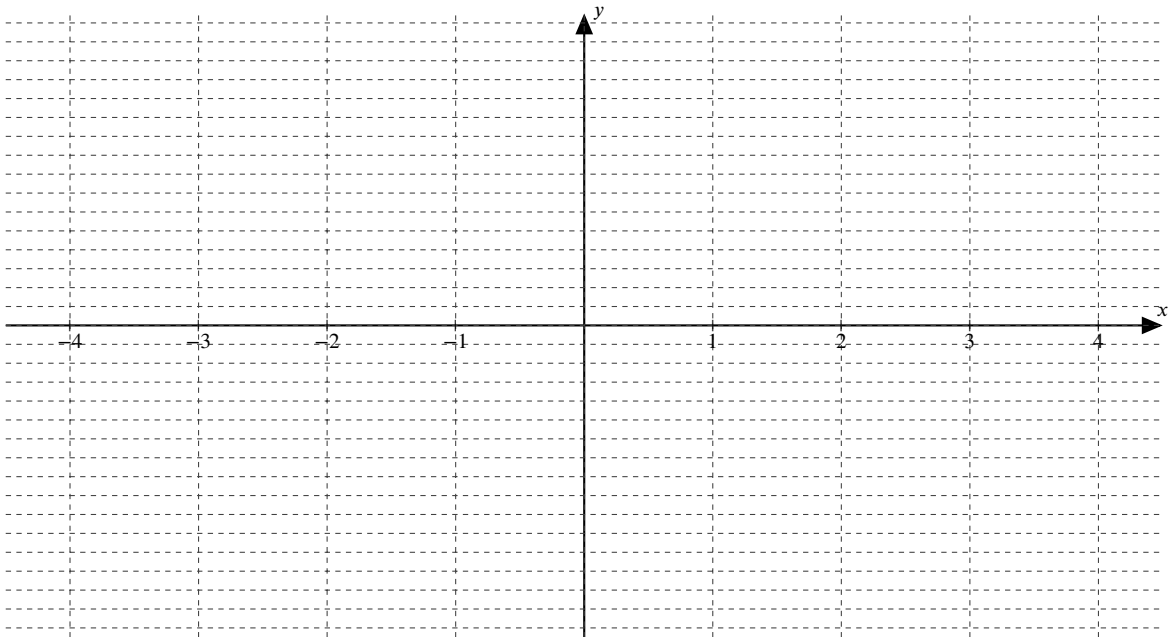
b)



Exemples : Faire une esquisse du graphe d’une fonction correspondant au tableau des signes.

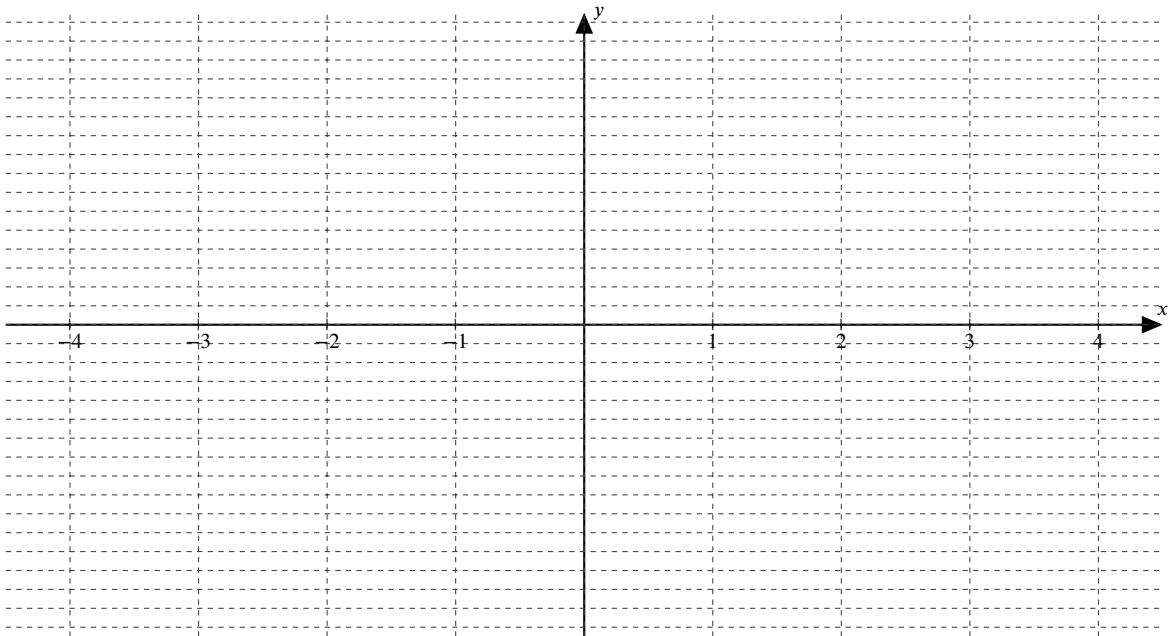
a)

x		-3		-1		3,5	
$f(x)$	-	0	+	0	+	0	+



b)

x		-2		0		1,5		3	
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	-



ex. 2.24 à 2.26

2.3.2 Signe d'un produit

Exemple : Compléter ce tableau de valeurs, puis le tableau des signes correspondant.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$4x$									
$x+3$									
$2-x$									
$4x(x+3)(2-x)$									

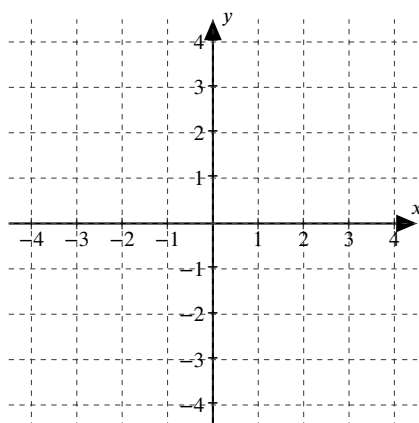
x	
$4x$	
$x+3$	
$2-x$	
$4x(x+3)(2-x)$	

On peut observer que le signe du produit est déterminé par les signes des facteurs et la règle des signes. Or tout polynôme est décomposable en produit de facteurs du 1^{er} et du 2^e degré. Nous allons donc étudier le signe des fonctions affines et quadratiques et nous en servir pour trouver le signe des autres polynômes.

2.3.3 Signe d'une fonction affine

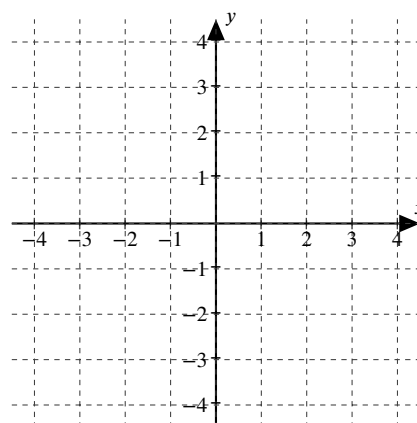
Exemples : Représenter le graphe de la fonction puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x) = 2x + 1$



x	
$f(x)$	

b) $g(x) = -2x + 1$



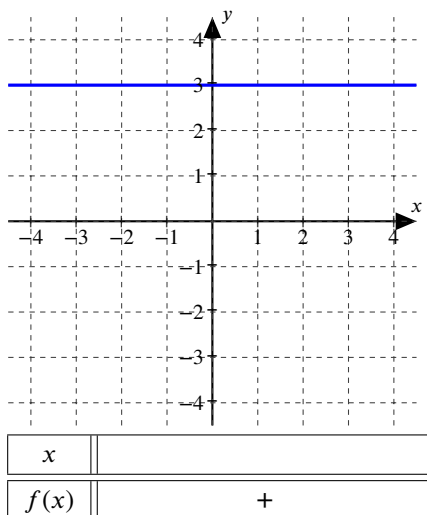
x	
$f(x)$	

Observations : Le graphe d'une fonction affine $f(x) = mx + h$ est une droite. On a donc les cas de figures suivants :

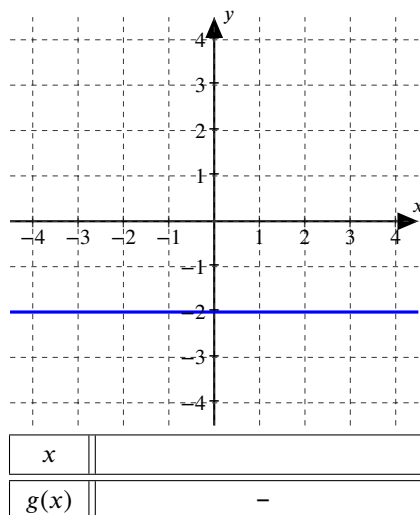
(A) Si $m = 0$, la fonction est constante et son signe est celui de h .

Exemples :

a) $f(x) = 3$



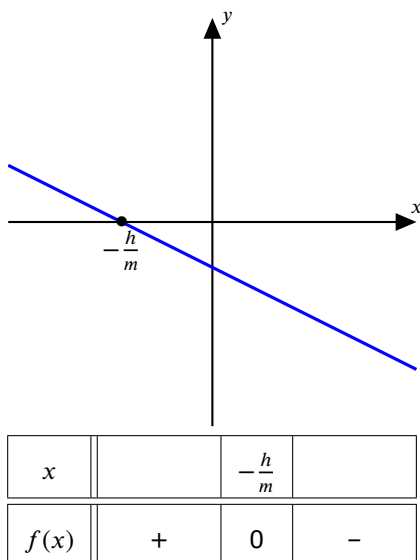
b) $g(x) = -2$



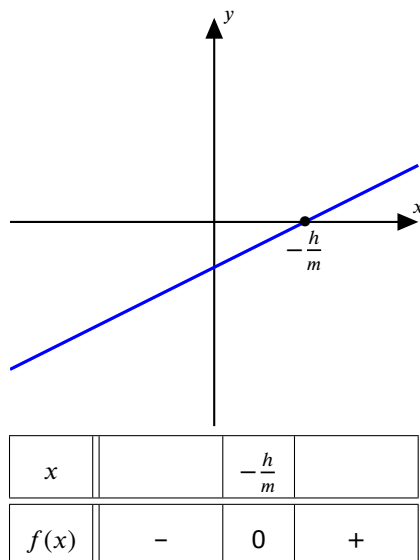
(B) Si $m \neq 0$, la fonction a un unique zéro, que l'on trouve en résolvant l'équation $mx + h = 0$.

Le signe de la fonction dépend du signe de la pente m .

• si la pente est négative



• si la pente est positive



Exemples : Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$5x + 10$	

b)

x	
$5x - 10$	

c)

x	
$-5x + 10$	

d)

x	
$-5x - 10$	

e)

x	
$-5x$	

f)

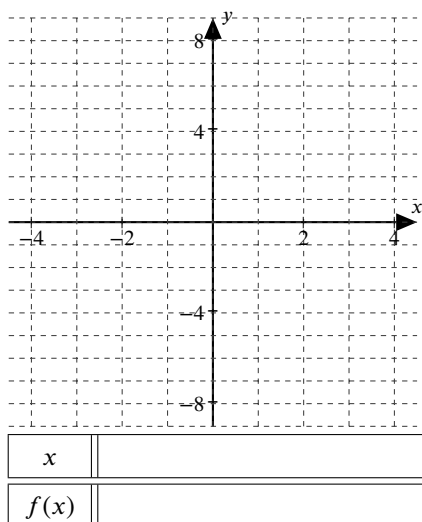
x	
-10	

ex. 2.27 à 2.29

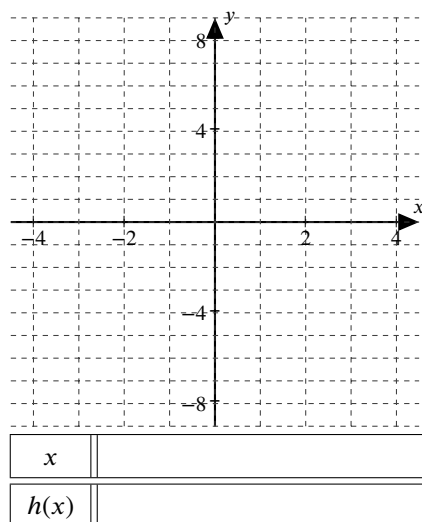
2.3.4 Signe d'une fonction quadratique

Exemples : Représenter le graphe de la fonction puis remplir son tableau des signes.

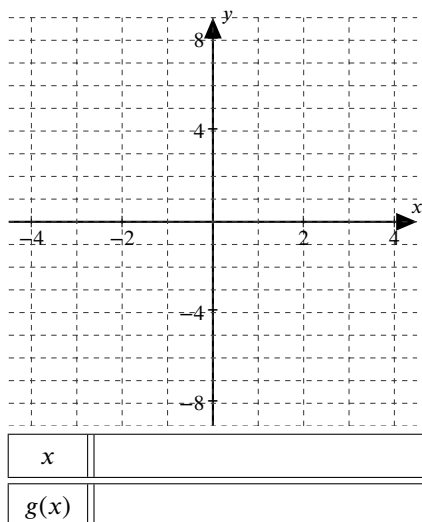
a) $f(x) = x^2 - 9$



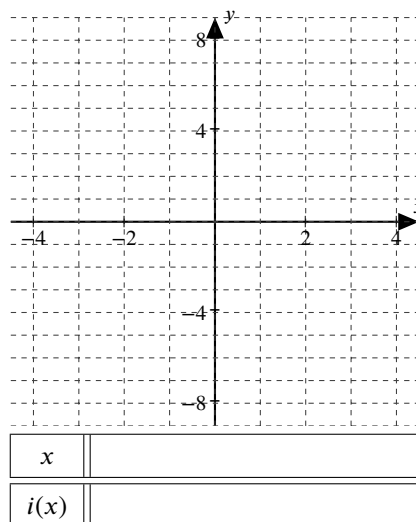
c) $h(x) = -x^2 + 9$



b) $g(x) = x^2 + 3x$



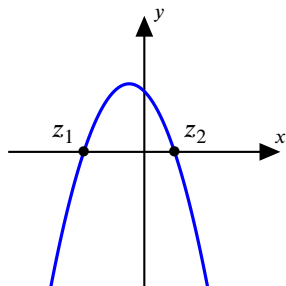
d) $i(x) = -0,5x^2$



Observations : Le graphe d'une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole. On a donc les cas de figures suivants :

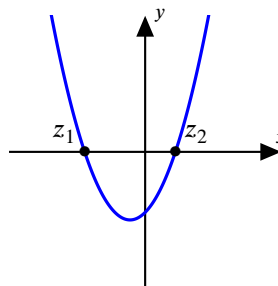
(A) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la fonction a deux zéros, que l'on peut calculer grâce à $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- si $a < 0$



x		z_1		z_2	
$f(x)$	-	0	+	0	-

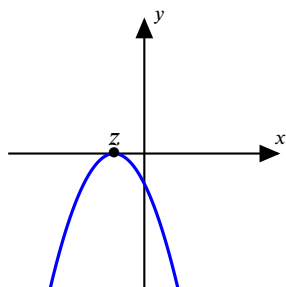
- si $a > 0$



x		z_1		z_2	
$f(x)$	+	0	-	0	+

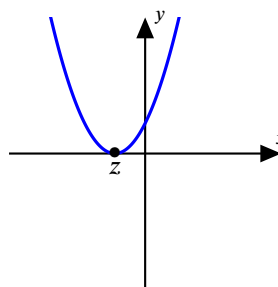
(B) Si $\Delta = 0$, la fonction a un seul zéro, que l'on peut calculer grâce à $z = \frac{-b}{2a}$.

- si $a < 0$



x		z	
$f(x)$	-	0	-

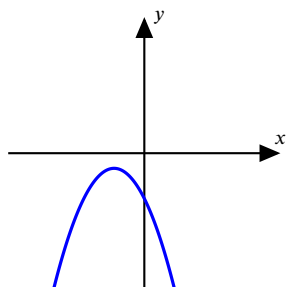
- si $a > 0$



x		z	
$f(x)$	+	0	+

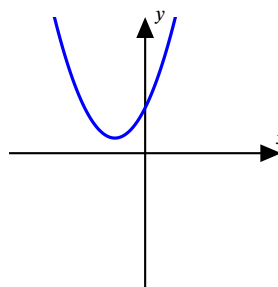
(C) Si Δ est négatif, la fonction n'a pas de zéro.

- si $a < 0$



x	
$f(x)$	-

- si $a > 0$



x	
$f(x)$	+

Exemples : Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$x^2 + 7x + 10$	

d)

x	
$-x^2 - 16$	

b)

x	
$-9x^2 + 6x - 1$	

e)

x	
$x^2 - 6x + 9$	

c)

x	
$2x^2 + x + 1$	

f)

x	
$-2x^2 + x + 1$	

ex. 2.30 à 2.32

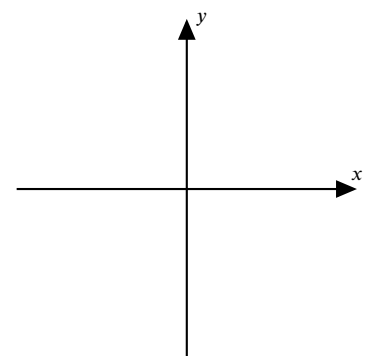
2.3.5 Signe d'une fonction polynomiale

La première étape est de factoriser le polynôme à l'aide des différentes méthodes que nous avons étudiées :

- mise en évidence,
- identités remarquables ;
- changement de variable ;
- méthode du groupement ;
- division polynomiale.

Ensuite, il faut faire un tableau des signes avec une ligne par facteur, puis remplir la ligne finale à l'aide de la règle des signes.

Exemple : Étudier le signe de la fonction $f(x) = -2x^6 + 20x^4 - 18x^2$ et faire une esquisse du graphe de la fonction.



ex. 2.33 à 2.34

2.3.6 Signe de $(g(x))^n$ **Exemples :**

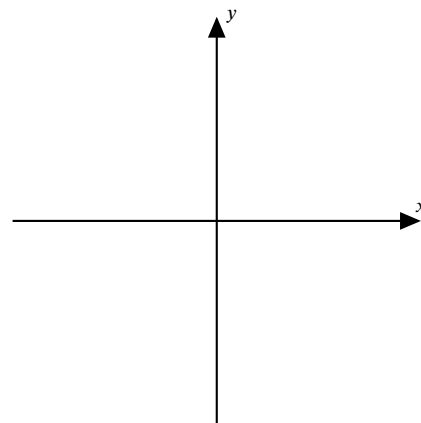
a) Étudier le signe de la fonction $f(x) = (x+2)^4$.

b) Étudier le signe de la fonction $f(x) = (x+2)^5$.

Observations :

- Lorsque n est pair, le signe de $(g(x))^n$ est :
- Lorsque n est impair, le signe de $(g(x))^n$ est :

Exemple : Étudier le signe de la fonction $f(x) = 5x^3(2-x)^2(7x+4)^5$ et faire une esquisse du graphe de la fonction.



Quels sont les zéros de la fonction qui occasionnent un changement de signe ?

ex. 2.35 à 2.36

3 Fonctions rationnelles

3.1 Généralités

On appelle **fraction rationnelle** une fraction dont le dénominateur et le numérateur sont des polynômes.

Exemples : $\frac{x-3}{x+2}$ $\frac{3}{x^2-4}$ $\frac{3x}{(x+1)^2}$

On appelle **fonction rationnelle** une fonction dont l'expression peut se ramener à une fraction rationnelle.

Exemples : $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ $g(x) = \frac{3}{x^2-4}$ $h(x) = \frac{3x}{(x+1)^2}$

a) Compléter les tableaux de valeurs pour ces trois fonctions :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$									

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x) = \frac{3}{x^2-4}$									

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$h(x) = \frac{3x}{(x+1)^2}$									

b) Quelles sont les valeurs de x qui posent problème pour ces fonctions ? Les comparer avec l'expression de la fonction.

Rappel : On appelle **ensemble de définition** d'une fonction l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe. On le note D_f ou ED_f .

Pour une fonction rationnelle $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, les problèmes viennent des divisions par zéro. On a donc :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid d(x) = 0\}$$

Ainsi, les zéros de $d(x)$ sont les **valeurs interdites** de $f(x)$.

Exemples : Déterminer les ensembles de définition.

a) $f(x) = \frac{x^2-4}{3x^2-7x}$

b) $g(x) = \frac{8x+1}{x^3+4x^2-3x-12}$

ex. 3.1 à 3.3

3.2 Simplification

Rappel : Simplifier les fractions ci-dessous :

a) $\frac{130}{39}$

b) $\frac{68}{85}$

Pour simplifier une fraction, il faut donc commencer par factoriser le numérateur et le dénominateur.

Exemples : Simplifier les fractions ci-dessous :

a) $\frac{x^3 - 4x}{x^5 - 8x^2}$

b) $\frac{6-x}{x^2 - 7x + 6}$

Observations : Compléter les tableaux de valeurs ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x) = \frac{x-3}{x+2}$							

Comparer les tableaux de valeurs ci-dessus.

Mise en garde : L'ensemble de définition doit être déterminé avant de simplifier la fraction.

ex. 3.4 à 3.10

3.3 Opérations de base

Rappel : Effectuer les additions ci-dessous :

a) $\frac{18}{35} + \frac{11}{14}$

b) $4 + \frac{9}{11}$

Pour **additionner** des fractions :

- Factoriser le dénominateur.
- Déterminer un multiple commun des dénominateurs.
- Amplifier les deux fractions pour avoir le dénominateur choisi.
- Additionner les numérateurs obtenus.
- Vérifier si l'on peut simplifier la fraction finale.

On procède de manière similaire pour les **soustractions**.

Exemples : Effectuer les opérations ci-dessous :

a) $\frac{x-3}{x^2+3x+2} + \frac{6}{x^2+4x+4}$

b) $\frac{x-1}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9}$

c) $\frac{x+6}{x+1} + \frac{x}{x^2+x} - 2$

ex. 3.11 à 3.14

Rappel : Effectuer les multiplications ci-dessous :

a) $\frac{7}{55} \cdot \frac{33}{39}$

b) $21 \cdot \frac{31}{35}$

Pour **multiplier** des fractions :

- Multiplier les numérateurs entre eux (sans effectuer les calculs).
- Multiplier les dénominateurs entre eux (sans effectuer les calculs).
- Factoriser les numérateurs et les dénominateurs pour simplifier.

Exemples : Effectuer les multiplications ci-dessous :

a) $\frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{x^2-x-6}{x+5}$

b) $\frac{x^4-16}{x^2+2x} \cdot \frac{x^3}{x^2-4x+4}$

ex. 3.16

Rappel : Effectuer les divisions ci-dessous :

a) $\frac{22}{49} : \frac{33}{35}$

b) $\frac{77}{30} : \frac{14}{12}$

Pour **diviser** des fractions :

- Transformer la division en une multiplication par l'inverse de la 2^{ème} fraction.
- Multiplier en simplifiant si possible.

Exemples : Effectuer les divisions ci-dessous :

a) $\frac{x}{x+2} : \frac{x^2-2x}{x+5}$

b) $35 : \frac{5x+15}{x-10}$

Attention à l'ensemble de définition ! On ne peut pas diviser par 0, que la division soit notée par un $:$ ou par une barre de fraction !

ex. 3.17 à 3.19

3.4 Résolution d'équations rationnelles

On appelle **équation rationnelle** une équation qui peut se ramener à $\frac{N(x)}{D(x)} = 0$ où $N(x)$ et $D(x)$ sont deux polynômes réduits. Nous appellerons **forme canonique** cette forme de l'équation.

Exemple : Écrire l'équation ci-dessous sous forme canonique.

$$\frac{x+3}{x-2} = 3$$

Observations : Compléter le tableau de valeur de cette fonction :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2-x}$							

Quelles sont les solutions de l'équation $\frac{x^2+3x}{x^2-x} = 0$?

Mise en garde : Une valeur interdite de l'équation de départ ne peut pas être une solution. Il faut donc chercher l'ensemble de définition avant de résoudre l'équation.

Pour **résoudre une équation rationnelle** :

- Trouver son ensemble de définition.
- La mettre sous forme canonique.
- Trouver les zéros du numérateur.
- Vérifier que ce ne sont pas des valeurs interdites.

Exemples : Résoudre :

a) $\frac{x+3}{x+2} = \frac{8x+10}{3x^2+6x}$

b) $\frac{x}{x+3} = \frac{-4x-9}{x^2+5x+6}$

ex. 3.20 à 3.21

Application :

Exemple : Un marchand achète des places de spectacle pour un montant de CHF 672.—. Il compte les revendre CHF 4.— de plus par place. Il retrouvera ainsi son investissement de départ, tout en gardant 3 places pour lui.

Combien en a-t-il acheté et à quel prix ?

ex. 3.22 à 3.24

3.5 Signe d'une fonction rationnelle

Exemple : Compléter ce tableau de valeurs, puis le tableau des signes correspondant.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x+1$									
$2-x$									
$\frac{x+1}{2-x}$									

x	
$x+1$	
$2-x$	
$\frac{x+1}{2-x}$	

Observations : On peut observer que le signe du quotient est déterminé par le signe du numérateur, celui de dénominateur et la règle des signes.

Les zéros du numérateur sont les zéros de la fonction.

Les zéros du dénominateur sont les **valeurs interdites** de la fonction.

Pour les fonctions rationnelles, il est important de préciser **l'ensemble de définition** de la fonction :
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\text{valeurs interdites}\}$

Exemple : Donner l'ensemble de définition et étudier le signe de la fonction $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+4x}$.

ex. 3.25

4 Inéquations

4.1 Inéquations du premier degré à une inconnue

Une **inéquation à une inconnue** est une inégalité entre deux expressions littérales comportant des nombres et une inconnue qui peut être juste ou fausse selon les valeurs attribuées à la variable.

Son écriture se compose de trois parties : le **membre de gauche** de l'inéquation, le **signe d'inégalité** ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$) et le **membre de droite** de l'inéquation.

Un nombre réel est une **solution** de l'inéquation si elle est vraie lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre.

Exemples : Parmi les valeurs -10 , -3 et 0 , lesquelles sont solutions des inéquations ci-dessous ?

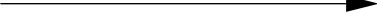
a) $5x > -15$

b) $x + 9 \geq -2x$

Le vocabulaire utilisé pour les inéquations est exactement le même que celui utilisé pour les équations. Les termes **résoudre** une inéquation, **ensemble de solutions** d'une inéquation et **équivalence** d'inéquations se définissent de manière identique à ce qui a été vu précédemment.

Généralement, une inéquation possède une infinité de solutions. L'ensemble des solutions sera donné par un **intervalle**. On peut le représenter sur la droite des nombres réels.

Exemples : Compléter le tableau ci-dessous :

Inéquation	Intervalle	Représentation graphique
$x \leq 7$		
$x < 7$		
$x \geq 7$		
$x > 7$		

4.1.1 Résolution par voie graphique

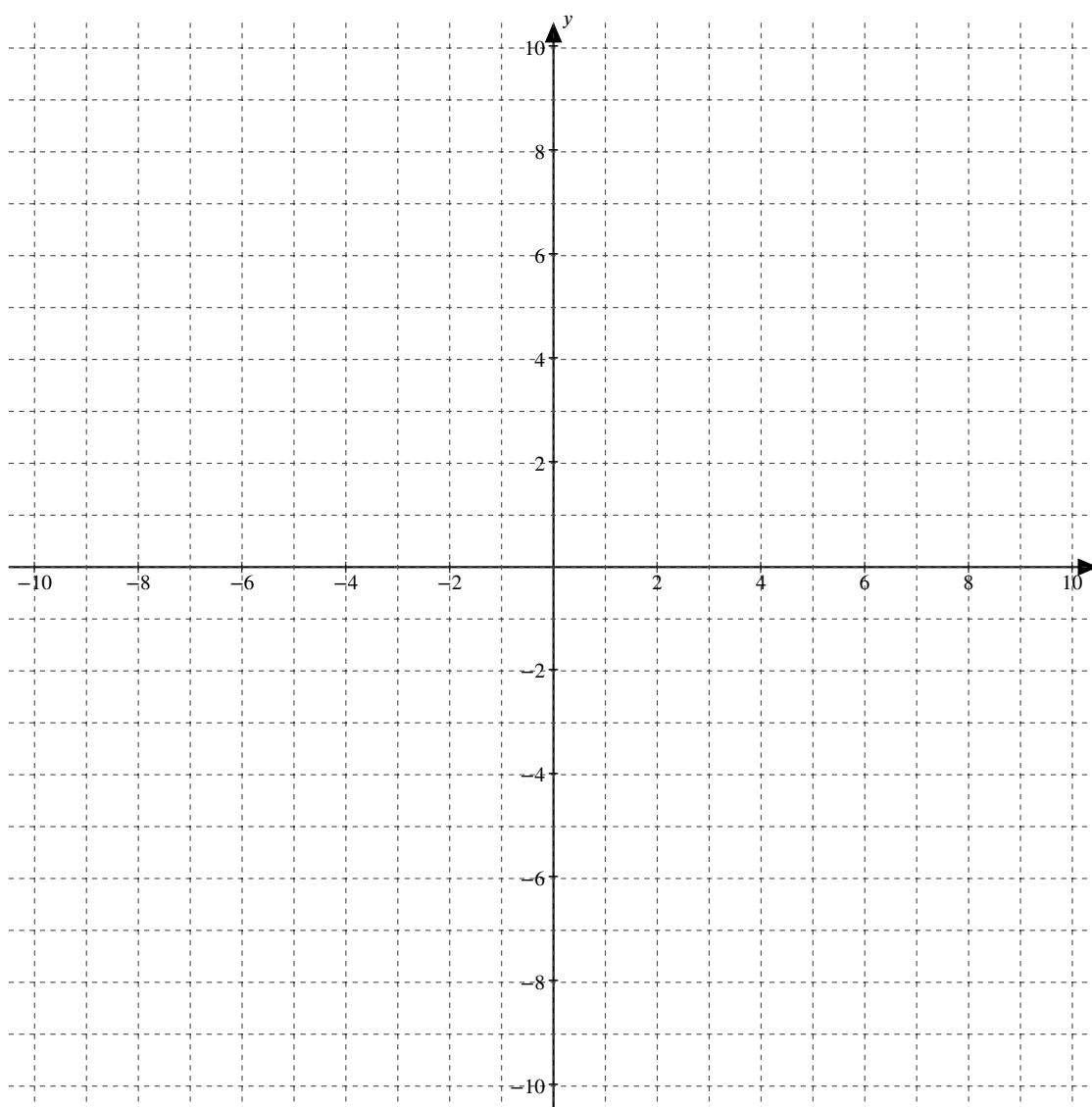
Appelons $f(x)$ le membre de gauche de l'inéquation et $g(x)$ le membre de droite.

La méthode par voie graphique consiste à tracer dans un même système d'axes les droites définies par $y = f(x)$ et $y = g(x)$. On observe ensuite pour quelles valeurs de x on obtient des images respectant l'inégalité voulue.

Exemples :

a) Résoudre l'inéquation $x + 2 > -2x - 1$ par voie graphique.

b) Résoudre l'inéquation $x + 2 \leq -2x - 1$ par voie graphique.



ex. 4.1 à 4.3

4.1.2 Résolution algébrique

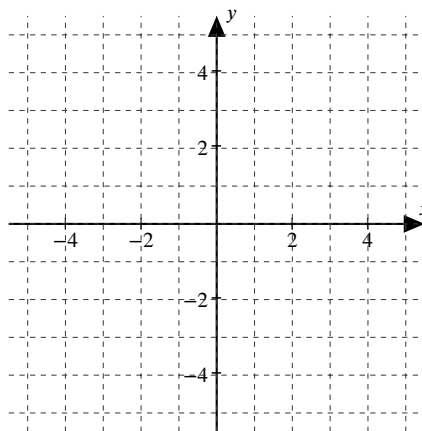
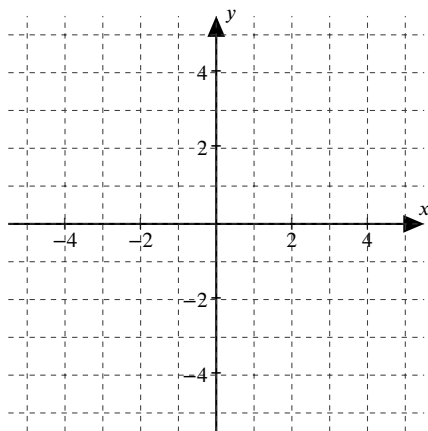
Résoudre ces inéquations par voie graphique et en déduire les implications ci-dessous.

a) $x + 3 > 1$

b) $x - 3 > 1$

c) $2x \leq x - 1$

d) $0 \leq 4 - x$

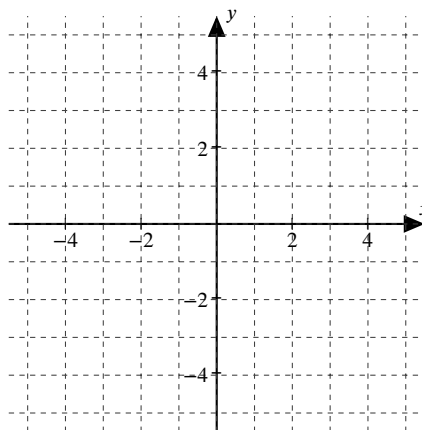
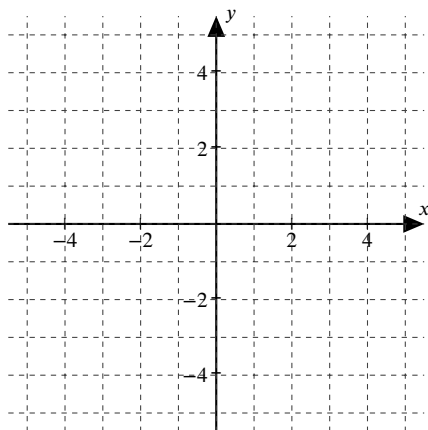


e) $3x > 3$

f) $-3x > 3$

g) $\frac{1}{4}x \geq 1$

h) $-\frac{1}{4}x \geq 1$



a) $x + 3 > 1 \implies x > \dots\dots\dots$

e) $3x > 3 \implies x \dots\dots\dots$

b) $x - 3 > 1 \implies x \dots\dots\dots$

f) $-3x > 3 \implies x \dots\dots\dots$

c) $2x \leq x - 1 \implies x \dots\dots\dots$

g) $\frac{1}{4}x \geq 1 \implies x \dots\dots\dots$

d) $0 \leq 4 - x \implies x \dots\dots\dots$

h) $-\frac{1}{4}x \geq 1 \implies x \dots\dots\dots$

La méthode algébrique se base sur l'utilisation des quatre **principes d'équivalence** suivants :

- **1^{er} principe d'équivalence**

On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en réduisant les membres de l'inéquation par les règles du calcul littéral.

Exemple :

$$2(3x+5) > 4x-3 \quad \Longleftrightarrow \quad 6x+10 > 4x-3$$

- **2^e principe d'équivalence**

On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en additionnant ou en soustrayant à chacun des membres de l'inéquation la même expression.

Exemples :

$$\begin{array}{lcl} 6x+10 > 4x-3 & \Longleftrightarrow & 2x > -13 \\ 6x+10 > 4x-3 & \Longleftrightarrow & 13 > -2x \end{array}$$

- **3^e principe d'équivalence**

On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en permutant le membre de gauche et le membre de droite, puis en changeant le sens de l'inégalité.

Exemple :

$$13 > -2x \quad \Longleftrightarrow \quad -2x < 13$$

- **4^e principe d'équivalence**

On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en multipliant ou en divisant chacun des membres de l'inéquation par un nombre strictement positif.

On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée **en multipliant ou en divisant** chacun des membres de l'inéquation **par un nombre strictement négatif**, puis **en changeant le sens de l'inégalité**.

Exemples :

$$\begin{array}{lcl} 2x > -13 & \Longleftrightarrow & x > -\frac{13}{2} \\ -2x < 13 & \Longleftrightarrow & x > -\frac{13}{2} \end{array}$$

Lorsqu'on veut résoudre algébriquement une inéquation du premier degré à une inconnue, il faut isoler l'inconnue dans l'un des membres de l'inéquation en utilisant les principes d'équivalence.

Après avoir déterminé l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$, il est bon de vérifier s'il est correct, en remplaçant la variable par une valeur de l'ensemble $\mathcal{S}$.

Exemples :

a) Résoudre l'inéquation $2(2x + 3) < 6(x - 2) + 10$

b) Résoudre l'inéquation $\frac{2x-3}{4} + 6 \geq 2 + \frac{4x}{3}$

ex. 4.4 à 4.9

4.2 Cas particuliers

a) Résoudre l'inéquation $6x - 10 < 2(3x - 5)$.

b) Résoudre l'inéquation $6x - 10 \leq 2(3x - 5)$.

c) Résoudre l'inéquation $6x - 10 < 2(3x - 4)$.

d) Résoudre l'inéquation $6x - 10 > 2(3x - 4)$.

e) Résoudre l'inéquation $6x - 10 \geq 2(3x - 4)$.

ex. 4.10 à 4.11

4.3 Autres inéquations

Seules les inéquations du premier degré peuvent être résolues algébriquement. Pour les degrés supérieurs ou les fractions rationnelles, il faut les transformer en une inéquation canonique équivalente puis utiliser un tableau des signes.

Exemples : Résoudre.

a) $-3x^4 + 5x^3 \geq -10x^3 + 18x^2$

b) $\frac{5x+10}{x^2-4} < -1$

ex. 4.12 à 4.20

4.4 Ensemble de définition d'une racine carrée

Pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{g(x)}$, il faut résoudre l'inéquation $g(x) \geq 0$, donc dans la plupart des cas il faut faire le tableau des signes de la fonction g .

Exemples : Déterminer l'ensemble de définition de $f(x)$.

a) $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 6}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$

Remarque : Il ne faut pas confondre le tableau des signes de $f(x)$ avec celui de $g(x)$.

Exemples : Faire le tableau des signes des deux fonctions ci-dessus.

ex. 4.21

5 Exercices

5.1 Systèmes d'équations

Système d'équations linéaires 2x2

Exercice 1.1 Résoudre les systèmes d'équations suivants par substitution :

$$a) \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x - y = 4 \\ 13x - 3y = 14 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 5y = 69 \\ y - 4(x - 7) = 67 - 3x \end{cases}$$

Exercice 1.2 Résoudre les systèmes d'équations suivants par combinaison linéaire :

$$a) \begin{cases} -4x + 5y = 32 \\ 2x - 3y = -22 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 7x + 10y = -12 \\ 2x + 3y = -3 \end{cases}$$

Exercice 1.3 Résoudre les systèmes d'équations par la méthode la plus appropriée.

$$a) \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x - 5y = 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -6x = -1 - 3y \\ 6x - 15y = 15 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 21x - 49y = 21 \\ 4y + 5x = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4x + 3y + 3 = 0 \\ 8x + 5y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 7 + 4y = x \\ 5x - 6y = 21 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 14y + 54 = 10x \\ y + 4x = 15 \end{cases}$$

Exercice 1.4 Résoudre les systèmes d'équations.

$$a) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 10 - 3y \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4(x - y) = 10 + 2y \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - (6y - 5) = 15 \end{cases}$$

Exercice 1.5 Résoudre les systèmes d'équations.

$$a) \begin{cases} 9(x - y) + 24x = 100 \\ 3(x - y) = 32 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 6(x + y + 2) + 12x = 98 \\ x - y + 2 = 4x \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 6(x + y) - 7(x + y) - 2 = 0 \\ (5x - 3y) - 4(x - y) + 2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.6 Résoudre les systèmes d'équations.

$$a) \begin{cases} x - \frac{2}{3}y = 7 \\ \frac{3}{2}x - y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{4} = 1 \\ \frac{x-3}{3} - \frac{y+2}{2} = -2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{5}{12} \\ x - \frac{3y}{4} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Exercice 1.7 Un fermier possède des poules et des lapins. Ces animaux ont ensemble cinquante têtes et cent trente pattes. Combien de poules et combien de lapins possède le fermier ?

Exercice 1.8 Le nez de Pinocchio mesure 5 cm de long au début d'une journée.

Chaque fois que Pinocchio dit un mensonge, la Fée aux cheveux bleus allonge son nez de 3 cm, mais chaque fois qu'il dit la vérité, la Fée le raccourcit de 2 cm.

À la fin de la journée, Pinocchio a parlé dix fois pour dire soit des vérités, soit des mensonges, et son nez mesure 20 cm de long.

Combien de fois Pinocchio a-t-il menti au cours de cette journée ?

Exercice 1.9 Le prix d'une course en taxi comprend une somme fixe (la prise en charge) et une somme variable proportionnelle à la distance parcourue.

Un premier client a payé CHF 16,20 pour une course de 3 kilomètres ; un second client a payé CHF 36,60 pour une course de 9 kilomètres.

Quel est le prix du kilomètre parcouru et celui de la prise en charge ?

Exercice 1.10 La ville de Nouvo a installé des usines pour alimenter ses citoyens en eau potable. Elle finance les coûts d'exploitation en facturant une redevance fixe et l'eau consommée.

Un des voisins de Jean a reçu son décompte et, pour une consommation de 60'000 litres, paie CHF 88,— ; un autre voisin paie CHF 100,— pour une consommation de 75'000 litres.

Jean n'a pas reçu son décompte, mais il sait qu'il a consommé 82'000 litres d'eau. Quel montant doit-il prévoir ? Déterminer également le montant de la taxe fixe et le prix pour 1'000 litres d'eau.

Exercice 1.11 Pour peindre une chambre, on mélange deux couleurs, une couleur A et une couleur B valant respectivement CHF 12,—/kg et 10,—/kg. Un kg de ce mélange vaut CHF 10,90.

Si l'on met dans ce mélange 3 kg de moins de couleur A en gardant la même quantité totale, le kg vaudra CHF 10,40.

Du mélange de base, combien y a-t-il de couleur A, respectivement de couleur B ?

Exercice 1.12 On mélange 9 litres et 6 litres de deux solutions salées à des taux différents, de cette manière le mélange contient 13% de sel.

Si l'on prend 7 litres de plus de la première solution et 4 fois plus de la deuxième que précédemment, on obtient un mélange de 12%.

Quel pourcentage de sel contient chaque solution ?

Exercice 1.13 Deux capitaux placés, le premier à 0,4% et le second à 0,5%, produisent ensemble des intérêts annuels de CHF 450,— .

Si l'on avait placé le premier capital à 0,5% et le second à 0,4%, on aurait obtenu CHF 540,— .

Quels sont ces deux capitaux ?

Système d'équations du deuxième degré**Exercice 1.14** Résoudre les systèmes.

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 585 \\ x = 8y \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 96 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 3x + 2y + 2xy + 6 = 0 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 297 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + y = 11 \\ (x+9)(y+2) = 72 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y = 13 \\ (x+3)(y+10) = 120 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + y - x - 18 = 0 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = -4 \end{cases}$$

Exercice 1.15 Résoudre les systèmes.

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 125 \\ x^2 - y^2 = 75 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3x - 20y = 32 \\ 3x^2 - 2y^2 - 5x + 20y = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x^2 - 2y^2 + 8x - 16y = -8 \\ x^2 - y^2 - 4x + 8y = 4 \end{cases}$$

Systèmes d'équations linéaires 3x3**Exercice 1.16** Résoudre les systèmes.

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 41 \\ 8x + 5y - 2z = 3 \\ 3x + 7y - 2z = -1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - y + z = 30 \\ x + 2z = -2y \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2x + y + 4z = x - 6 \\ 2x + y = -17 + 3z \\ -4x + 7z = 11 - 2y \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - y + z = 29 \\ x + 3y + 30z = 6 \\ x - y + z = 17 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 7x + 3y = -7 + 3z \\ 4x + z = 3 - 2y \\ -2x + 5y - 5z = y - 35 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x + y - z = 7 + 2x \\ 3x + 2y = 14 - z \\ y = 7 - 3z - 5x \end{cases}$$

Exercice 1.17 Résoudre les systèmes.

a)
$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ 4x + 3y + 3z = 7 \\ -2x + 4y + 6z = 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + 5y + 6z = 17 \\ -x - 3y - 3z = -4 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 3x - 4y + z = 9 \\ -6x + 5y + \frac{3}{4}z = 4 \\ 9x - \frac{4}{5}y - z = -5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 1 \\ 10x + y + 2z = 8 \\ -5x - 2y + 4z = 8 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}y - z = -5 \\ 2x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{2}z = -2 \\ 5x - y + \frac{3}{5}z = 5 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} \frac{1}{5}x + y - 2z = -4 - z \\ 4x - \frac{3}{5}y - \frac{1}{3}z = 9 \\ x + y = z \end{cases}$$

Exercice 1.18 Résoudre les systèmes.

$$\text{a) } \begin{cases} 7x - 4y - 5z = 56 \\ 3y - 2z = 13 \\ 5x - 3y = 22 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + 5y = 12 \\ 3y - 2z = 4 \\ 5x - 3z = 21 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4y + 3z = 0 \\ x + y = z - 9 \\ 5x = y - 7 \end{cases}$$

Exercice 1.19 Un fermier a noté les trois commandes, ainsi que les totaux correspondants :

- 5 hl de froment / 4 hl de seigle / 3 hl d'avoine / 1210 francs,
- 3 hl de froment / 5 hl de seigle / 4 hl d'avoine / 1070 francs,
- 1 hl de froment / 8 hl de seigle / 5 hl d'avoine / 1110 francs.

Quel était le prix par hectolitre de chaque sorte de céréales ?

Exercice 1.20 La station du bas d'un téléphérique indique les tarifs suivants :

aller : CHF 22,50

retour : CHF 15.–

aller-retour : CHF 30.–

Pendant une journée, on a encaissé CHF 19'650.– pour un total de 680 montées et 520 descentes, allers-retours inclus.

Combien de billets de chaque sorte ont-ils été vendus ?

Exercice 1.21 À Pâques, j'ai reçu en tout 800 g de chocolat.

Hier, j'ai remarqué que j'avais mangé $\frac{7}{10}$ de mon chocolat blanc, $\frac{4}{5}$ de mon chocolat brun et la moitié de mon chocolat noir.

Il me reste alors autant de chocolat brun que des deux autres réunis.

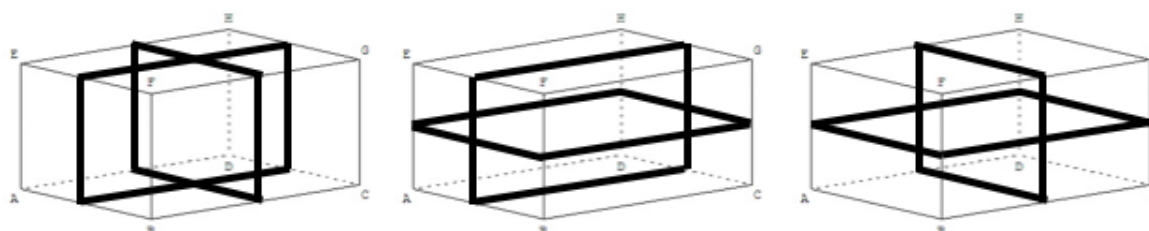
Pourtant, j'ai mangé 16 fois plus de chocolat brun que de noir !

Quelle quantité de chocolat de chaque sorte avais-je au début ?

Exercice 1.22 J'utilise tout le temps les mêmes paquets. Deux de leurs faces sont carrées. Par contre, je varie la manière d'attacher la ficelle autour.

Pour la première manière, j'ai eu besoin de 140 cm de ficelle. Pour la deuxième, il m'a fallu 160 cm et pour la troisième 140 cm.

Quelles sont les trois dimensions de mon paquet ?



Exercice 1.23 Un nombre est formé de trois chiffres dont la somme est 14.

En effaçant le chiffre des unités, j'obtiens le triple du chiffre des unités.

En effaçant le chiffre des dizaines, j'obtiens sept fois le chiffre des dizaines. Quel est ce nombre ?

Exercice 1.24 Lorsque c'est possible, déterminer l'équation de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ passant par les points A , B , et C .

a) $A(2;3)$, $B(-1;6)$ et $C(0;1)$

c) $A(5;3)$, $B(-2;3)$ et $C(3;-2)$

b) $A(-1;-2)$, $B(1;4)$ et $C(-4;4)$

d) $A(2;1)$, $B(-1;7)$ et $C(5;-5)$

Exercice 1.25 Trouver l'équation de la parabole $y = ax^2 + bx + c$, de sommet S et qui passe par A .

a) $S(2;3)$ et $A(4;7)$

b) $S(-3;1)$ et $A(1;9)$

5.2 Degrés 3 et plus

Factorisation

Exercice 2.1 Résoudre les équations suivantes :

a) $(3x+2)(-4x)=0$

c) $(x-9)^2(x-1)^3(4x+1)=0$

b) $(3x+2)-4x=0$

d) $(x^2-9)(x-1)^3(4x+1)=0$

Exercice 2.2 Effectuer et réduire.

a) $(x+2)^3$

d) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$

g) $(3x+\frac{1}{3})^3$

b) $(2x-1)^3$

e) $(2x-5)^3$

h) $(x^3-1)^3$

c) $(x+2)(x^2-2x+4)$

f) $(10c-1)^3$

i) $(x^{10}y^4+1)^3$

Exercice 2.3 Factoriser les polynômes suivants en utilisant les produits remarquables :

a) x^3-1

d) $x^3-15x^2+75x-125$

g) x^3-125

b) $64+125y^3$

e) $8x^3+36x^2+54x+27$

h) $64x^3+27$

c) x^3+3x^2+3x+1

f) $125x^3-1$

i) $x^3-6x^2+24x-8$

Exercice 2.4 Effectuer et réduire.

a) $(5x+4)^2$

d) $(z-15)(z+15)$

g) $(x-3)(x+22)$

b) $(5x^2+4)^2$

e) $(z^2-15)(z^2+15)$

h) $(x^2-3)(x^2+22)$

c) $(5x^3+4)^2$

f) $(z^{10}-15)(z^{10}+15)$

i) $(xy-3)(xy+22)$

Exercice 2.5 Factoriser.

a) $x^4 - 625$

d) $81x^4 - 72x^2 + 16$

g) $5x^4 - 55x^2 + 90$

b) $x^4 - 11x^2 + 28$

e) $z^4 - 8z^2 - 9$

h) $-7x^7 + x^5 + 6x^3$

c) $2x^4 + 23x^2 + 11$

f) $x^4 + 8x^2 - 9$

i) $\frac{1}{3}x^4 - 27$

Exercice 2.6 Résoudre les équations suivantes :

a) $27x^3 + 1 = 0$

c) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

e) $x^6 + 9x^5 + 27x^4 + 27x^3 = 0$

b) $x^6 + 2x^3 + 1 = 0$

d) $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$

f) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Exercice 2.7 Factoriser.

a) $x^3 + 5x^2 + 3x + 15$

d) $x^4 + 8x^3 + x + 8$

g) $-8x^7 - 64x^6 - 27x^4 - 216x^3$

b) $x^3 + 6x^2 - 4x - 24$

e) $x^4 + x^3 + 8x + 8$

h) $\frac{1}{11}x^3 + \frac{2}{11}x^2 - 11x - 22$

c) $5z^3 - 8z^2 - 5z + 8$

f) $2w^4 + 3w^3 - 250w - 375$

i) $120y^5 - 80y^4 - 30y^3 + 20y^2$

Exercice 2.8 Résoudre.

a) $2x^3 - 8x^2 + 8x = 0$

d) $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 = 0$

g) $2x^4 - 8x^3 + 4x^2 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

e) $3x^4 - 13x^3 - 10x^2 = 0$

h) $(x^2 + 4)(x^2 + 9) = 0$

c) $4x^3 - 12x^2 + 9x = 0$

f) $(x^5 - 9x^4)(x - 1)(x^2 - 1) = 0$

i) $3x^5 - 15x^3 + 12x = 0$

Exercice 2.9 Démontrer :

Tout nombre entier de la forme $n^3 - n$ est divisible par 6, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(Indication : Factoriser, puis montrer que le nombre est toujours divisible par 2 et 3.)

Exercice 2.10 Démontrer :

Si trois nombres réels ont une somme nulle, alors la somme de leurs cubes est égale au triple de leur produit.

Factorisation par division**Exercice 2.11**

a) Diviser le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ par le polynôme $D(x) = x + 1$. Puis, écrire l'égalité fondamentale correspondante.

b) Diviser le polynôme $P(x) = 4x^4 - 5x^2 + 7x + 8$ par le polynôme $D(x) = x^2 + 2x - 3$. Puis, écrire l'égalité fondamentale correspondante.

Exercice 2.12 Effectuer la division euclidienne de $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

- | | |
|---|------------------------|
| a) $F(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$ | $G(x) = x - 5$ |
| b) $F(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ | $G(x) = x^2 + 2x - 1$ |
| c) $F(x) = 5x^4 + 3x^3 - 1$ | $G(x) = x^2 - 1$ |
| d) $F(x) = 6x^5 + 5x^4 - 25x^3 + 31x^2 - 12x + 5$ | $G(x) = 2x^2 - 3x + 2$ |

Exercice 2.13 Effectuer la division euclidienne de $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

- | | |
|--|-------------------------|
| a) $F(x) = 3x^4 - 7x^3 - 18x^2 + 28x + 24$ | $G(x) = 3x^2 + 8x + 4$ |
| b) $F(x) = x^3 + x^2 + 5$ | $G(x) = 2x - 3$ |
| c) $F(x) = -2x^3 - 3x + 1$ | $G(x) = 3x^3 + x^2 - 1$ |

Exercice 2.14 Déterminer un polynôme $P(x)$ tel que le quotient de la division de $F(x)$ par $x^2 + 1$ soit égal à $5x^2 - 3x + 1$ avec un reste égal à $-x + 1$.

Exercice 2.15 À l'aide de la méthode de Horner, effectuer la division euclidienne de $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale correspondante.

- | | |
|-----------------------------------|----------------|
| a) $F(x) = 3x^4 - 8x^3 + 10x + 5$ | $G(x) = x - 2$ |
| b) $F(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$ | $G(x) = x - 5$ |
| c) $F(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 8$ | $G(x) = x + 2$ |
| d) $F(x) = x^4 - 8x^2 - 7$ | $G(x) = x - 3$ |

Exercice 2.16 Montrer que le polynôme $P(x) = x^5 - 1$ est divisible par $D(x) = x - 1$ et calculer le quotient.

Exercice 2.17 Déterminer le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que le polynôme $P(x) = x^4 - \lambda x^3 + 2x^2 + 3\lambda x - \lambda^2$ soit divisible par $x - 2$. Calculer ensuite le quotient.

Exercice 2.18 Déterminer un polynôme $P(x)$ qui s'annule en $x = -1$, $x = 1$, $x = 4$ et en $x = 0$. Le noter sous sa forme développée. Existe-t-il plusieurs solutions à cette question ?

Exercice 2.19 Déterminer un polynôme $P(x)$ de degré trois vérifiant les quatre conditions suivantes :

- | | |
|------------------|-------------------------------------|
| i) $P(0) = 0$; | iii) il est divisible par $x + 2$; |
| ii) $P(1) = 0$; | iv) $P(3) = -6$; |

Exercice 2.20 Déterminer un polynôme $P(x)$ de degré quatre vérifiant les cinq conditions suivantes :

- | | |
|--|-----------------|
| i) il s'annule en $x = -2$; | iv) $P(2) = 0$ |
| ii) il est divisible par $x + 1$; | |
| iii) il admet le facteur x dans sa factorisation ; | v) $P(1) = -18$ |

Exercice 2.21 Factoriser les polynômes suivants :

a) $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

c) $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

b) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$

d) $x^6 + x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 14x^2 + 4x - 8$

Exercice 2.22 Résoudre les équations suivantes (en utilisant la factorisation).

a) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$

d) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$

b) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$

e) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$

c) $x^3 + 5x^2 - 8x - 48 = 0$

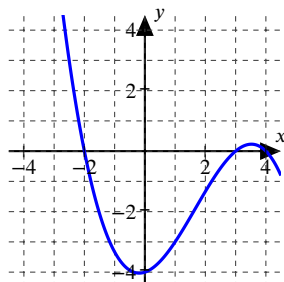
f) $35x^3 + 47x^2 + 13x + 1 = 0$

Exercice 2.23 On veut construire une boîte sans couvercle à partir d'une feuille de carton rectangulaire de 20 cm sur 30 cm en découpant de chaque coin un carré d'aire x^2 , et en relevant les côtés. Montrer qu'il n'y a qu'une seule façon de construire une telle boîte d'un volume de 1000 cm^3 .

Signe d'une fonction polynomiale

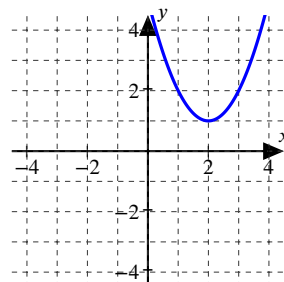
Exercice 2.24 Compléter le tableau des signes des fonctions représentées ci-dessous.

a)



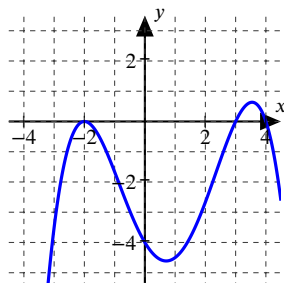
x	
$f(x)$	

c)



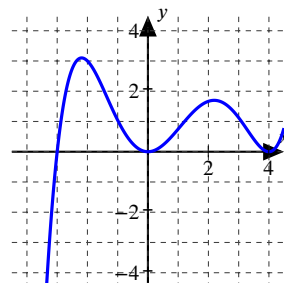
x	
$h(x)$	

b)



x	
$g(x)$	

d)

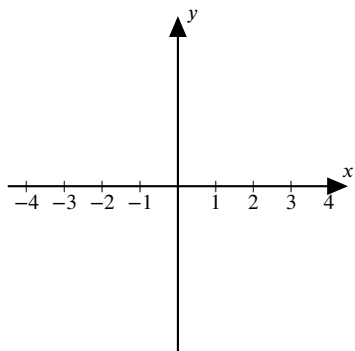


x	
$i(x)$	

Exercice 2.25 Faire une esquisse du graphe d'une fonction correspondant au tableau des signes.

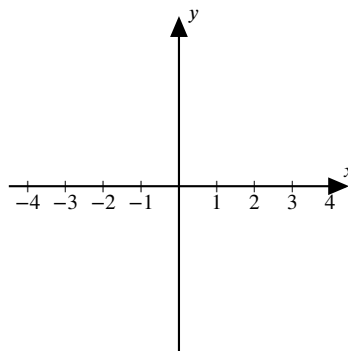
a)

x		-3		0		2	
$f(x)$	-	0	-	0	+	0	+



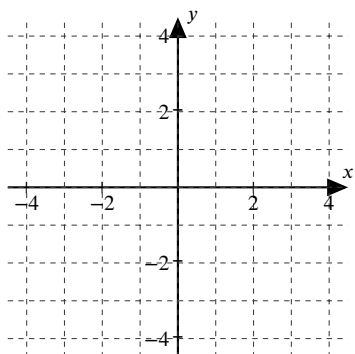
b)

x		-3		2	
$g(x)$	-	0	+	0	-



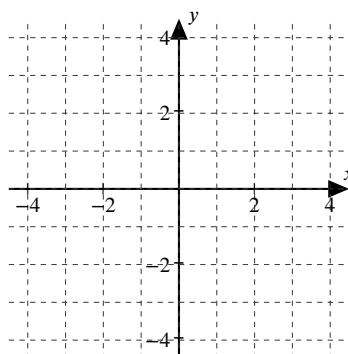
Exercice 2.26 Représenter le graphe de la fonction puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x) = -\frac{3}{4}x + 1$



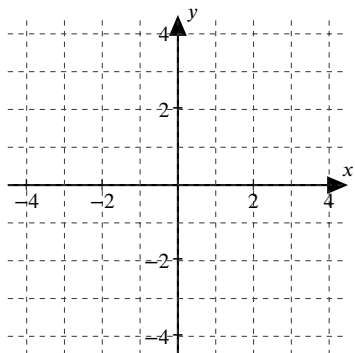
x	
$f(x)$	

c) $h(x) = -1$



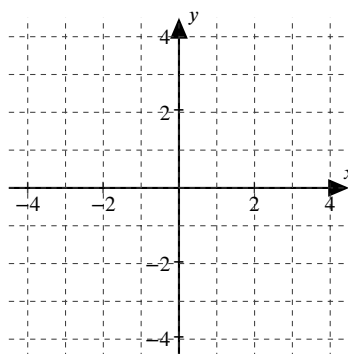
x	
$h(x)$	

b) $g(x) = x$



x	
$g(x)$	

d) $i(x) = 3x - 2$



x	
$i(x)$	

Exercice 2.27 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$7 - x$	

b)

x	
$4x - 7$	

c)

x	
$-\frac{1}{3}x + 2$	

d)

x	
$\frac{4}{5}x$	

e)

x	
13	

f)

x	
$-6 + x$	

Exercice 2.28 Trouver l'expression de deux fonctions affines différentes correspondant à ce tableau des signes :

x		4	
$f(x)$	+	0	-

Exercice 2.29 Remplir le tableau des signes .

a)

x	
3	
$5 - x$	
$2x + 3$	
$3(5 - x)(2x + 3)$	

b)

x	
$3x$	
$-5 + 4x$	
$3x(-5 + 4x)$	

c)

x	
-4	
$x + 4$	
$x - 6$	
$-4(x + 4)(x - 6)$	

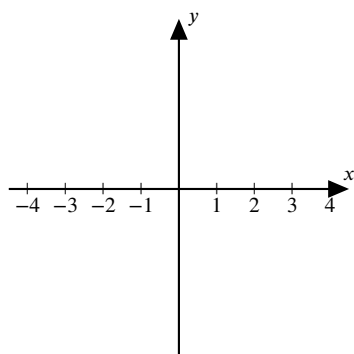
d)

x	
$-4x$	
$7x + 1$	
$-4x(7x + 1)$	

Exercice 2.30 Remplir le tableau des signes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

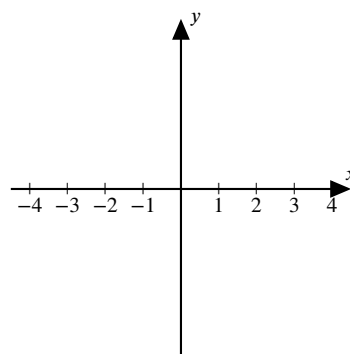
a)

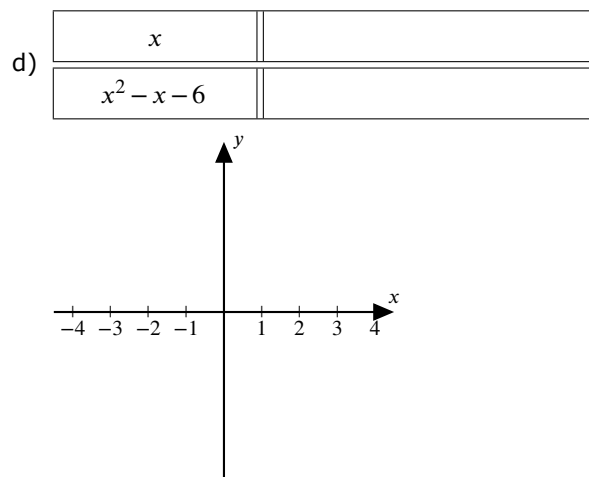
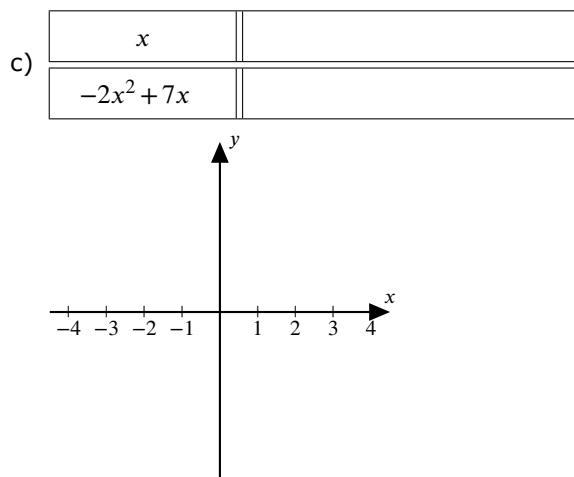
x	
$(x + 2)^2$	



b)

x	
$x^2 + 2$	





Exercice 2.31 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$-x^2 - 16x - 55$	

e)

x	
$x^2 + x + 9$	

b)

x	
$13x^2 + 12x - 1$	

f)

x	
$-9x^2 + 2x$	

c)

x	
$4x^2 + 12x + 9$	

g)

x	
$-x^2 - 9$	

d)

x	
$-5 + x^2$	

h)

x	
$-5x^2$	

Exercice 2.32 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$5 - x^2$	
$2x^2 + 3$	
$(5 - x^2)(2x^2 + 3)$	

b)

x	
$x + 3$	
$x^2 + x - 6$	
$(x + 3)(x^2 + x - 6)$	

Exercice 2.33 Étudier le signe des fonctions suivantes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

a) $5x(3x + 2)(7 - x)$

c) $(x + 7)^3$

b) $-4(x - 8)(5x + 1)(x^2 + 2)$

d) $x^2(-2x + 5)$

Exercice 2.34 Étudier le signe des fonctions suivantes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

a) $9x^3 - 18x^2 - x + 2$

c) $x^3 + x^2 - 2$

b) $16 - x^4$

d) $-25x^3 + 30x^2 - 9x$

Exercice 2.35 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$(5-x)^3$	

c)

x	
$x^3(x-2)^2$	

b)

x	
$(3x+7)^4$	

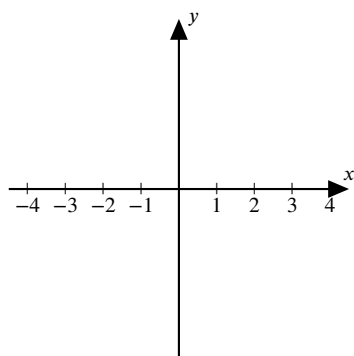
d)

x	
$-3x(x+4)^4(6-x)^2$	

Exercice 2.36 Remplir le tableau des signes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

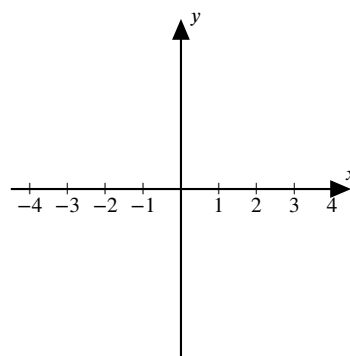
a)

x	
$(x-1)^2(x+2)^2$	



b)

x	
$(x-1)^2(x+2)^5$	



5.3 Fonctions rationnelles

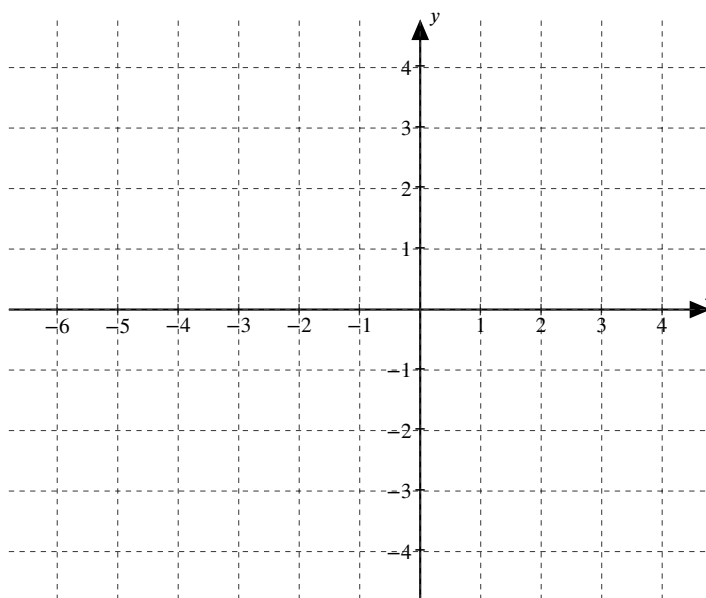
Généralités

Exercice 3.1 Soit la fonction définie par l'expression algébrique suivante :

$$f(x) = \frac{x-1}{2x+2}$$

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous et esquisser le graphe de f :

x	$f(x)$
-5	0,75
-4	0,83
-3	
-2	1,5
-1,5	
-1	
-0,5	-1,5
0	
1	
2	0,17
3	



b) Quel est l'ensemble de définition de f ?

c) Calculer $f(-0,999)$ et $f(-1,001)$.

d) Que se passe-t-il en $x = -1$?

e) Étudier le signe de f .

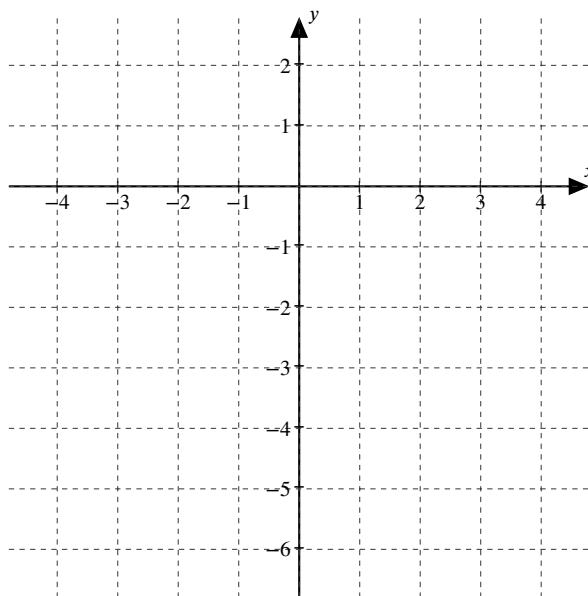
Exercice 3.2 Soit la fonction définie par l'expression algébrique suivante :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Compléter le tableau de valeurs ci dessous et esquisser le graphe de f .

x	$f(x)$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



c) Calculer $f(-1,999)$ et $f(-2,001)$.

d) Que se passe-t-il en $x = -2$?

e) Au graphe de quelle fonction, le graphe dessiné au point a) ressemble-t-il ? Quelle différence y a-t-il ?

f) Factoriser le numérateur et dénominateur de la fonction f . Que peut-on observer ?

g) Étudier le signe de f .

Exercice 3.3 Déterminer les ensembles de définition des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = \frac{x+3}{(x-2)^2}$

e) $j(x) = \frac{4x^2+12x+9}{x^2-8x-9}$

b) $g(x) = \frac{4x^2-36}{7x^2+4x}$

f) $k(x) = \frac{7x}{x^3+4x^2-9x-36}$

c) $h(x) = 9x^2 + 5x - 4$

g) $l(x) = \frac{x^3+4x^2-9x-36}{7x}$

d) $i(x) = \frac{x^3-9x}{x^2+9}$

h) $m(x) = \frac{x^3-125}{6x^3+11x^2+x-4}$

Simplification

Exercice 3.4 Soit la fraction $\frac{14}{22}$.

- Amplifier cette fraction par 2.
- Multiplier cette fraction par 2.
- Simplifier cette fraction par 2.
- Diviser cette fraction par 2.
- Dans quels cas n'a-t-on pas changé la valeur de la fraction ?

Exercice 3.5 Simplifier au maximum les fractions suivantes sans l'aide de la machine à calculer, puis vérifier les réponses à l'aide des touches "fractions" de la calculatrice.

a) $\frac{48}{64}$

b) $\frac{60}{96}$

c) $\frac{372}{24}$

d) $\frac{96}{432}$

e) $\frac{35}{245}$

f) $\frac{1540}{176}$

Exercice 3.6 Appliquer les transformations aux fractions rationnelles ci-dessous et réduire les polynômes. Déterminer l'ensemble de définition avant et après transformation.

a) Amplifier $\frac{x+2}{x-3}$ par $x+1$.

b) Amplifier $\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}$ par x .

c) Amplifier $\frac{x+2}{x-3}$ par -2 .

Exercice 3.7 Expliquer pourquoi ces simplifications sont fausses.

a) $\frac{2x+4}{2x+5} \neq \frac{4}{5}$

b) $\frac{5x^3}{6x^3+x} \neq \frac{5}{6+x}$

Exercice 3.8 Appliquer les transformations aux fractions rationnelles ci-dessous. Déterminer l'ensemble de définition avant et après transformation.

a) Simplifier $\frac{x^2-x}{x^4+3x^3-5x^2}$ par x .

b) Simplifier $\frac{x+1}{x^3+1}$ par $x+1$.

Exercice 3.9 Simplifier au maximum.

a) $\frac{x^2 + 2x}{5x^3 + 10x^2}$

d) $\frac{3x^2 + 15x}{7x^3 + 28x}$

b) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$

e) $\frac{12x^3(x+3)^2(x-2)^4}{18x^7(x+3)(x-2)^4}$

c) $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

f) $\frac{-51x^6y^3}{34x^2y^8}$

Exercice 3.10 Simplifier au maximum.

a) $\frac{3xy - 12y^2}{x - 4y}$

d) $\frac{6x^3 - 25x^2 + 21x + 10}{4x^2 - 20x + 25}$

b) $\frac{2 - x}{x - 2}$

e) $\frac{x^3 + 1000}{x^3 + 10x^2 - 100x - 1000}$

c) $\frac{(2 - x)^2}{(x - 2)^4}$

f) $\frac{x^4 + 6x^3 + 9x^2}{x^4 - 18x^2 + 81}$

Opérations de base

Exercice 3.11 Préciser l'ensemble de définition puis calculer et simplifier :

a) $\frac{2x+1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1}$

d) $\frac{3x+4}{x-2} - \frac{x^2-4x-8}{x^2-2x}$

b) $\frac{3x+6}{(x+2)^2} + 1$

e) $\frac{x^2-1}{x+1} + \frac{x}{x-1}$

c) $\frac{2x+1}{x^2+2x+1} - \frac{1}{x+1}$

f) $\frac{2x^2-4x-1}{x^2-2x+1} - \frac{x-3}{x-1}$

Exercice 3.12 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

a) $\frac{7}{2x-3} + \frac{9}{x+5}$

d) $\frac{x+5}{x^2+3x+2} + \frac{10}{x^2-4}$

b) $\frac{x-14}{x-2} + \frac{x+2}{x+14}$

e) $5 - \frac{2x-15}{x+3}$

c) $\frac{x+4}{x-2} + \frac{x^2-4x-8}{x^2-2x}$

f) $\frac{x-1}{x-7} - \frac{x+4}{x+2}$

Exercice 3.13 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

$$a) \frac{x}{3x+6} - \frac{x^2}{x^2-4}$$

$$d) \frac{2x-1}{x^3-x^2-2x} - \frac{x}{x^3-2x^2}$$

$$b) \frac{6x+7}{x^3+6x^2-7x} - \frac{5}{x^2+6x-7}$$

$$e) \frac{6}{x^2-3x} - \frac{4}{x^2-2x}$$

$$c) \frac{3x}{x^2-x-2} - \frac{2x+3}{x^2+3x+2}$$

$$f) \frac{x+2}{x^3-x} - \frac{x+4}{x^3-2x^2-x+2}$$

Exercice 3.14 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

$$a) \frac{x+2}{x^2+7x+10} + \frac{x^2-15}{x^2-25} - \frac{x-3}{x^2-8x+15}$$

$$b) \frac{x-3}{x^2+6x+8} - \frac{x-2}{x^2+7x+12} + \frac{5}{x^2+5x+6}$$

Exercice 3.15 Préciser l'ensemble de définition, effectuer les opérations et simplifier au maximum.

$$a) \frac{x+1}{3x^2} \cdot \frac{9x}{(x+1)^2}$$

$$b) \frac{x^2-4}{x^2} \cdot \frac{x^3-x}{2x-4}$$

Exercice 3.16 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

$$a) \frac{x^2-2x-3}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^3-27}$$

$$c) \frac{x^2-1}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x^2-4}{2x+2}$$

$$b) \frac{x+7}{2x} \cdot \frac{4x^2}{14x+98}$$

$$d) \frac{x^2+5x+6}{2x^3+x^2-18x-9} \cdot \frac{2x^2-5x-3}{2x+4}$$

Exercice 3.17 Préciser l'ensemble de définition, effectuer les opérations et simplifier au maximum.

$$a) \frac{x-2}{x-1} : \frac{2x-4}{x^2-1}$$

$$c) \frac{x^2+2x-3}{2x} : \frac{x^4-18x^2+81}{x^2-x}$$

$$b) \frac{3x^2}{x^3-1} : \frac{x^3}{x-1}$$

$$d) \frac{x^4+3x^2-4}{x+3} : \frac{x^3+x^2+4x+4}{x}$$

Exercice 3.18 Préciser l'ensemble de définition puis calculer et simplifier :

$$a) \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-2x}$$

$$b) \frac{x-2}{x^5} : \left(\frac{x^2-4}{x^3} \cdot \frac{2}{x^2+2x} \right)$$

Exercice 3.19 Préciser l'ensemble de définition puis calculer et simplifier :

$$a) \frac{6x^2+2x}{27x^3+1} \cdot \frac{9x^2-3x+1}{4x^2}$$

$$d) \frac{x}{x+2} + \frac{x+5}{2}$$

$$g) \frac{x-4}{x^2-4} - \frac{1}{3x+6}$$

$$b) \frac{x+4}{x-5} - \frac{x+3}{5-x}$$

$$e) \frac{x^2-6x+8}{x^3-5x^2+2x+8}$$

$$h) \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+5x+4}$$

$$c) \frac{6x^2+12x}{x^2+x-20} : \frac{9x^5+72x^2}{x^2-9x+20}$$

$$f) \frac{x^3-2x^2}{x+3} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^3-4x}$$

$$i) \frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1}$$

Résolution d'équations rationnelles**Exercice 3.20** Préciser l'ensemble de définition puis résoudre les équations suivantes.

a) $\frac{1-x}{2x} - \frac{x-1}{x} = 0$

d) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+5}{x^2+x-2} = 0$

b) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{2x+18}{x^2-9} = 0$

e) $\frac{2x+1}{x+2} = \frac{-1}{x-1}$

c) $\frac{3x-7}{2x-6} = \frac{1}{2}$

f) $\frac{2}{x-1} + \frac{5-3x}{x-x^2} = 0$

Exercice 3.21 Préciser l'ensemble de définition puis résoudre les équations suivantes.

a) $\frac{(2x+3)(4x-1)}{7x+2} = 0$

d) $\frac{4}{x^2-3x} = \frac{x-1}{x-3} - 1$

b) $\frac{12}{x} = 7 + \frac{12}{1-x}$

e) $\frac{3-t}{3t} = \frac{1}{2t} - \frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{x} = \frac{1}{6} - \frac{1}{x+5}$

f) $\frac{2-3x}{2x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{7}{3}$

Exercice 3.22 La somme de CHF 144'000.– est partagée entre les 14 héritiers, qui sont les enfants et les petits-enfants du défunt. La moitié de la somme est répartie à parts égales entre les enfants. Les petits-enfants reçoivent chacun CHF 3000.– de moins que les enfants.

Combien y a-t-il d'enfants et de petits-enfants ? Combien chacun reçoit-il ?

Exercice 3.23 Un voyage d'études a un coût fixe CHF 14'520.–. Cette somme est répartie à parts égales entre les participants. Malheureusement, 2 étudiants ont arrêté leurs études en cours d'année, sans avoir payé quoi que ce soit. Le prix par participant a donc dû être majoré de CHF 55.–.

Combien de personnes vont participer à ce voyage ? Combien chacun va-t-il payer ?

Exercice 3.24 Je me suis lancé dans l'élevage de poules. J'en ai acheté pour un montant de CHF 210.–. Après que le renard en ait mangé 3, j'ai décidé d'abandonner et de les revendre. Pour ne pas perdre trop d'argent, je les ai vendues CHF 4.– de plus chacune. Du coup, je n'ai perdu qu'un franc.

Combien de poules ai-je achetées et à quel prix ?

Signe d'une fonction rationnelle**Exercice 3.25** Donner l'ensemble de définition et étudier le signe de la fonction.

a) $\frac{x+4}{6-x}$

c) $\frac{-x^2+8x-7}{2x-11}$

b) $\frac{2(x+1)^3}{x^4}$

d) $\frac{x+3}{81-x^4}$

5.4 Inéquations

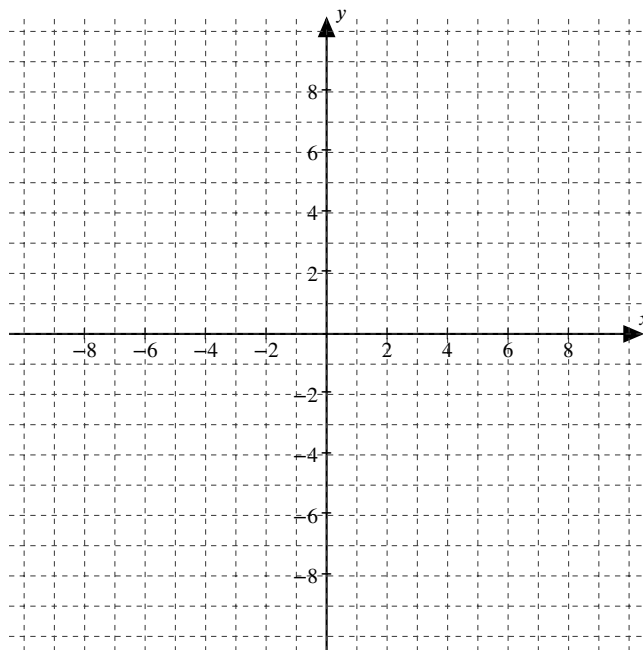
Inéquations du premier degré à une inconnue

Exercice 4.1 Résoudre ces inéquations par voie graphique.

a) $\frac{2}{3}x - 5 \leq -x + 5$

b) $4x + 5 \geq \frac{2}{3}x - 5$

c) $4x + 5 < -x + 5$

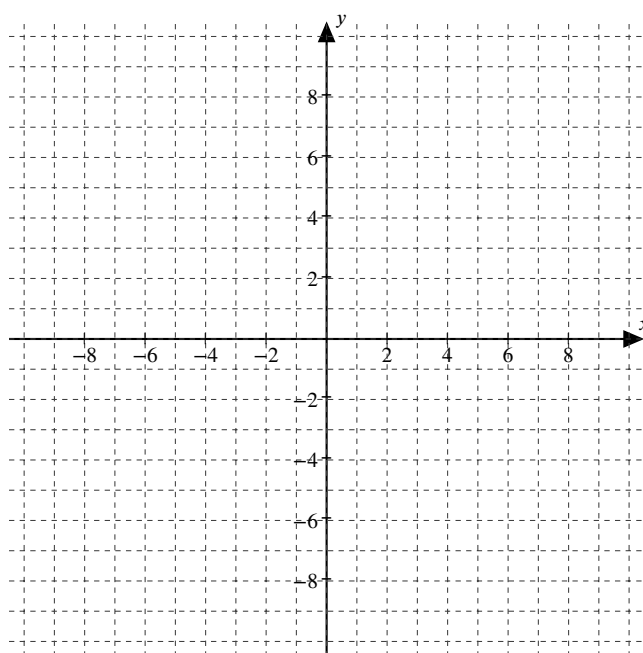


Exercice 4.2 Résoudre ces inéquations par voie graphique.

a) $\frac{1}{2}x + 2 > -x - 4$

b) $\frac{7}{2}x - 4 \leq -x - 4$

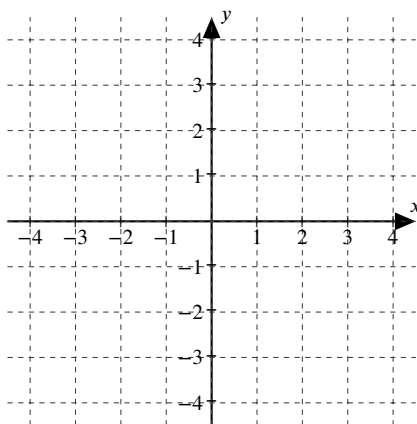
c) $\frac{1}{2}x + 2 > \frac{7}{2}x - 4$



Exercice 4.3 Représenter graphiquement les fonctions définies par les expressions algébriques ci-dessous sur un même graphique.

$$f(x) = -2x + 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x - 2$$



Résoudre ensuite les équations et inéquations suivantes :

a) $f(x) = 0$

c) $f(x) = x$

e) $f(x) > g(x)$

b) $f(x) = g(x)$

d) $f(x) < 0$

f) $f(x) \geq x$

Exercice 4.4 Résoudre algébriquement les inéquations ci-dessous.

a) $-2 \leq 2x$

d) $3x + 5 \leq 4x$

g) $2x > 5x$

b) $-2 \leq -2x$

e) $-3x \geq 3x - 6$

h) $-4x + 1 < -2$

c) $x + 7 > 17$

f) $8x + 3 < 33 + 6x$

i) $2x + 3 \leq -5 - 3x$

Exercice 4.5 Résoudre algébriquement les inéquations ci-dessous.

a) $x - 6 < \frac{8}{5}x$

d) $\frac{2}{3}x \leq -\frac{5x+30}{2}$

g) $\frac{3}{4}(12x - \frac{8}{15}) \geq 6x - 7$

b) $\frac{2}{3}x < 6(-x + 5)$

e) $2(x - 6) < \frac{8}{5}x + 2$

h) $x^2 - 12x + 36 < x^2 + 4x + 4$

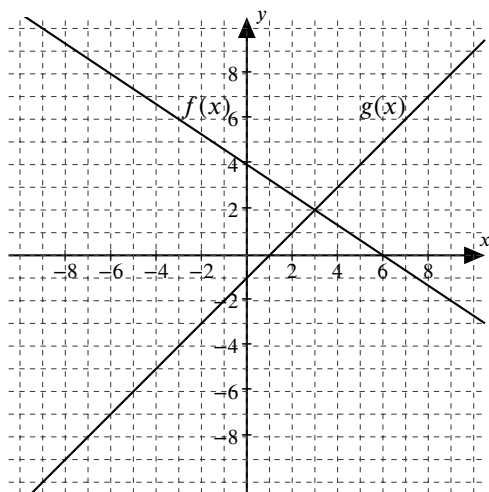
c) $\frac{1}{3}x - 1 \leq \frac{8}{5}x$

f) $-4x > \frac{24}{7}$

i) $4x + 4 > \frac{-x+30}{3} - 1$

Exercice 4.6

- a) Résoudre $f(x) \leq g(x)$
pour $f(x)$ et $g(x)$ représentés ci-dessous.



- b) Résoudre cette même inéquation algébriquement.

Exercice 4.7 Résoudre les inéquations suivantes :

- a) $5 - 2x \geq 1$ c) $-(7 - 2x) - 8 \geq 0$ e) $2x - \frac{x-5}{3} > 4 - \frac{2x-2}{2}$
 b) $-4x - 5 < x + 5$ d) $1 - 3x \leq \frac{1}{3}(8 + 2x)$ f) $\frac{4-x}{2} - \frac{x-3}{5} \geq x - \frac{x+2}{3}$

Exercice 4.8 Au moment d'acheter une nouvelle grue, une entreprise de construction a le choix entre :

- Le modèle A : CHF 50'000.– à l'achat, CHF 2'000.–/an pour l'entretien,
- Le modèle B : CHF 40'000.– à l'achat, CHF 4'000.–/an pour l'entretien.

Après combien d'années, le modèle A sera-t-il moins cher que le modèle B ?

Exercice 4.9 Les températures sur les échelles de Fahrenheit et de Celsius sont liées par l'égalité suivante :

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Quelles sont les valeurs en degrés Fahrenheit qui correspondent aux températures comprises entre 30 et 40 degrés Celsius ?

Exercice 4.10 Résoudre les inéquations ci-dessous.

- a) $2x - 6 < 2(x - 3)$ e) $2x - 6 \leq 2(x - 3)$
 b) $2x - 6 < 2x - 3$ f) $2x - 6 \leq 2x - 3$
 c) $2x - 6 > 2(x - 3)$ g) $2x - 6 \geq 2(x - 3)$
 d) $2x - 6 > 2x - 3$ h) $2x - 6 \geq 2x - 3$

Exercice 4.11 Résoudre algébriquement les inéquations ci-dessous.

- | | |
|--------------------|---------------------------|
| a) $-8x \geq -8$ | e) $-8x \geq -8x + 8$ |
| b) $-8x \geq -8x$ | f) $-8x + 8 \geq -8x$ |
| c) $-8x + 8 > -8x$ | g) $-8x + 8 > -8x + 8$ |
| d) $-8x > -8x + 8$ | h) $-8x + 8 \geq -8x + 8$ |

Autres inéquations

Exercice 4.12 Résoudre les inéquations suivantes :

- | | | | |
|----------------------|--------------------------|---------------------|-------------------|
| a) $x^2 - 9x \leq 0$ | b) $-2x^2 + 7x + 15 < 0$ | c) $x^2 + 4 \geq 0$ | d) $x^2 + 4x < 1$ |
|----------------------|--------------------------|---------------------|-------------------|

Exercice 4.13 Résoudre les inéquations suivantes :

- | | | | |
|--------------|--------------------|----------------------|-------------------------|
| a) $x^2 < x$ | b) $x^2 - 3x > -2$ | c) $9(x-1) < x(x+3)$ | d) $(x-2)^2 > 4(x-1)^2$ |
|--------------|--------------------|----------------------|-------------------------|

Exercice 4.14 Résoudre les inéquations ci-dessous :

- | | | |
|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $-2x^3 + 2x^2 + 4x \leq 0$ | c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \geq 0$ | e) $-x^3 + 5x^2 - 3x + 15 > 0$ |
| b) $8x^3 - 27 > 0$ | d) $x^3 + 7x^2 - 4x - 28 < 0$ | f) $10x^2 + 54x \geq 6x^3 + 90$ |

Exercice 4.15 Résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|---|---------------------------------|
| a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0$ | e) $(x^3 - x^2 + x)(2 - x) > 0$ |
| b) $x^3 - 2x^2 - 15x \geq 0$ | f) $-x^3 + 4x < 0$ |
| c) $(x^2 - 4)(9 - x^2)(x^2 - x) \leq 0$ | g) $8x^3 - 4x^2 \leq 2x - 1$ |
| d) $(x + 2)^2(x - 1) < 0$ | h) $x^4 \geq 5x^2 - 4$ |

Exercice 4.16 Un météorologue a déterminé que la température T (en °F) pour une certaine période de 24 heures en hiver est donnée par la formule :

$$T(t) = \frac{1}{20}t(t-12)(t-24) \text{ pour } 0 \leq t \leq 24$$

où t est le temps écoulé en heures depuis 6 heures du matin.

- Quand a-t-on $T(t) > 0$?
- Représenter le graphe de la fonction T .
- À quelle heure la température a-t-elle été inférieure à 32°F (= 0°C) ?

Exercice 4.17 Un troupeau de cent cerfs est introduit sur une petite île. Tout d'abord, le troupeau grandit rapidement, mais par la suite les ressources en nourriture baissent et la population diminue. Supposons que le nombre $N(t)$ de cerfs après t années soit donné par la fonction :

$$N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$$

- a) Quand a-t-on $N(t) \geq 0$?
- b) Déterminer quand la population de cerf va s'éteindre.
- c) Déterminer quand le troupeau de cerfs aura plus de 180 individus.

Exercice 4.18 Préciser l'ensemble de définition puis résoudre les inéquations suivantes.

- a) $\frac{x-1}{x+3} \leq 0$
- c) $\frac{2x+3}{(x-1)(x+2)} \leq 0$
- b) $\frac{(x-2)(x+2)}{x-1} \geq 0$
- d) $\frac{(x-2)(3-x)}{(4+x)(3x-1)} \leq 0$

Exercice 4.19 Préciser l'ensemble de définition puis résoudre les inéquations suivantes.

- a) $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2-1} \geq 0$
- e) $\frac{13}{x+4} \leq \frac{15}{2x-3}$
- b) $x > \frac{1}{x}$
- f) $\frac{x-1}{x^3} - \frac{x+1}{x^3-x^2} < \frac{3}{2x^2-x^3-x}$
- c) $\frac{4x-3}{x-1} \geq 2$
- g) $\frac{x^2+10x+16}{x-1} \geq 10$
- d) $\frac{6}{10-7x} < \frac{4}{5-3x}$
- h) $\frac{3x^2+12x+1}{2x^2+6x+1} \geq 2$

Exercice 4.20 Résoudre les inéquations suivantes.

- a) $x^2 + 15x + 44 \leq 0$
- c) $x^4 + 7x^2 + 19 \geq 10 + x^2$
- b) $\frac{7-x}{x} > 0$
- d) $\frac{7-x}{x} > 1$

Ensemble de définition d'une racine carrée

Exercice 4.21 Déterminer l'ensemble de définition.

- a) $\sqrt{x^2-9}$
- c) $\sqrt{(x-9)^3}$
- b) $\sqrt{\frac{1-5x}{x-3}}$
- d) $\sqrt{\frac{1}{x^2+4x+4}}$

6 Solutions

6.1 Réponses - Systèmes d'équations

-
- 1.1** a) $\mathcal{S} = \{(2; 3)\}$ b) $\mathcal{S} = \{(-1; -9)\}$ c) $\mathcal{S} = \{(-18; 21)\}$
-
- 1.2** a) $\mathcal{S} = \{(7; 12)\}$ b) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{76}{53}; \frac{28}{53}\right)\right\}$ c) $\mathcal{S} = \{(-6; 3)\}$
-
- 1.3** a) $\mathcal{S} = \{(1; -1)\}$ c) $\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{5}{12}; -\frac{7}{6}\right)\right\}$ e) $\mathcal{S} = \{(1; 0)\}$
 b) $\mathcal{S} = \{(-3; 3)\}$ d) $\mathcal{S} = \{(3; -1)\}$ f) $\mathcal{S} = \{(4; -1)\}$
-
- 1.4** a) $\mathcal{S} = \{(x; y) \mid x + 2y = 5\} = \{(5 - 2y; y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ c) $\mathcal{S} = \{(x; y) \mid 2x - 3y = 5\} = \{(x; \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}) \mid x \in \mathbb{R}\}$
 b) $\mathcal{S} = \emptyset$
-
- 1.5** a) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{6}; -\frac{21}{2}\right)\right\}$ c) $\mathcal{S} = \{(x; y) \mid x + y = -2\} = \{(x; -x - 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
 b) $\mathcal{S} = \emptyset$
-
- 1.6** a) $\mathcal{S} = \emptyset$ b) $\mathcal{S} = \{(3; 2)\}$ c) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{7}{12}; \frac{4}{9}\right)\right\}$
-
- 1.7** Il y a 35 poules et 15 lapins.
-
- 1.8** Pinocchio a dit 7 mensonges.
-
- 1.9** Le prix du kilomètre parcouru est de CHF 3,40 et la prise en charge de CHF 6,–.
-
- 1.10** Jean doit prévoir CHF 105,60. La redevance fixe est de CHF 40,– et la taxe variable de CHF 0,80/1'000 l.
-
- 1.11** Il y a 5,4 kg de couleur A et 6,6 kg de B.
-
- 1.12** Les solutions contiennent respectivement 15% et 10% de sel.
-
- 1.13** Les capitaux ont une valeur de CHF 100'000,– et CHF 10'000,–.
-

1.14	a) $\mathcal{S} = \{(24; 3); (-24; -3)\}$	d) $\mathcal{S} = \{(11; 5)\}$	g) $\mathcal{S} = \{(-2; 2); (-\frac{31}{2}; 11)\}$
	b) $\mathcal{S} = \{(13; 8); (-\frac{19}{3}; -\frac{34}{3})\}$	e) $\mathcal{S} = \{(9; 2); (-5; 16)\}$	h) $\mathcal{S} = \{(2; -5); (-2; -5)\}$
	c) $\mathcal{S} = \{(3; 10); (17; -4)\}$	f) $\mathcal{S} = \{(3; 2); (-1; -4)\}$	i) $\mathcal{S} = \{(4; -1); (1; -4)\}$

1.15	a) $\mathcal{S} = \{(-10; -5); (-10; 5); (10; -5); (10; 5)\}$	c) $\mathcal{S} = \{(1; 1); (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})\}$
	b) $\mathcal{S} = \{(-2; -1); (-2; 11); (4; 5 - \sqrt{39}); (4; 5 + \sqrt{39})\}$	

1.16	a) $\mathcal{S} = \{(2; 3; 14)\}$	c) $\mathcal{S} = \{(20; -10; 0)\}$	e) $\mathcal{S} = \{(-4; -6; 1)\}$
	b) $\mathcal{S} = \{(6; -10; 1)\}$	d) $\mathcal{S} = \{(2; -4; 3)\}$	f) $\mathcal{S} = \{(0; 7; 0)\}$

1.17	a) $\mathcal{S} = \{(\frac{1}{2}; 2; -\frac{1}{3})\}$	c) $\mathcal{S} = \{(5; 1; -\frac{4}{3})\}$	e) $\mathcal{S} = \{(\frac{1}{3}; 0; 8)\}$
	b) $\mathcal{S} = \{(\frac{4}{5}; -3; \frac{3}{2})\}$	d) $\mathcal{S} = \{(1; 6; 10)\}$	f) $\mathcal{S} = \{(5; 10; 15)\}$

1.18	a) $\mathcal{S} = \{(5; 1; -5)\}$	b) $\mathcal{S} = \{(3; 0; -2)\}$	c) $\mathcal{S} = \{(-2; -3; 4)\}$
-------------	-----------------------------------	-----------------------------------	------------------------------------

1.19 Prix par hectolitre : 140 Frs pour le froment, 90 Frs pour le seigle et 50 Frs pour l'avoine.

1.20 220 montées, 60 descentes, 460 allers-retours

1.21 blanc : 250 g, brun : 500 g et noir : 50 g

1.22 25 cm x 15 cm x 15 cm

1.23 248

1.24	a) $y = 2x^2 - 3x + 1$	c) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$
	b) $y = x^2 + 3x$	d) pas de parabole / une droite : $y = -2x + 5$

1.25	a) $y = x^2 - 4x + 7$	b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{11}{2}$
-------------	-----------------------	---

6.2 Réponses - Degrés 3 et plus

2.1	a) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$	b) $\mathcal{S} = \{2\}$	c) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{4}; 1; 9\right\}$	d) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{4}; 1; 3; -3\right\}$
2.2	a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ b) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ c) $x^3 + 8$	d) $8x^3 - 27$ e) $8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$ f) $1000c^3 - 300c^2 + 30c - 1$	g) $27x^3 + 9x^2 + x + \frac{1}{27}$ h) $x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 1$ i) $x^{30}y^{12} + 3x^{20}y^8 + 3x^{10}y^4 + 1$	
2.3	a) $(x-1)(x^2+x+1)$ b) $(4+5y)(16-20y+25y^2)$ c) $(x+1)^3$ d) $(x-5)^3$	e) $(2x+3)^3$ f) $(5x-1)(25x^2+5x+1)$ g) $(x-5)(x^2+5x+25)$ h) $(4x+3)(16x^2-12x+9)$	i) Ce n'est pas un produit remarquable.	
2.4	a) $25x^2 + 40x + 16$ b) $25x^4 + 40x^2 + 16$ c) $25x^6 + 40x^3 + 16$	d) $z^2 - 225$ e) $z^4 - 225$ f) $z^{20} - 225$	g) $x^2 + 19x - 66$ h) $x^4 + 19x^2 - 66$ i) $x^2y^2 + 19xy - 66$	
2.5	a) $(x^2+25)(x-5)(x+5)$ b) $(x+2)(x-2)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$ c) $(x^2+11)(2x^2+1)$ d) $(3x+2)^2(3x-2)^2$ e) $(z+3)(z-3)(z^2+1)$	f) $(x+1)(x-1)(x^2+9)$ g) $5(x+3)(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ h) $-x^3(7x^2+6)(x+1)(x-1)$ i) $\frac{1}{3}(x^2+9)(x-3)(x+3)$		
2.6	a) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ b) $\mathcal{S} = \{-1\}$	c) $\mathcal{S} = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ d) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; -1\right\}$	e) $\mathcal{S} = \{0; -3\}$ f) $\mathcal{S} = \{-1; 1; -3; 3\}$	
2.7	a) $(x+5)(x^2+3)$ b) $(x+6)(x+2)(x-2)$ c) $(5z-8)(z-1)(z+1)$ d) $(x+8)(x+1)(x^2-x+1)$ e) $(x+1)(x+2)(x^2-2x+4)$	f) $(2w+3)(w-5)(w^2+5w+25)$ g) $-x^3(x+8)(2x+3)(4x^2-6x+9)$ h) $\frac{1}{11}(x+2)(x+11)(x-11)$ i) $10y^2(3y-2)(2y-1)(2y+1)$		
2.8	a) $\mathcal{S} = \{0; 2\}$ b) $\mathcal{S} = \{-2; -2; 3\}$ c) $\mathcal{S} = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$	d) $\mathcal{S} = \{0; 2\}$ e) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{3}; 0; 5\right\}$ f) $\mathcal{S} = \{-1; 0; 1; 9\}$	g) $\mathcal{S} = \{2-\sqrt{2}; 0; 2+\sqrt{2}\}$ h) $\mathcal{S} = \emptyset$ i) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$	
2.9	$P(n) = n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ Parmi les trois facteurs, il y a au moins un multiple de 2 et un multiple de 3.			
2.10	$z = -x - y$ $x^3 + x^3 + z^3 = x^3 + y^3 + (-x-y)^3 = -3x^2y - 3xy^2 = 3xy(-x-y) = 3xyz$			

2.11 a) $P(x) = (2x^2 + x + 3)(x + 1) + 2$

b) $P(x) = (4x^2 - 8x + 23)(x^2 + 2x - 3) + (-63x + 77)$

2.12 a) $(x^2 - 3x + 1)(x - 5)$

c) $(5x^2 + 3x + 5)(x^2 - 1) + (3x + 4)$

b) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 7)(x^2 + 2x - 1) + (20x - 8)$

d) $(3x^3 + 7x^2 - 5x + 1)(2x^2 - 3x + 2) + (x + 3)$

2.13 a) $(x^2 - 5x + 6)(3x^2 + 8x + 4)$

c) $(-\frac{2}{3})(3x^3 + x^2 - 1) + (\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{1}{3})$

b) $(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{15}{8})(2x - 3) + \frac{85}{8}$

2.14 $F(x) = (5x^2 - 3x + 1)(x^2 + 1) - x + 1 = 5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 2$

2.15 a) $(3x^3 - 2x^2 - 4x + 2)(x - 2) + 9$

c) $(3x^2 - 2x + 2)(x + 2) + 4$

b) $(x^2 - 3x + 1)(x - 5)$

d) $(x^3 + 3x^2 + x + 3)(x - 3) + 2$

2.16 $x^5 - 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) \Rightarrow$ reste nul

2.17 $\lambda = -6$ ou $\lambda = 4$

$\lambda = 4 : x^3 - 2x^2 - 2x + 8 \quad \lambda = -6 : x^3 + 8x^2 + 18x + 18$

2.18 $P(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x$ ou un multiple de ce polynôme.

2.19 $P(x) = -\frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x$

2.20 $P(x) = 3x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 12x$

2.21 a) $(x - 3)(x + 5)(x^2 + x + 1)$

c) $(2x + 1)(x - 2)(x + 3)$

b) $(3x - 1)(x - 1)(x + 2)$

d) $(x + 2)^2(x - 2)(x + 1)(x - 1)^2$

2.22 a) $\mathcal{S} = \{-4; -3; 4\}$

c) $\mathcal{S} = \{-4; 3\}$

e) $\mathcal{S} = \{-3; 2\}$

b) $\mathcal{S} = \{1; 3; 5\}$

d) $\mathcal{S} = \{2; 3; 4\}$

f) $\mathcal{S} = \{-1; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{7}\}$

$x = 5$ et $x = 10 \pm \sqrt{50}$.

2.23 On élimine la solution négative et celle qui dépasse la moitié de la largeur de la feuille.

Il ne reste donc que $x = 5$ cm.

2.24

a)

x		-2		3		4	
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-

b)

x		-2		3		4	
$g(x)$	-	0	-	0	+	0	-

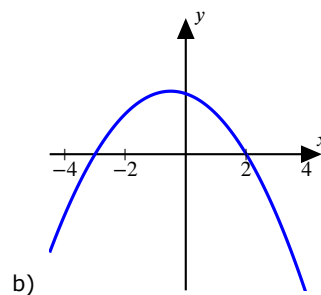
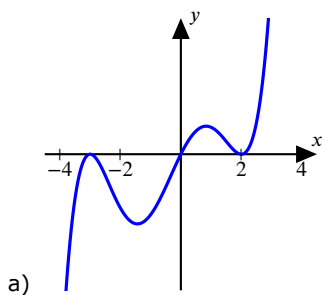
c)

x							
$h(x)$			+				

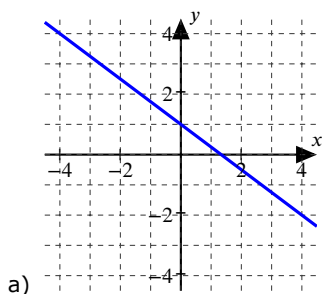
d)

x		-3		0		4	
$i(x)$	-	0	+	0	+	0	+

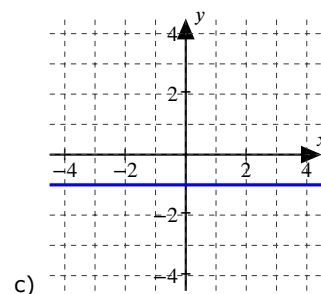
2.25



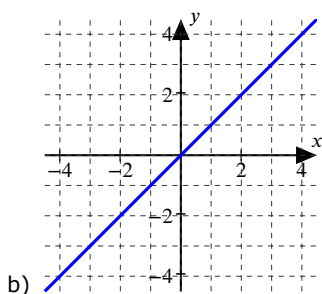
2.26



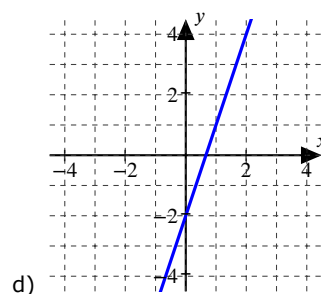
x		$\frac{4}{3}$	
$f(x)$	+	0	-



x			
$h(x)$	-		



x		0	
$g(x)$	-	0	+



x		$\frac{2}{3}$	
$i(x)$	-	0	+

2.27

a)

x		7	
$7-x$	+	0	-

b)

x		$\frac{7}{4}$	
$4x-7$	-	0	+

c)

x		6	
$-\frac{1}{3}x+2$	+	0	-

d)

x		0	
$\frac{4}{5}x$	-	0	+

e)

x			
13		+	

f)

x		6	
$-6+x$	-	0	+

2.28 Par exemple $f(x) = 4 - x$ ou $f(x) = 8 - 2x$ ou $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ ou ...

2.29

a)

x		$-\frac{3}{2}$		5	
$3(5-x)(2x+3)$	-	0	+	0	-

b)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$\frac{5}{4}$</td><td></td></tr><tr><td>$3x(-5+4x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x		0		$\frac{5}{4}$		$3x(-5+4x)$	+	0	-	0	+
	x		0		$\frac{5}{4}$								
$3x(-5+4x)$	+	0	-	0	+								

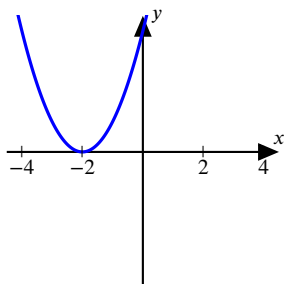
c)

x		-4		6	
$-4(x+4)(x-6)$	$-$	0	$+$	0	$-$

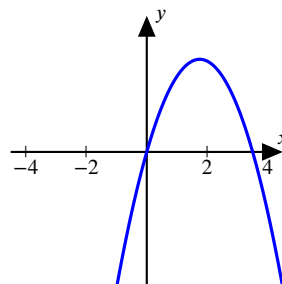
d)

x		$-\frac{1}{7}$		0	
$-4x(7x+1)$	-	0	+	0	-

a)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>-2</td><td></td></tr><tr><td>$(x+2)^2$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table>	x		-2		$(x+2)^2$	$+$	0	$+$
x		-2							
$(x+2)^2$	$+$	0	$+$						

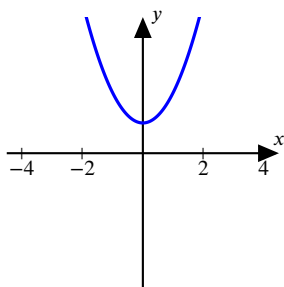


c)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$\frac{7}{2}$</td><td></td></tr><tr><td>$-2x^2+7x$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		0		$\frac{7}{2}$		$-2x^2+7x$	-	0	+	0	-
	x		0		$\frac{7}{2}$								
$-2x^2+7x$	-	0	+	0	-								

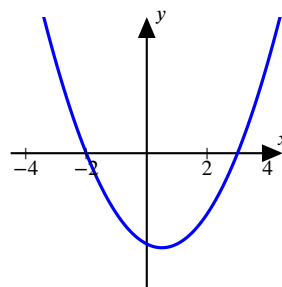


2.30

b)	<table><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>x^2+2</td><td>+</td></tr></table>	x		x^2+2	+
	x				
x^2+2	+				



d)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>-2</td><td></td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>$x^2 - x - 6$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table>	x		-2		3		$x^2 - x - 6$	$+$	0	$-$	0	$+$
x		-2		3									
$x^2 - x - 6$	$+$	0	$-$	0	$+$								



2.31

a)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>-11</td><td></td><td>-5</td><td></td></tr><tr><td>$-x^2 - 16x - 55$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		-11		-5		$-x^2 - 16x - 55$	-	0	+	0	-
x		-11		-5									
$-x^2 - 16x - 55$	-	0	+	0	-								

b)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>$\frac{1}{13}$</td><td></td></tr><tr><td>$13x^2+12x-1$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table>	x		-1		$\frac{1}{13}$		$13x^2+12x-1$	$+$	0	$-$	0	$+$
	x		-1		$\frac{1}{13}$								
$13x^2+12x-1$	$+$	0	$-$	0	$+$								

c)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>$-\frac{3}{2}$</td><td></td></tr><tr><td>$4x^2+12x+9$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table>	x		$-\frac{3}{2}$		$4x^2+12x+9$	$+$	0	$+$
	x		$-\frac{3}{2}$						
$4x^2+12x+9$	$+$	0	$+$						

d)

x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
$-5+x^2$	+	0	-	0	+

e)	x	
	x^2+x+9	+

f)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$\frac{2}{9}$</td><td></td></tr><tr><td>$-9x^2+2x$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		0		$\frac{2}{9}$		$-9x^2+2x$	-	0	+	0	-
x		0		$\frac{2}{9}$									
$-9x^2+2x$	-	0	+	0	-								

g)	x	
	$-x^2 - 9$	-

h)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>$-5x^2$</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		0		$-5x^2$	-	0	-
	x		0						
$-5x^2$	-	0	-						

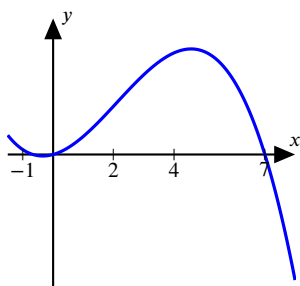
2.32

a)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>$-\sqrt{5}$</td><td></td><td>$\sqrt{5}$</td><td></td></tr><tr><td>$(5-x^2)(2x^2+3)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$(5-x^2)(2x^2+3)$	-	0	+	0	-
x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$									
$(5-x^2)(2x^2+3)$	-	0	+	0	-								

b)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>-3</td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>$(x+3)(x^2+x-6)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table>	x		-3		2		$(x+3)(x^2+x-6)$	$-$	0	$-$	0	$+$
	x		-3		2								
$(x+3)(x^2+x-6)$	$-$	0	$-$	0	$+$								

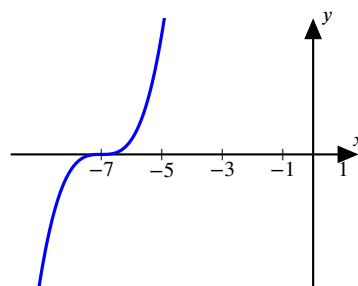
a)

x		$-\frac{2}{3}$		0		7	
$5x(3x+2)(7-x)$	+	0	-	0	+	0	-



c)

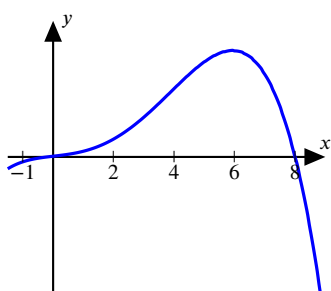
x		-7	
$(x+7)^3$	-	0	+



2.33

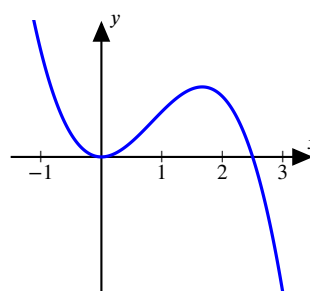
b)

x		$-\frac{1}{5}$		8	
$-4(x-8)(5x+1)(x^2+2)$	-	0	+	0	-



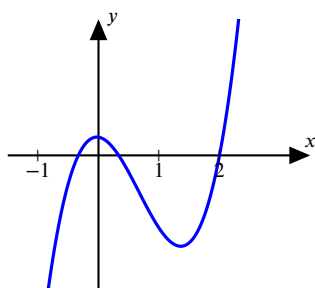
d)

x		0		$\frac{5}{2}$	
$x^2(-2x+5)$	+	0	+	0	-



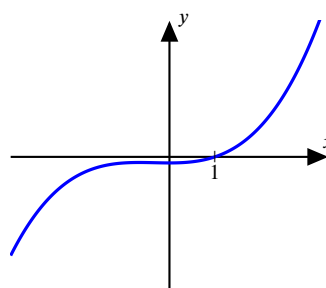
a)

x		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		2	
$(3x+1)(3x-1)(x-2)$	-	0	+	0	-	0	+



c)

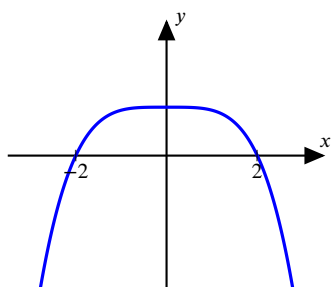
x		1	
$(x-1)(x^2+2x+2)$	-	0	+



2.34

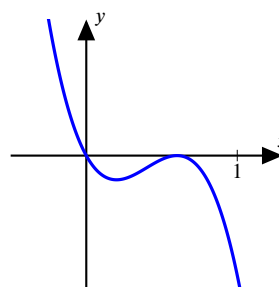
b)

x		-2		2	
$(2+x)(2-x)(4+x^2)$	-	0	+	0	-



d)

x		0		$\frac{3}{5}$	
$-x(5x-3)^2$	+	0	-	0	-



2.35

a)

x		5	
$(5-x)^3$	+	0	-

b)

x		$-\frac{7}{3}$	
$(3x+7)^4$	+	0	+

c)

x		0		2	
$x^3(x-2)^2$	-	0	+	0	+

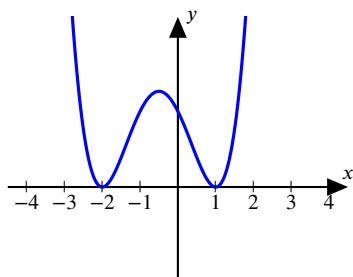
d)

x		-4		0		6	
$-3x(x+4)^4(6-x)^2$	+	0	+	0	-	0	-

2.36

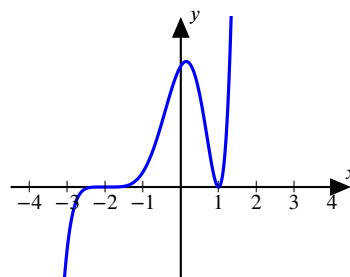
a)

x		-2		1	
$(x-1)^2(x+2)^2$	+	0	+	0	+



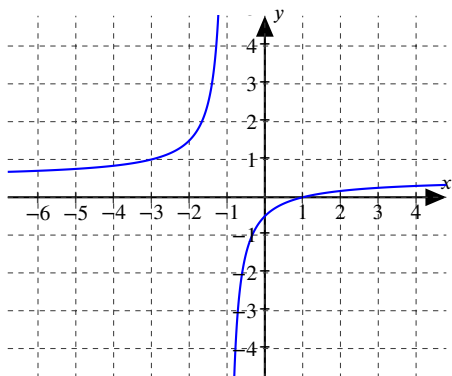
b)

x		-2		1	
$(x-1)^2(x+2)^5$	-	0	+	0	+



6.3 Réponses - Fonctions rationnelles

3.1



a)

$$f(-3) = 1 \quad f(-1,5) = 2,5 \quad f(-1) \text{ non défini}$$

$$f(0) = -0,5 \quad f(1) = 0 \quad f(3) = 0,25$$

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $f(-0,999) = -999,5$ et $f(-1,001) = 1000,5$ d) La fonction n'est pas définie lorsque $x = -1$. Il y a un saut de $+\infty$ à $-\infty$. C'est une asymptote verticale.

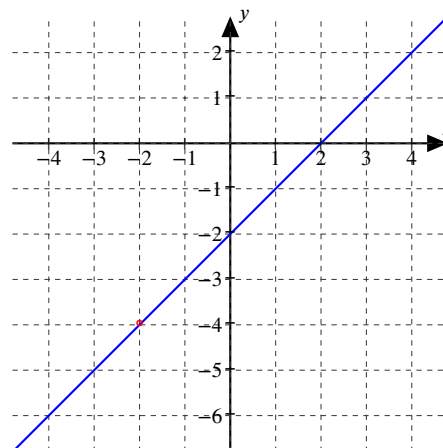
e)

		-1		1	
$f(x)$	+		-	0	+

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-6	-5	-	-3	-2	-1	0	1	2



3.2

c) $f(-1,999) = -3,999$ et $f(-2,001) = -4,001$

d) La fonction n'est pas définie lorsque $x = -2$. Elle s'approche de -4 sans l'atteindre. Il y a un trou $(-2; -4)$.

e) $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2}$. Si on simplifie cette fraction, il reste $x-2$.

f) Il est identique au graphe de la fonction affine

$g(x) = x - 2$, sauf pour $x = -2$.

g)

	-2	2
$f(x)$	-	- 0 +

3.3

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

d) $D_i = \mathbb{R}$

g) $D_l = \mathbb{R}^*$

b) $D_g = \mathbb{R}^* \setminus \left\{-\frac{4}{7}\right\}$

e) $D_j = \mathbb{R} \setminus \{9; -1\}$

h) $D_m = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; -\frac{4}{3}; -1\right\}$

c) $D_h = \mathbb{R}$

f) $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3; -4\}$

3.4

a) $\frac{28}{44}$

c) $\frac{7}{11}$

e) en amplifiant et en simplifiant

b) $\frac{28}{22} = \frac{14}{11}$

d) $\frac{14}{44} = \frac{7}{22}$

3.5

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{31}{2}$

d) $= \frac{2}{9}$

e) $\frac{1}{7}$

f) $\frac{35}{4}$

3.6

a) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$

b) $\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-3x}$

c) $\frac{-2x-4}{-2x+6}$

Avant : $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Avant : $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Avant : $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Après : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$

Après : $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

Après : $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

3.7

a) Par exemple pour $x = 1$: $\frac{6}{7} \neq \frac{4}{5}$

b) Par exemple pour $x = 10$: $\frac{5000}{6010} = \frac{5}{16}$ Il faut factoriser pour pouvoir simplifier.

3.8

a) $\frac{x-1}{x^3+3x^2-4x}$

b) $\frac{1}{x^2-x+1}$

Avant : $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0; 1\}$

Avant : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Après : $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0; 1\}$

Après : $D = \mathbb{R}$

3.9	a) $\frac{1}{5x}$	c) $\frac{x+1}{x-1}$	e) $\frac{2(x+3)}{3x^4}$
	b) $\frac{x-2}{x+2}$	d) $\frac{3(x+5)}{7(x^2+4)}$	f) $-\frac{3x^4}{2y^5}$
3.10	a) $3y$	c) $\frac{1}{(x-2)^2}$	e) $\frac{x^2-10x+100}{(x-10)(x+10)}$
	b) -1	d) $\frac{(3x+1)(x-2)}{2x-5}$	f) $\frac{x^2}{(x-3)^2}$
3.11	a) $\frac{2}{x-1}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$	c) $\frac{x}{(x+1)^2}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	e) $\frac{x^2-x+1}{x-1}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
	b) $\frac{x+5}{x+2}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$	d) $\frac{2(x+2)^2}{x(x-2)}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$	f) $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
3.12	a) $\frac{25x+8}{(2x-3)(x+5)}$	d) $\frac{x^2+13x}{(x+1)(x+2)(x-2)} = \frac{x(x+13)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$	
	b) $\frac{2x^2-200}{(x-2)(x+14)} = \frac{2(x+10)(x-10)}{(x-2)(x+14)}$	e) $\frac{3(x+10)}{(x+3)}$	
	c) $\frac{2x^2-8}{x(x-2)} = \frac{2(x+2)}{x}$	f) $\frac{4x+26}{(x+2)(x-7)} = \frac{2(2x+13)}{(x+2)(x-7)}$	
3.13	a) $\frac{-2x^2-2x}{3(x+2)(x-2)} = \frac{-2x(x+1)}{3(x+2)(x-2)}$	d) $\frac{x^2-2x}{x^2(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$	
	b) $\frac{x+7}{x(x-1)(x+7)} = \frac{1}{x(x-1)}$	e) $\frac{2}{(x-3)(x-2)}$	
	c) $\frac{x^2+7x+6}{(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{x+6}{(x-2)(x+2)}$	f) $\frac{-4}{x(x-1)(x-2)}$	
3.14	a) $\frac{x^3+2x^2-25x-50}{(x+5)(x+2)(x-5)} = 1$	b) $\frac{5x+15}{(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{5}{(x+2)(x+4)}$	
3.15	a) $D = \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{3}{x(x+1)}$	b) $D = \mathbb{R}^* \setminus \{2\}$
			$\frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{2x}$
3.16	a) $\frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+3x+9)}$	c) $\frac{(x-1)(x-2)}{2(x+2)}$	
	b) $\frac{x}{7}$	d) $\frac{1}{2}$	
3.17	a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 2\}$	$\frac{x+1}{2}$	c) $D = \mathbb{R}^* \setminus \{-3; 3; 1\}$
	b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 0\}$	$\frac{3}{x(x^2+x+1)}$	$\frac{(x-1)^2}{2(x+3)(x-3)^2}$
3.18	a) $x-1$	$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 2\}$	b) $\frac{1}{2x}$
			$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$

3.19

a) $\frac{1}{2x}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}; 0\}$	d) $\frac{x^2+9x+10}{2(x+2)}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$	g) $\frac{2(x-5)}{3(x+2)(x-2)}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
b) $\frac{2x+7}{x-5}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$	e) $\frac{1}{x+1}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2; 4\}$	h) $\frac{(x+1)^2}{x+4}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; -1\}$
c) $\frac{2(x-5)}{3x(x+5)(x^2-2x+4)}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; -2; 0; 4; 5\}$	f) x $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; 0; 2\}$	i) $\frac{1-x}{x(x+1)}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$

3.20

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathcal{S} = \{1\}$	c) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ $\mathcal{S} = \{2\}$	e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ $\mathcal{S} = \emptyset$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$ $\mathcal{S} = \{-5\}$	d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ $\mathcal{S} = \{-3\}$	f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ $\mathcal{S} = \emptyset$

3.21

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{7}\}$ $\mathcal{S} = \{-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\}$	d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$ $\mathcal{S} = \{2\}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ $\mathcal{S} = \{\frac{3}{7}; 4\}$	e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathcal{S} = \{6\}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 0\}$ $\mathcal{S} = \{-3; 10\}$	f) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}; 1\}$ $\mathcal{S} = \{\frac{21-\sqrt{73}}{23}; \frac{21+\sqrt{73}}{23}\}$

3.22 6 enfants qui reçoivent CHF 12'000.– chacun et 8 petits-enfants qui reçoivent chacun CHF 9'000.–.

3.23 22 participants qui paieront CHF 660.– chacun.

3.24 14 poules à CHF 15.– chacune.

3.25

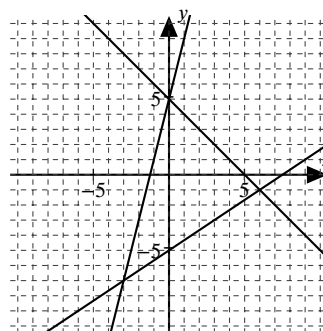
a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{6\}$	c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{11}{2}\}$																												
<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td></td> <td>-4</td> <td></td> <td>6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$\frac{x+4}{6-x}$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td> </td> <td>-</td> </tr> </table>	x		-4		6		$\frac{x+4}{6-x}$	-	0	+		-	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td></td> <td>1</td> <td></td> <td>11/2</td> <td></td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$\frac{-x^2+8x-7}{2x-11}$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td> </td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </table>	x		1		11/2		7		$\frac{-x^2+8x-7}{2x-11}$	+	0	-		+	0	-
x		-4		6																									
$\frac{x+4}{6-x}$	-	0	+		-																								
x		1		11/2		7																							
$\frac{-x^2+8x-7}{2x-11}$	+	0	-		+	0	-																						
b) $D_f = \mathbb{R}^*$	d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$																												
<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td></td> <td>-1</td> <td></td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$\frac{2(x+1)^3}{x^4}$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td> </td> <td>+</td> </tr> </table>	x		-1		0		$\frac{2(x+1)^3}{x^4}$	-	0	+		+	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td></td> <td>-3</td> <td></td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$\frac{x+3}{81-x^4}$</td> <td>+</td> <td> </td> <td>+</td> <td> </td> <td>-</td> </tr> </table>	x		-3		3		$\frac{x+3}{81-x^4}$	+		+		-				
x		-1		0																									
$\frac{2(x+1)^3}{x^4}$	-	0	+		+																								
x		-3		3																									
$\frac{x+3}{81-x^4}$	+		+		-																								

6.4 Réponses - Inéquations

a) $\mathcal{S} =]-\infty; 6]$

4.1 b) $\mathcal{S} = [-3; +\infty[$

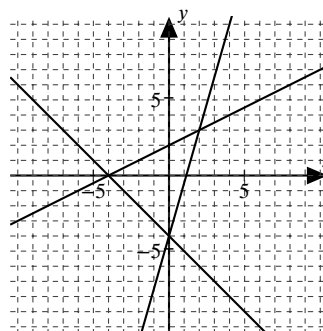
c) $\mathcal{S} =]-\infty; 0]$



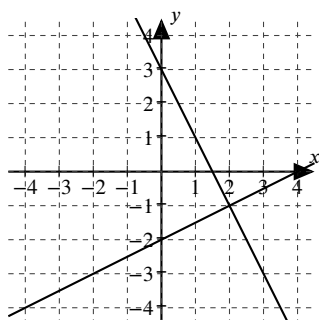
a) $\mathcal{S} =]-4; +\infty[$

4.2 b) $\mathcal{S} =]-\infty; 0]$

c) $\mathcal{S} =]-\infty; 2]$



4.3



a) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

b) $\mathcal{S} = \{2\}$

c) $\mathcal{S} = \{1\}$

d) $\mathcal{S} = \left] \frac{3}{2}; +\infty[\right]$

e) $\mathcal{S} =]-\infty; 2[$

f) $\mathcal{S} =]-\infty; 1]$

4.4

a) $\mathcal{S} = [-1; +\infty[$

b) $\mathcal{S} =]-\infty; 1]$

c) $\mathcal{S} =]10; +\infty[$

d) $\mathcal{S} = [5; +\infty[$

e) $\mathcal{S} =]-\infty; 1]$

f) $\mathcal{S} =]-\infty; 15[$

g) $\mathcal{S} =]-\infty; 0]$

h) $\mathcal{S} = \left] \frac{3}{4}; +\infty[\right]$

i) $\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{8}{5}]$

4.5

a) $\mathcal{S} =]-10; +\infty[$

b) $\mathcal{S} =]-\infty; \frac{9}{2}[$

c) $\mathcal{S} = \left[-\frac{15}{19}; +\infty[\right]$

d) $\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{90}{19}]$

e) $\mathcal{S} =]-\infty; 35[$

f) $\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{6}{7}[$

g) $\mathcal{S} = \left[-\frac{11}{5}; +\infty[\right]$

h) $\mathcal{S} =]2; +\infty[$

i) $\mathcal{S} = \left] \frac{15}{13}; +\infty[\right]$

4.6

a) $\mathcal{S} = [3; +\infty[$

b) $-\frac{2}{3}x + 4 \leq x - 1 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow$

$\mathcal{S} = [3; +\infty[$

4.7

a) $\mathcal{S} =]-\infty; 2]$

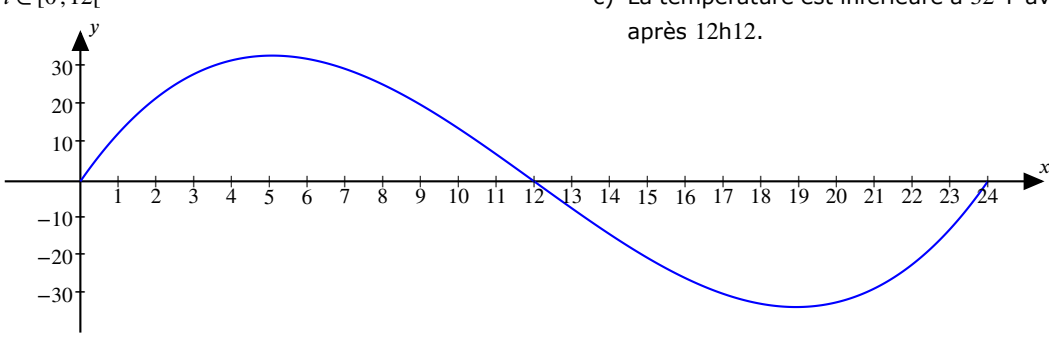
b) $\mathcal{S} =]-2; +\infty[$

c) $\mathcal{S} = \left[\frac{15}{2}; +\infty[\right]$

d) $\mathcal{S} = \left[-\frac{5}{11}; +\infty[\right]$

e) $\mathcal{S} = \left] \frac{5}{4}; +\infty[\right]$

f) $\mathcal{S} =]-\infty; \frac{98}{41}]$

- 4.8** x : nombre d'années depuis l'achat
 $2000x + 50'000 < 4000x + 40'000$
 $\mathcal{S} =]5; +\infty[$
Dès la sixième année.
-
- 4.9** $\frac{5}{9}(F - 32) > 30 \implies F > 86$ $\frac{5}{9}(F - 32) < 40 \implies F < 104$ Entre 86 et 104 degrés Fahrenheit.
-
- 4.10** a) $\mathcal{S} = \emptyset$ c) $\mathcal{S} = \emptyset$ e) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ g) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
b) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ d) $\mathcal{S} = \emptyset$ f) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ h) $\mathcal{S} = \emptyset$
-
- 4.11** a) $\mathcal{S} =]-\infty; 1]$ c) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ e) $\mathcal{S} = \emptyset$ g) $\mathcal{S} = \emptyset$
b) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ d) $\mathcal{S} = \emptyset$ f) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ h) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
-
- 4.12** a) $\mathcal{S} = [0; 9]$ c) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
b) $\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]5; +\infty[$ d) $\mathcal{S} =]-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}[$
-
- 4.13** a) $\mathcal{S} =]0; 1[$ c) $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
b) $\mathcal{S} =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$ d) $\mathcal{S} =]0; \frac{4}{3}[$
-
- 4.14** a) $\mathcal{S} = [-1; 0] \cup [2; +\infty[$ c) $\mathcal{S} = [1; +\infty[$ e) $\mathcal{S} =]-\infty; 5[$
b) $\mathcal{S} =]\frac{3}{2}; +\infty[$ d) $\mathcal{S} =]-\infty; -7[\cup]-2; 2[$ f) $\mathcal{S} =]-\infty; -3[\cup]\frac{5}{3}; 3[$
-
- 4.15** a) $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]-1; 1[$ e) $\mathcal{S} =]0; 2[$
b) $\mathcal{S} = [-3; 0] \cup [5; +\infty[$ f) $\mathcal{S} =]-2; 0[\cup]2; +\infty[$
c) $\mathcal{S} =]-\infty; -3[\cup [-2; 0] \cup [1; 2] \cup [3; +\infty[$ g) $\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{1}{2}]$
d) $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]-2; 1[$ h) $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup [-1; 1] \cup [2; +\infty[$
-
- 4.16** a) $t \in [0; 12[$ c) La température est inférieure à 32°F avant 10h et après 12h12.
- 
- b)
-
- 4.17** a) $\mathcal{S} = [-5; 5]$ c) La population de cerf est supérieure à 180 individus entre 2,24 an et 4 an.
b) La population va s'éteindre après 5 ans.
-
- 4.18** a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $\mathcal{S} =]-3; 1]$ d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; \frac{1}{3}\}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathcal{S} = [-2; 1[\cup [2; +\infty[$ $\mathcal{S} =]-\infty; -4[\cup]\frac{1}{3}; 2] \cup [3; +\infty[$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$, $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup [-\frac{3}{2}; 1[$

4.19

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $\mathcal{S} =]-1; -\frac{1}{2}] \cup]1; +\infty[$

b) $D = \mathbb{R}^*$, $\mathcal{S} =]-1; 0[\cup]1; +\infty[$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathcal{S} =]-\infty; \frac{1}{2}] \cup]1; +\infty[$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{10}{7}; \frac{5}{3} \right\}$, $\mathcal{S} =]-\infty; 1[\cup]\frac{10}{7}; \frac{5}{3}[$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -4; \frac{3}{2} \right\}$, $\mathcal{S} =]-\infty; -4[\cup]\frac{3}{2}; 9]$

f) $D = \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, $\mathcal{S} =]0; \frac{1}{4}[$

g) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathcal{S} =]1; +\infty[$

h) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2} \right\}$, $\mathcal{S} =]\frac{-3 - \sqrt{7}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}[$

4.20

a) $\mathcal{S} = [-11; -4]$

b) $\mathcal{S} =]0; 7[$

c) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

d) $\mathcal{S} =]0; \frac{7}{2}[$

4.21

a) $D_f =]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$

b) $D_f = [\frac{1}{5}; 3[$

c) $D_f = [9; +\infty[$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Pour les élèves du gymnase d'Yverdon, des solutions détaillées des exercices sont consultables à l'adresse

<https://moodle.gyyv.vd.ch>

Références

- [1] S. Amaudruz : Algèbre 1M. Gymnase du Bugnon.
- [2] S. Amaudruz : Logique et ensembles 1M, 2013.
- [3] H. Bovet : Algèbre. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2001.
- [4] H. Bovet : Théorie des ensembles, 2002.
- [5] CRM : Fondamentum de mathématiques - Notions élémentaires. Num. 27 de Monographies de la CRM. CRM, 2400 Le Locle, g d'encre édn, 2015.
- [6] J.-P. Javet : Notions élémentaires d'algèbre et de trigonométrie 1MStand. <http://www.javmath.ch>, 2019-2020.
- [7] M. Marville : Quelques notions de logique. Gymnase du Bugnon.
- [8] M. Nicollerat : Algèbre 1M. Gymnase du Bugnon.
- [9] M. Nicollerat : Vocabulaire sur les ensembles. Gymnase du Bugnon.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch

sarah.delmonico@eduvaud.ch