

1M standard

Algèbre et analyse

Sarah Delmonico
Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2026-2027

Table des matières

1	Ensembles et logique	2
1.1	Premières notions	2
1.2	Opérations sur les ensembles	8
1.3	Les intervalles	12
1.4	Liens entre ensembles et logique	13
1.5	Les quantificateurs	16
1.6	Démonstrations	16
2	Introduction aux fonctions	18
3	Degrés 0 et 1	22
3.1	Fonctions affines	22
3.2	Équations du premier degré	25
3.3	Liens entre fonctions et équations	29
3.4	Applications	30
4	Degré 2	31
4.1	Factorisation	31
4.2	Équations du deuxième degré	35
4.3	Fonctions quadratiques	40
4.4	Intersections de graphes	44
4.5	Applications	45
5	Systèmes d'équations	47
5.1	Système d'équations linéaires 2 x 2	47
5.1.1	Résolution par substitution	47
5.1.2	Résolution par combinaison linéaire	48
5.1.3	Applications	50
5.2	Système d'équations du deuxième degré	51
5.3	Systèmes d'équations linéaires 3 x 3	53
5.3.1	Résolution d'un système d'équations linéaires 3 x 3	53
5.3.2	Applications	55
6	Degrés 3 et plus	56
6.1	Factorisation	56
6.1.1	Méthode 1 : Produits remarquables du 3 ^e degré	56
6.1.2	Méthode 2 : Changement de variable	57
6.1.3	Méthode 3 : Méthode du groupement	59
6.2	Factorisation par division	60
6.2.1	Division euclidienne	60
6.2.2	Méthode 4 : Factorisation par division :	65
6.3	Signe d'une fonction polynomiale	67
6.3.1	Généralités	67
6.3.2	Signe d'un produit	70
6.3.3	Signe d'une fonction affine	70
6.3.4	Signe d'une fonction quadratique	72
6.3.5	Signe d'une fonction polynomiale	74
6.3.6	Signe de $(g(x))^n$	75
7	Fonctions rationnelles	77
7.1	Généralités	77
7.2	Simplification	78
7.3	Opérations de base	79
7.4	Résolution d'équations rationnelles	81
7.5	Signe d'une fonction rationnelle	83
8	Inéquations	84
8.1	Inéquations du premier degré à une inconnue	84
8.1.1	Résolution par voie graphique	85
8.1.2	Résolution algébrique	86
8.2	Cas particuliers	88
8.3	Autres inéquations	89
8.4	Ensemble de définition d'une racine carrée	90

9 Exercices	91
9.1 Ensemble et logique	91
9.2 Introduction aux fonctions	101
9.3 Degrés 0 et 1	106
9.4 Degré 2	113
9.5 Systèmes d'équations	124
9.6 Degrés 3 et plus	128
9.7 Fonctions rationnelles	136
9.8 Inéquations	142
10 Solutions	147
10.1 Réponses - Ensembles et logique	147
10.2 Réponses - Introduction aux fonctions	155
10.3 Réponses - Degrés 0 et 1	158
10.4 Réponses - Degré 2	161
10.5 Réponses - Systèmes d'équations	169
10.6 Réponses - Degrés 3 et plus	171
10.7 Réponses - Fonctions rationnelles	176
10.8 Réponses - Inéquations	180

1 Ensembles et logique

1.1 Premières notions

Un **ensemble** est une collection d'objets tel que :

- On peut **dire avec exactitude** si un objet **fait partie ou non** de l'ensemble.
- Un objet figure **au maximum une fois** dans un ensemble.

Exemples :

- « Les romans sortis en librairie cette année » forment un ensemble.
- « Les bons romans sortis en librairie cette année » ne forment pas un ensemble, car « être un bon roman » n'est pas défini de la même manière par tout le monde.

Un objet a est appelé **élément de l'ensemble** A , s'il fait partie de la collection d'objets formant A .
On dit alors que a **appartient** à A et on note :

$$a \in A$$

Si l'objet b n'est pas un élément de A , on note :

$$b \notin A$$

Exemple : Soit P l'ensemble des nombres pairs.

On peut écrire que $8204 \in P$ et que $19 \notin P$.

On utilisera des majuscules pour les ensembles et des minuscules pour les éléments.

Lorsque deux ensembles A et B contiennent exactement les mêmes objets, on dit qu'ils sont **égaux** et on note :

$$A = B$$

Exemple :

A : l'ensemble des diviseurs de 8

B : l'ensemble formé des 4 premières puissances de 2

On a $A = B = \{ 1 ; 2 ; 4 ; 8 \}$.

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **ensemble vide**.
On le note $\emptyset$.

Exemple :

A : l'ensemble des nombres négatifs supérieurs à 2

On a $A = \emptyset$.

Définir un ensemble par **énumération** revient à donner la liste de tous ses éléments.
 L'ensemble est délimité par des **accolades** et les éléments séparés par des **points-virgules**.
 On ne peut énumérer un ensemble que s'il a un nombre fini d'éléments.

$$A = \{ 1 ; 2 ; 3 \} \qquad B = \{ a ; b ; c ; d \}$$

Exemples : Définir par énumération :

- a) A : l'ensemble des diviseurs de 90
- b) B : l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 9$

Définir un ensemble par **extension** revient à donner une liste partielle de ses éléments, mais qui permet au lecteur de comprendre quels sont tous les éléments de l'ensemble.

$$A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; \dots \} \qquad B = \{ a ; b ; c ; d ; \dots ; y ; z \}$$

Exemples : Définir par énumération :

- a) C : l'ensemble des multiples¹ de 3
- b) D : l'ensemble des nombres impairs²

Il est important de s'assurer qu'il n'y a pas d'ambiguïté :

Exemple : $A = \{ 1 ; 2 ; 4 ; \dots \}$ peut être :

- a) $A = \{ 1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 10 ; 12 ; \dots \}$ car il contient tous les entiers qui précèdent les nombres premiers.
- b) $A = \{ 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; \dots \}$
 car il contient
- c) $A = \{ \dots \}$
 car il contient tous les nombres que l'on peut calculer en faisant $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ pour tous les n entiers strictement positifs.

ex. 1.1 à 1.2

1. Dans cette brochure, lorsqu'on parle de multiples, nous choisissons de prendre les multiples positifs, y compris 0.
 2. Dans cette brochure, lorsqu'on parle de nombres pairs ou impairs, nous prenons la définition étendue à $\mathbb{Z}$.

Les mathématiciens utilisent des symboles pour désigner les principaux **ensembles de nombres** :

- l'ensemble des **nombres naturels** (entiers positifs) : $\mathbb{N} = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots \}$
- l'ensemble des **nombres entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{ \dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots \}$
- l'ensemble des **nombres rationnels** (nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fractions) : $\mathbb{Q}$
- l'ensemble des **nombres réels** : $\mathbb{R}$

Exemples : Justifier pourquoi les affirmations ci-dessous sont vraies.

a) $7 \in \mathbb{Q}$

b) $0,7 \in \mathbb{Q}$

c) $0,\overline{7} \in \mathbb{Q}$

d) $0,\overline{17} \in \mathbb{Q}$

Exemple : Citer des nombres réels qui ne sont pas rationnels.

On peut combiner les ensembles de nombres avec les symboles suivants : $+$, $-$, $*$:

- pour **enlever le zéro** : A^*
- pour ne garder **que les nombres positifs**³ : A_+
- pour ne garder **que les nombres négatifs**³ : A_-

Exemples : Écrire les ensembles ci-dessous à l'aide de symboles :

- les nombres rationnels négatifs et différents de zéro
- les nombres réels non nuls
- les nombres entiers positifs

3. Dans cette brochure, nous considérons que 0 est à la fois positif et négatif.

On définit souvent un ensemble A par rapport à un **ensemble de référence** E .

L'ensemble de référence E indique le contexte général, le type d'objet avec lequel on travaille (nombres, élèves, lettres ...). Il est aussi appelé **référentiel**.

Pour obtenir les éléments de A , on ne sélectionne que les éléments de E qui vérifient une condition P .

Cette condition est appelée **propriété caractéristique**.

On note :

$$A = \{ x \in E \mid P(x) \}$$

Cela signifie « **les éléments de E tels que $P(x)$ est vraie** ».

Exemples : Décrire « en français » et par énumération ou extension, lorsque c'est possible :

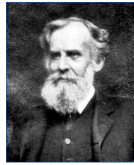
a) $A = \{ x \in \mathbb{Q}_+ \mid x \leq 1 \}$

b) $B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq 1000 \text{ et } \frac{x}{5} \in \mathbb{N} \right\}$

c) $C = \left\{ x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{5}{x} \in \mathbb{N} \right\}$

d) $D = \{ x \in \mathbb{N} \mid x = 5k \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ et } k \leq 200 \}$

ex. 1.3 à 1.6



John Venn, GB
(1834-1923)



Leonhard Euler, CH
(1707-1783)

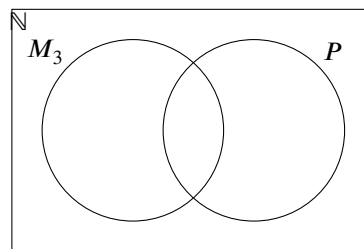
Un **diagramme de Venn-Euler**, aussi appelé **diagramme d'Euler**, est une représentation graphique d'ensembles tel que :

- Le référentiel est représenté par un rectangle.
- Les autres ensembles sont représentés par des « ovales ».
- Chaque élément du référentiel peut être inscrit dans une et une seule zone.

Exemples :

a) Inscrire les éléments aux bons endroits (3 par plage).

$E = \mathbb{N}$ M_3 : les multiples de 3 P : les nombres naturels pairs



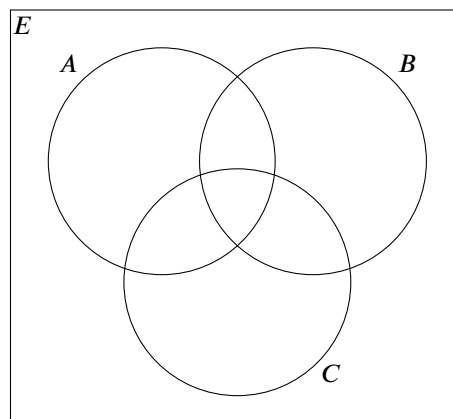
b) Dans chaque plage non vide, dessiner une forme correspondant aux critères.

E : les quadrilatères

A : les quadrilatères qui ont 4 côtés isométriques

B : les quadrilatères qui ont 2 paires de côtés parallèles

C : les quadrilatères qui ont au moins 2 angles droits adjacents



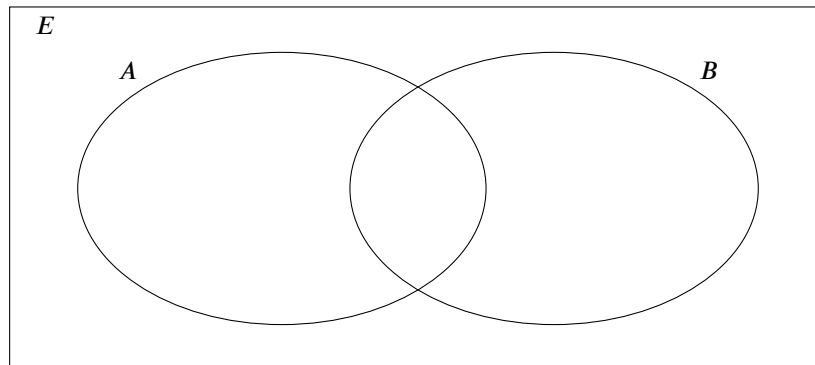
ex. 1.7

Exemple : Compléter ce diagramme de Venn en notant tous les éléments de E aux bons endroits.

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 17\}$$

$$A = \{x \in E \mid x \text{ est un multiple de } 4\}$$

$$B = \{x \in E \mid x \text{ est un multiple de } 2\}$$

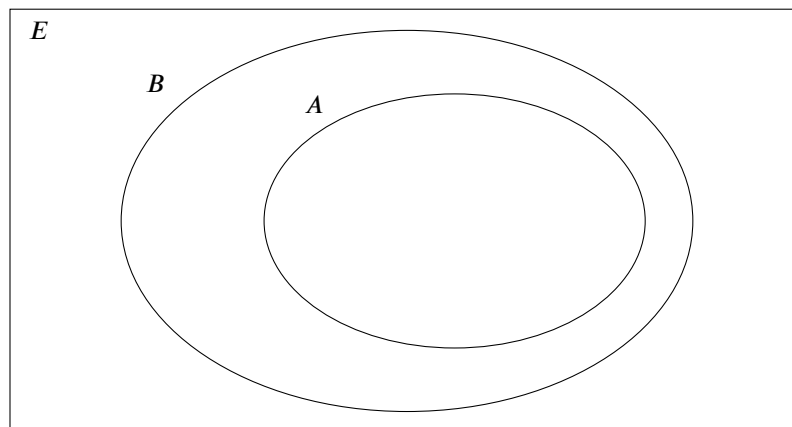


On peut remarquer que

Soit A et B des ensembles. A **est un sous-ensemble de** B si tout élément de A est aussi un élément de B . On dit alors que A **est inclus dans** B et on note :

$$A \subset B$$

Le diagramme de Venn-Euler peut alors être fait de la manière suivante afin d'éliminer les plages vides :



Exemple :

Inscrire les éléments de l'exemple précédent aux bons endroits, dans le diagramme de cette définition.

Soit A et B des ensembles. A **n'est pas un sous-ensemble de** B si il existe au moins un élément de A qui n'est pas un élément de B . On dit alors que A **n'est pas inclus dans** B et on note :

$$A \not\subset B$$

Exemples :

a) Expliquer pourquoi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

b) Expliquer pourquoi $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$.

ex. 1.8 à 1.10

Propriété :

Soit A et B deux ensembles.

$$A = B \quad \text{si et seulement si} \quad A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A$$

Preuve : • 1^{er} sens : si $A = B$ alors $A \subset B$ et $B \subset A$

Si $A = B$:

Tous les éléments de A sont dans B .

Donc $A \subset B$.

Tous les éléments de B sont dans A .

Donc $B \subset A$.

• 2^{me} sens : si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$

Si $A \subset B$, tous les éléments de A sont dans B .

Si $B \subset A$, tous les éléments de B sont dans A .

Ils contiennent donc exactement les mêmes éléments.

Donc $A = B$.

#

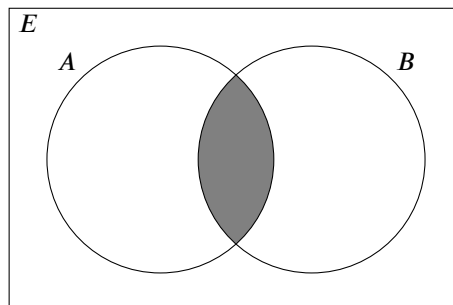
ex. 1.11 à 1.12

1.2 Opérations sur les ensembles

Soit E un ensemble de référence et A , B et C des sous-ensembles de E .

L'intersection entre A et B se définit par :

$$A \cap B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B \}$$



L'intersection correspond au connecteur logique **et**.

Exemple : Énumérer A , B et $A \cap B$, inscrire leurs éléments aux bons endroits, dans le diagramme de la définition ci-dessus, puis compléter la propriété caractéristique.

$$E = \{ x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 20 \}$$

$$A = \{ x \in E \mid x \text{ est un diviseur de } 18 \} = \{ \dots \}$$

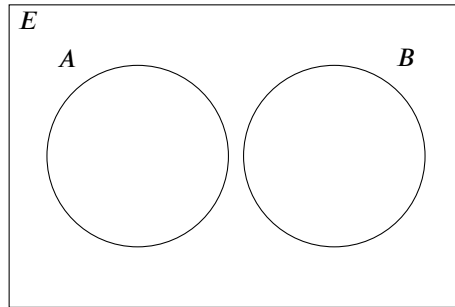
$$B = \{ x \in E \mid x \text{ est un diviseur de } 12 \} = \{ \dots \}$$

$$A \cap B = \{ x \in E \mid x \text{ est } \dots \} = \{ \dots \}$$

$$= \{ x \in E \mid x \text{ est un diviseur de } \dots \}$$

Deux sous-ensembles A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

Le diagramme de Venn-Euler peut alors être fait de la manière suivante afin d'éliminer les plages vides :



Exemple : Énumérer A et B et inscrire leurs éléments aux bons endroits, dans le diagramme ci-dessus.

$$E = \{ x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 14 \}$$

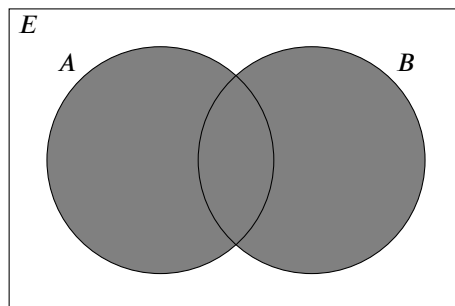
$$A = \{ x \in E \mid x \text{ est une puissance de } 3 \} = \{ \dots \}$$

$$B = \{ x \in E \mid x \text{ est un multiple de } 4 \} = \{ \dots \}$$

ex. 1.13

La **réunion** de A avec B se définit par :

$$A \cup B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$$



La réunion correspond au connecteur logique **ou**.

Exemple : Énumérer A , B et $A \cup B$ et inscrire leurs éléments aux bons endroits, dans le diagramme ci-dessus.

$$E = \{ x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 12 \}$$

$$A = \{ x \in E \mid x \text{ est un diviseur de } 10 \} = \{ \dots \}$$

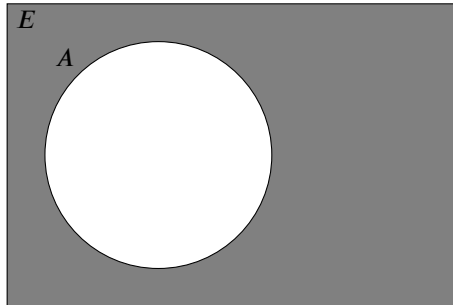
$$B = \{ x \in E \mid x \text{ est un diviseur de } 8 \} = \{ \dots \}$$

$$A \cup B = \{ x \in E \mid x \text{ est } \dots \} = \{ \dots \}$$

Le **complémentaire** de A se définit par :

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Il se note aussi $E - A$ ou $E \setminus A$ ou $\complement_E A$.



Le complémentaire correspond au connecteur logique **non**.

Exemple : Énumérer A et $\overline{A}$ et inscrire leurs éléments aux bons endroits, dans le diagramme ci-dessus.

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 20\}$$

$$A = \{x \in E \mid x \text{ est un nombre premier}\} = \{ \dots \}$$

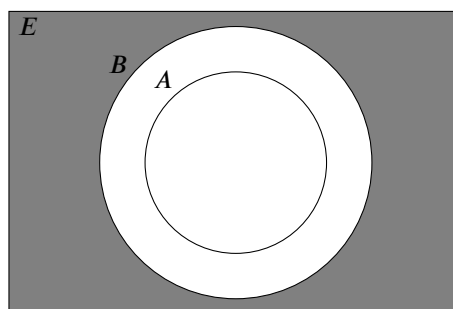
$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \text{ est } \dots\} \\ = \{ \dots \}$$

Propriété :

Soit A et B deux sous-ensembles d'un référentiel E .

$$A \subset B \quad \text{si et seulement si} \quad \overline{B} \subset \overline{A}$$

Preuve : • 1^{er} sens : si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$
Si $A \subset B$, tous les éléments de A sont dans B .



Donc, un élément qui n'est pas dans B ne peut pas être dans A .

Donc, $\overline{B} \subset \overline{A}$.

• 2^{me} sens : si $\overline{B} \subset \overline{A}$ alors $A \subset B$

Prenons un élément a de A .

Imaginons qu'il ne soit pas dans B , il est donc dans $\overline{B}$.

Comme $\overline{B} \subset \overline{A}$, a est dans $\overline{A}$.

Mais a ne peut pas être dans A et dans $\overline{A}$. C'est impossible.

Donc ce que nous avons imaginé est impossible, a est forcément dans B .

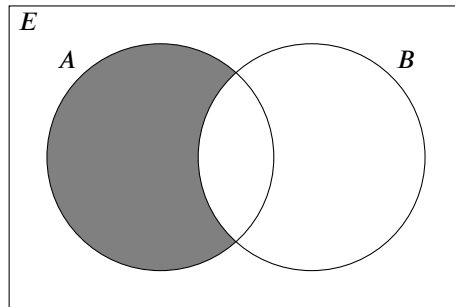
Tout élément de A est donc dans B . Ainsi, $A \subset B$.

#

La **différence** de A et de B se définit par :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Il se note aussi $A - B$.



Exemple : Énumérer A , B et $A \setminus B$ et inscrire leurs éléments aux bons endroits, ci-dessus.

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 18\}$$

$$A = \{x \in E \mid x \text{ est une puissance de } 2\} = \{ \dots \}$$

$$B = \{x \in E \mid x \text{ est un carré parfait}\} = \{ \dots \}$$

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \text{ est } \dots\} = \{ \dots \}$$

ex. 1.14 à 1.23

Propriétés :

Commutativité

$$A \cup B = B \cup A$$

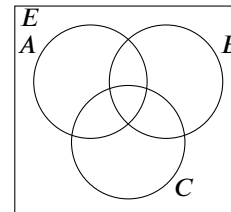
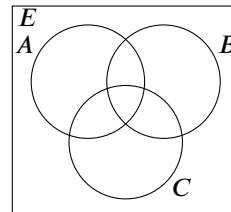
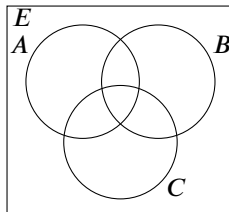
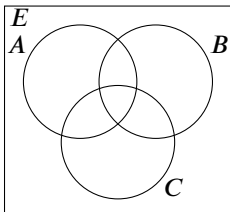
$$A \cap B = B \cap A$$

Associativité

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Illustrations :

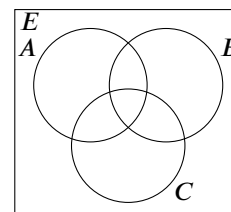
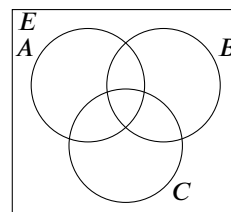
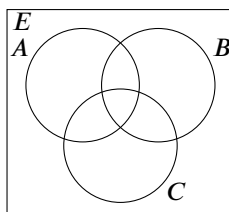
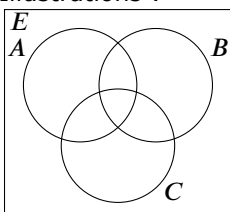


Distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Illustrations :

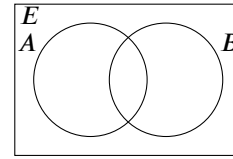
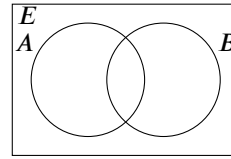
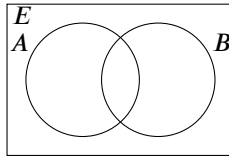
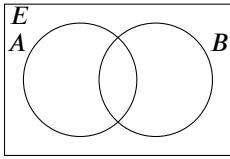


Lois de Morgan

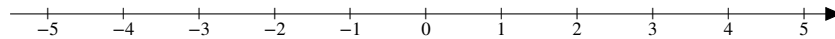
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Illustrations :

**1.3 Les intervalles**

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ peut se représenter par un axe, appelé **droite numérique**.



Soit a et $b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$.

Un **intervalle** qui a pour **bornes** a et b est la portion de la droite numérique située entre a et b . C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, il contient donc tous les nombres réels supérieurs à a et inférieurs à b .

Les bornes peuvent appartenir, ou non, à l'intervalle. On distingue les différents cas de la manière suivante :

intervalle ouvert	$]a ; b[$	$a < x < b$	
intervalle fermé	$[a ; b]$	$a \leq x \leq b$	
intervalle semi-ouvert	$[a ; b[$	$a \leq x < b$	
	$]a ; b]$	$a < x \leq b$	
intervalle généralisé	$[a ; +\infty[$	$a \leq x$	
	$] -\infty ; a]$	$x \leq a$	
	$]a ; +\infty[$	$a < x$	
	$] -\infty ; a[$	$x < a$	

Exemple : Soit A l'ensemble des nombres réels inférieurs ou égaux à 9.

- Représenter A graphiquement.
- Écrire A sous forme d'intervalle (avec les crochets).
- Écrire A sous forme d'inégalité, de deux manières différentes.

ex. 1.24 à 1.32

1.4 Liens entre ensembles et logique

Nous nous contenterons ici d'une approche informelle de la logique, qui nous permettra de mettre en place les notations et les outils nécessaires pour faire ce qui est indispensable et si beau en mathématiques : démontrer les propriétés que nous rencontrerons.

Une **proposition** mathématique est une assertion qui est forcément vraie ou fausse, mais pas les deux.

Exemples : Les énoncés suivants sont des propositions :

- La baleine est un mammifère.
- $1 + 1 = 3$
- 2 est un nombre pair.
- Zurich est la capitale de la Suisse.

Les énoncés suivants ne sont pas des propositions :

- Cette phrase est un mensonge.
- x est un nombre pair.

Ce dernier exemple n'est pas une proposition, car le sujet est indéterminé, si bien que l'on ne peut pas dire si elle est vraie ou fausse. Cependant, chaque fois que nous substituerons à x un terme convenablement choisi, nous obtiendrons une proposition.

$P(x)$ est un **prédicat** si c'est un énoncé du type " x possède la propriété P ".

x est appelé la **variable**.

Le **domaine de définition du prédicat** est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles " x possède la propriété P ." est une proposition.

Exemples :

- "être pair" est une propriété.
" x est un nombre pair" est un prédicat.
Son domaine de définition est $\mathbb{Z}$.
- "être strictement inférieur à 2" est une propriété.
" $x < 2$ " est un prédicat.
Son domaine de définition est $\mathbb{R}$.

Remarque : On peut avoir des prédicats à plusieurs variables comme " x est un diviseur de y ".

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats, E un ensemble contenu dans les deux domaines de définition et les ensembles :

$$A = \{x \in E \mid P(x)\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in E \mid Q(x)\}.$$

$P(x)$ **implique** $Q(x)$ est une proposition qui est vraie uniquement si $A \subset B$.

On notera alors : $P(x) \implies Q(x)$ ou $P \implies Q$

Dans ce cas, si un élément de E satisfait la propriété P , alors il satisfait forcément la propriété Q .

Exemples :

a) Si P est "être un nombre entier" et Q est "être un nombre rationnel"

$$E = \mathbb{R}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ est un nombre entier}\} = \mathbb{Z} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ est un nombre rationnel}\} = \mathbb{Q}$$

$$x \text{ est un nombre entier} \implies x \text{ est un nombre rationnel,} \quad \text{car} \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

b) $x = 2 \implies x$ est un nombre premier pair

c) Être un multiple de 6 $\implies$ Être un multiple de 2 car $M_6 \subset M_2$

d) Être un trapèze $\implies$ Être un quadrilatère qui a une paire de côtés parallèles

e) $x = 3 \implies x^2 = 9$

Remarque : Si $P(x) \implies Q(x)$, cela ne veut pas forcément dire que $Q(x) \implies P(x)$.

En effet, $A \subset B$ ne veut pas forcément dire que $B \subset A$.

$Q(x) \implies P(x)$ est la **réciproque** de $P(x) \implies Q(x)$

Exemples : Écrire la réciproque des exemples précédents lorsqu'elle est vraie.

Utiliser la notation $\nRightarrow$ lorsqu'elle est fausse et noter un contre-exemple.

a) x est un nb rationnel $\nRightarrow x$ est un nb entier, car 0,5 est un nombre rationnel qui n'est pas entier.

b) x est un nombre premier pair $\implies x = 2$

c)

d)

e)

Lorsque $Q(x) \implies P(x)$ et $P(x) \implies Q(x)$ sont toutes deux vraies, on dit que les propriétés P et Q sont **équivalentes**. On note alors :

$$P(x) \iff Q(x)$$

P est vérifié **si et seulement** si Q est vérifié.

Exemple : x est divisible par 6 $\iff x$ est divisible par 2 et par 3

ex. 1.33 à 1.35

On définit la **négation** d'une proposition ou d'une propriété P , notée $\neg P$ ou non P , par

$$\text{non } P \text{ est vrai} \iff P \text{ est faux}$$

Si $P(x)$ est un prédicat et $A = \{x \in E \mid P(x)\}$, alors non $P(x)$ est un prédicat et $\{x \in E \mid \text{non } P(x)\} = \overline{A}$.

Exemples : Énoncer la négation des propositions ou prédicats suivants :

a) J'ai gagné au loto.

.....

b) x est un nombre impair

.....

c) $x < 2$

.....

d) x est un nombre impair et strictement inférieur à 2

.....

Propriété :

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats, E un ensemble contenu dans les deux domaines de définition et les ensembles $A = \{x \in E \mid P(x)\}$ et $B = \{x \in E \mid Q(x)\}$.

$P(x) \implies Q(x) \quad \text{si et seulement si} \quad \text{non } Q(x) \implies \text{non } P(x)$

La proposition « $\text{non } Q(x) \implies \text{non } P(x)$ » est appelée la **contraposée** de la proposition « $P(x) \implies Q(x)$ ».

Preuve : C'est une conséquence de la propriété « $A \subset B$ si et seulement si $\overline{B} \subset \overline{A}$ ».

En effet, comme :

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \text{non } P(x)\} \quad \text{et} \quad \overline{B} = \{x \in E \mid \text{non } Q(x)\},$$

$$P(x) \implies Q(x) \quad \text{si et seulement si} \quad A \subset B \quad \text{si et seulement si} \quad \overline{B} \subset \overline{A}$$

$$\text{si et seulement si} \quad \text{non } Q(x) \implies \text{non } P(x) \quad \#$$

Exemples : Écrire la contraposée.

a) x est un nombre entier $\implies x$ est un nombre rationnel

.....

b) Être un chat $\implies$ être un félin

.....

ex. 1.36 à 1.38

1.5 Les quantificateurs

Symbole	Signification
$\forall$	pour tout, quel que soit
$\exists$	il existe
$\exists !$	il existe un unique

Exemples : "Traduire en français".

a) $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \text{ tels que } \frac{a}{b} = x.$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! y \in \mathbb{R} \text{ tel que } x + y = 0.$

ex. 1.39 à 1.41

1.6 Démonstrations

Exemple : Soit a, b et $m \in \mathbb{N}$.

m est divisible par a et par $b \implies m$ est divisible par $a \cdot b$.

- a) Trouver trois nombres pour lesquels cette affirmation est vraie.
- b) Trouver trois nombres pour lesquels cette affirmation est fausse.
- c) Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Pour être sûr que l'implication $P(x) \implies Q(x)$ est fausse, il suffit de trouver un **contre-exemple**, c'est-à-dire un x ayant la propriété P mais pas la Q . On dit alors que l'on a **réfuté** la proposition.

Par contre, pour affirmer qu'elle est vraie, on doit montrer que **tous** les x ayant la propriété P ont aussi la propriété Q .

Donc, un exemple ne suffit pas ! Il faut faire une **démonstration**⁴.

Une fois démontrée, elle portera le nom de **théorème**, de **lemme**, de **corollaire** ou de **proposition démontrée** et pourra être utilisée en toute légitimité.

4. Nous ne ferons pas de différence entre les mots « prouver » et « démontrer ».

On appelle « **hypothèses** » (noté H) les propriétés ou prédicats supposés vrais au départ.

On appelle « **conclusion** » (noté C) les propriétés ou prédicats que l'on aimerait prouver.

Une « **démonstration par méthode directe** » est une suite d'implications vraies partant des hypothèses pour arriver à la conclusion.

$$H \Rightarrow \dots \Rightarrow C$$

Exemple : La somme de deux nombres impairs est paire.

H : Soit n et $m \in \mathbb{Z}$ avec n et m impairs.

C : $n + m$ est pair.

Preuve :

$$n \text{ est impair} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 2k + 1$$

$$m \text{ est impair} \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tel que } m = 2h + 1$$

$$\Rightarrow \exists k \text{ et } h \in \mathbb{Z} \text{ tels que } n + m = (2k + 1) + (2h + 1) = 2k + 2h + 2 = 2(k + h + 1)$$

$$\Rightarrow n + m \text{ est le double d'un nb entier}$$

$$\Rightarrow n + m \text{ est pair}$$

#

Exemples : Prouver ou réfuter.

a) La somme de deux carrés parfaits est un carré parfait.

b) Le produit de deux carrés parfaits est un carré parfait.

Une « **démonstration par contraposée** » est une suite d'implications vraies partant de la négation de la conclusion pour arriver à la négation de l'hypothèse.

$$\text{non } C \Rightarrow \dots \Rightarrow \text{non } H$$

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 est pair alors n est pair.

H : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec n^2 pair.

C : n est pair.

non C : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec n impair.

non H : n^2 est impair.

Preuve : n est impair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 \text{ est la somme d'un multiple de 4 et de 1}$$

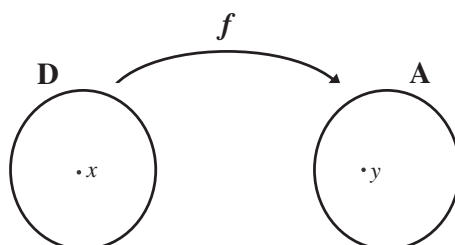
$$\Rightarrow n^2 \text{ est impair}$$

#

ex. 1.42 à 1.46

2 Introduction aux fonctions

Soit D et A des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Une **fonction** $f : D \rightarrow A$ est une correspondance qui associe à tout nombre x de D exactement un nombre y de A .



D est appelé **ensemble de départ** de f et A est l'**ensemble d'arrivée** de f .

Exemple : Considérons la fonction f qui à tout nombre réel associe son carré.
Compléter les correspondances ci-dessous.

$f :$	$\mathbb{R}$	$\rightarrow$	$\mathbb{R}$
	0,5	$\mapsto$	
	-6	$\mapsto$	
	$\frac{2}{7}$	$\mapsto$	
	$\sqrt{3}$	$\mapsto$	
	x	$\mapsto$	

Si l'élément x de D correspond à l'élément y de A , on dit que y est l'**image de x par f** et on note $y = f(x)$.
Chaque élément de D a exactement une seule image.

L'ensemble de toutes les images est noté $\text{Im}(f)$. On l'appelle l'**image de la fonction f** .

Si y est l'image de x par f , alors on dit que x est une **préimage** de y par f .

Un élément de A n'a pas forcément de préimage et il peut aussi en avoir plusieurs.

Exemple : Considérons la fonction f qui à tout nombre réel associe son carré.

- Déterminer l'image de 4.
- Déterminer $f(-4)$.
- Déterminer la ou les préimages de 4, s'il y en a.
- Déterminer la ou les préimages de -4, s'il y en a.
- Déterminer $\text{Im}(f)$.

On appelle **expression algébrique** de f une description algébrique du lien existant entre les grandeurs x et $f(x)$.

Exemple : L'expression algébrique de la fonction qui envoie chaque nombre sur son triple est :

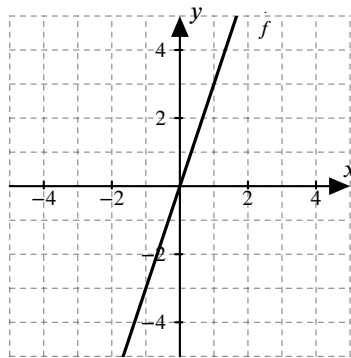
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x \end{aligned}$$

On la note aussi : $f(x) = 3x$.

Une fonction peut être représentée à l'aide d'un **tableau de valeurs**. Il associe une sélection de valeurs de x avec leur image.

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
$3x$	-4,5	-3	-1,5	0	1,5	3	4,5

Une fonction peut aussi être représentée graphiquement. On place dans un système d'axes les points de coordonnées $(x; f(x))$. L'ensemble de ces points forme le **graphe** de la fonction f .

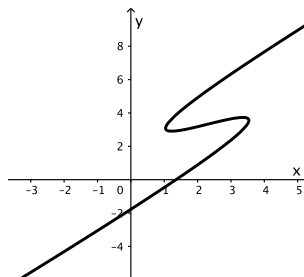
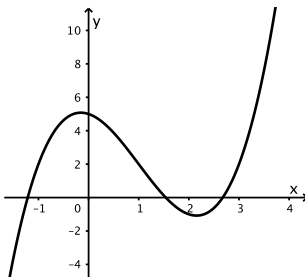


Pour un point P de coordonnées $(x; y)$, x est appelé son **abscisse** et y son **ordonnée**.

$y = f(x)$ est une **équation du graphe**.

Exemple : Quelle est l'équation du graphe représenté ci-dessus ?

Exemple : Une des courbes ci-dessous ne représente pas une fonction. Laquelle et pourquoi ?



ex. 2.1 à 2.7

L'**ensemble de définition** d'une fonction est l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe. On le note ED_f ou D_f ou encore $E_D(f)$. C'est le plus grand ensemble de départ possible pour la fonction.

Nous appellerons **valeurs interdites** les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ n'existe pas.

Exemples : Déterminer les ensembles de définition des fonctions définies par :

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$

b) $g(x) = 3x^2 - 12$

c) $h(x) = \sqrt{x}$

L'**ordonnée à l'origine** d'une fonction f est l'ordonnée du point d'intersection de son graphe avec l'axe Oy . Il s'agit donc de l'image de 0 par f . Pour la déterminer, on calcule $f(0)$.

Exemples : Déterminer l'ordonnée à l'origine des fonctions définies par :

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$

b) $g(x) = 3x^2 - 12$

c) $h(x) = \sqrt{x}$

On appelle **zéro** d'une fonction f l'abscisse du ou des point(s) d'intersection de son graphe avec l'axe Ox . Il s'agit donc des préimages de 0 par f . Pour le(s) déterminer, on résout l'équation $f(x) = 0$.

Les zéros sont aussi parfois appelés **abscisses à l'origine ou racines**.

Exemples : Déterminer les zéros des fonctions définies par :

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$

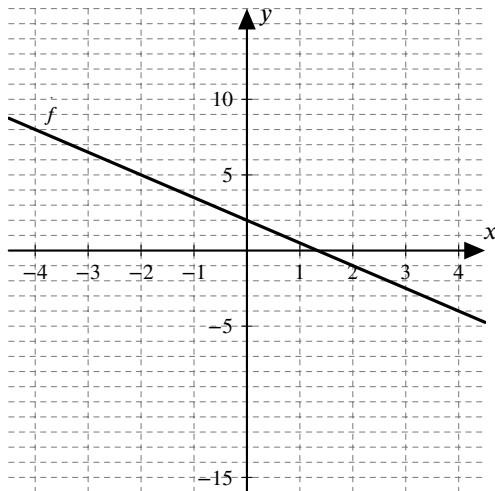
b) $g(x) = 3x^2 - 12$

c) $h(x) = \sqrt{x}$

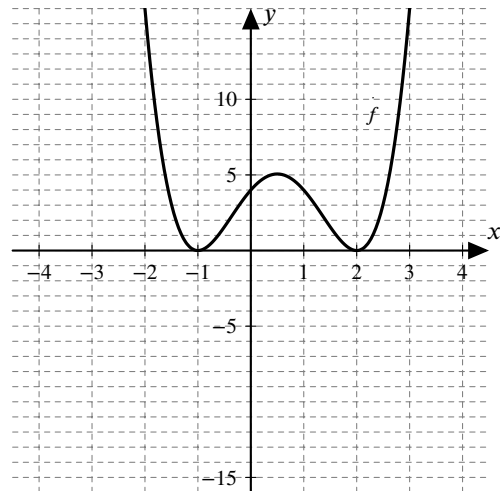
ex. 2.8 à 2.13

Différents types de graphes

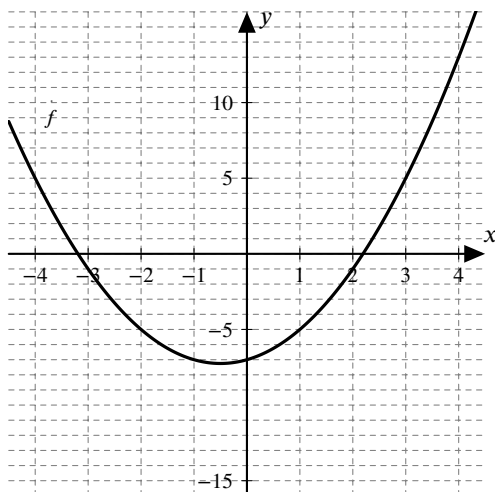
a) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 2$



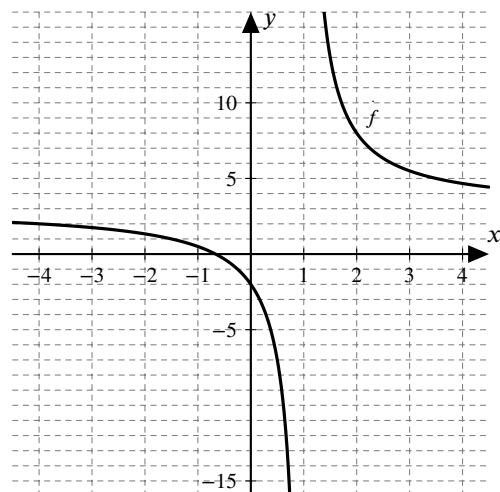
d) $f(x) = (x-2)^2(x+1)^2$



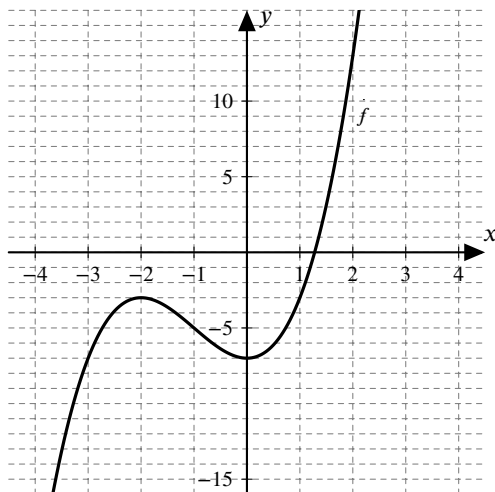
b) $f(x) = x^2 + x - 7$



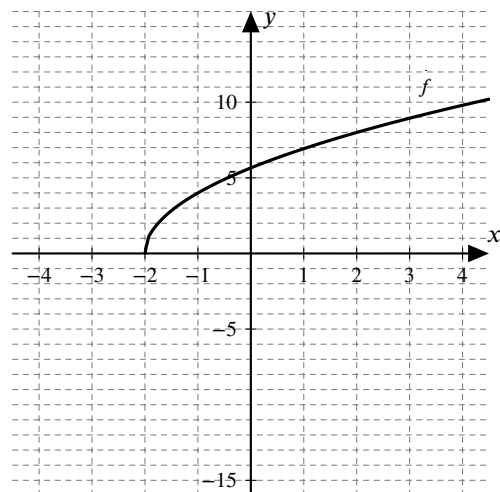
e) $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$



c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7$



f) $f(x) = \sqrt{16x+32}$



3 Degrés 0 et 1

3.1 Fonctions affines

Une fonction est **polynomiale** si son expression peut se ramener à $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, où

n est un nombre entier positif et $a_n, \dots, a_0$ sont des nombres réels qui peuvent être nuls.

a_i est le **coefficient** de x^i . On l'appelle aussi le **coefficient de degré i** .

Exemple : Soit $f(x) = 7x^5 + x^4 - x^3 - 2x + 6$. Quels sont les coefficients de degré :

- | | |
|--------|--------|
| a) 5 ? | d) 2 ? |
| b) 4 ? | e) 1 ? |
| c) 3 ? | f) 0 ? |

On dit que le polynôme est **de degré n** si n est le plus grand nombre entier tel que a_n est non nul. Si $a_n = 1$, le polynôme est dit **unitaire**.

Exemple : Quel est le degré de $7x^5 + x^4 - x^3 - 2x + 6$? Ce polynôme est-il unitaire ?

Une fonction **affine** est une fonction polynomiale de degré 0 ou 1. Son expression peut se ramener à

$f(x) = mx + h$, où m et h sont des nombres réels. (Nous utiliserons les lettres m et h au lieu de a_1 et a_0 .)

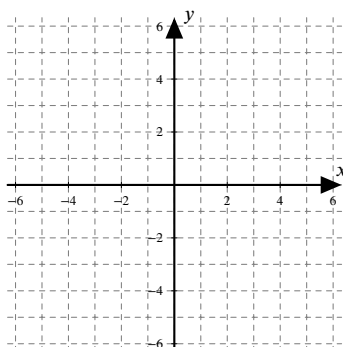
Dans le cas où $m = 0$, l'expression est $f(x) = h$, le degré est 0 et la fonction dite **constante**.

Si $m \neq 0$, la fonction est de degré 1.

Dans le cas où $h = 0$, l'expression est $f(x) = mx$ et la fonction dite **linéaire**.

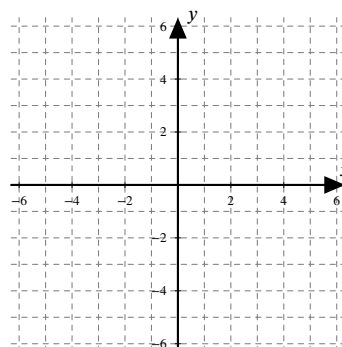
Exemples : Représenter les fonctions demandées.

a) $f(x) = 2$



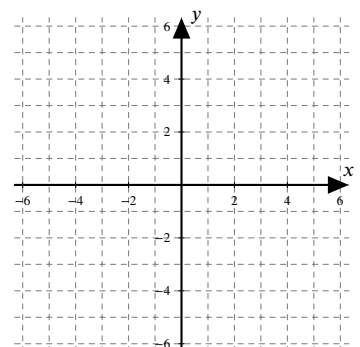
$m =$ $h =$
ordonnée à l'origine :
zéro :
type :

b) $f(x) = 2x$



$m =$ $h =$
ordonnée à l'origine :
zéro :
type :

c) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

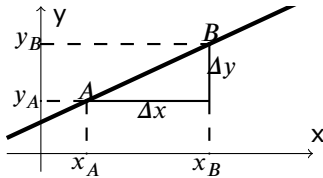


$m =$ $h =$
ordonnée à l'origine :
zéro :
type :

Le graphe d'une fonction affine $f(x) = mx + h$ est une **droite**,

- de **pente** m ,
- d'**ordonnée à l'origine** h ,
- d'**équation** $y = mx + h$.

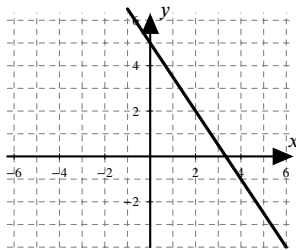
Rappel : La **pente** d'une droite est le rapport $\frac{\text{"distance verticale"}}{\text{"distance horizontale"}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Ces distances sont algébriques ; elles peuvent être négatives.

$$\text{pente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemple : Quelle est la pente de cette droite ? Quelle est son équation ?



Exemples : Calculer les images de -3 , 0 et 3 , puis représenter les fonctions et observer :

$$f(x) = 2x - 1$$

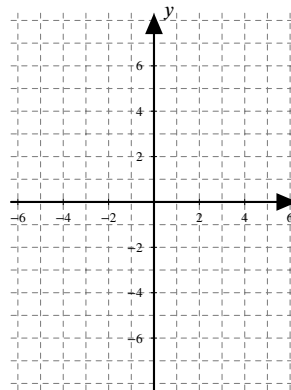
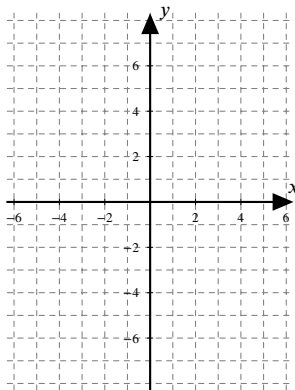
$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

$$g(x) = -2x - 1$$

$$g(x) = \frac{2}{3}x$$

$$h(x) = -1$$

$$h(x) = \frac{2}{3}x - 4$$



Compléter le tableau en dessinant des esquisses du graphe de $f(x) = mx + h$:

$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$

ex. 3.1 à 3.5

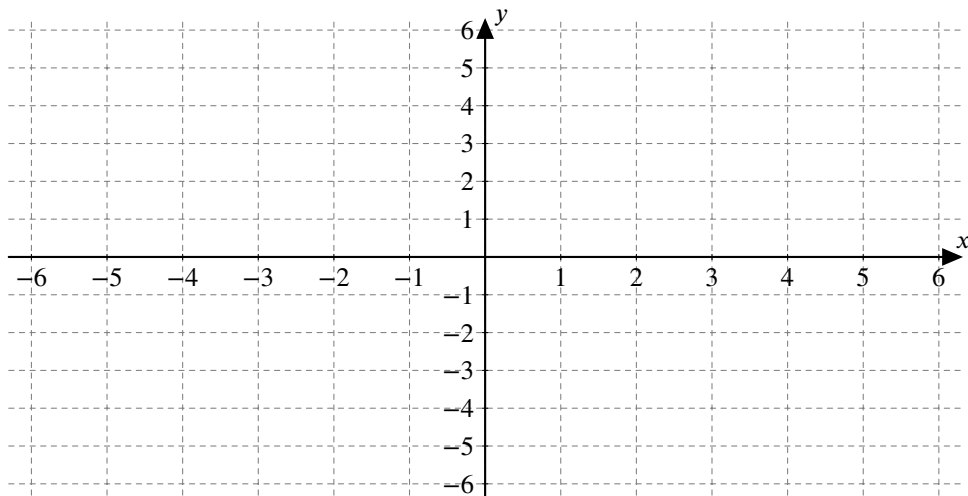
Exemples : Utiliser l'ordonnée à l'origine et la pente pour représenter graphiquement ces fonctions.

a) $f(x) = \frac{3}{4}x - 2$

b) $g(x) = -2x + 1$

c) $h(x) = -\frac{1}{3}x$

d) $i(x) = -5$



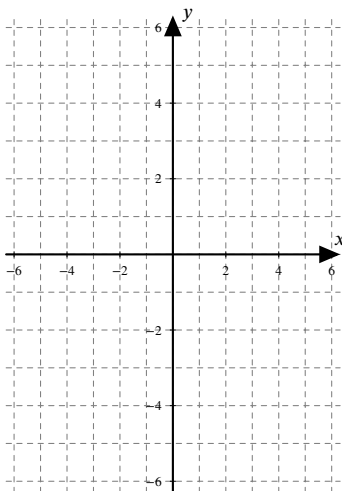
Représenter la droite $y = 3$. Est-ce le graphe d'une fonction affine ?

Représenter la droite $x = 3$. Est-ce le graphe d'une fonction affine ?

ex. 3.6

Exemple :

a) Déterminer l'équation de la droite passant par les points $A(-2; -1)$ et $B(1; 5)$.



b) Le point $\left(\frac{5}{14}; \frac{25}{7}\right)$ est-il sur cette droite ?

ex. 3.7 à 3.9

3.2 Équations du premier degré

Dans bien des occasions, comme lorsqu'on cherche les zéros d'une fonction ou encore pour calculer les coordonnées exactes du point d'intersection de deux droites, nous allons être amenés à poser des équations et à les résoudre.

Une **équation** est une égalité entre deux expressions littérales, qui peut être juste ou fausse selon les valeurs attribuées aux lettres.

Exemple : $8x + 3 = 38 + x$ est une égalité qui n'est vraie que si $x = 5$.

Son écriture se compose de trois parties : le **membre de gauche** de l'équation, le **signe d'égalité** et le **membre de droite** de l'équation.

Une équation est dite **sous forme canonique** si l'un de ses membres est nul et l'autre est réduit.

Exemples : $8x + 9 = 0$ $4y^2 - \frac{2}{9}y + 9 = 0$ $0,1x^3 - 100 = 0$

Le **degré** d'une équation est le degré du polynôme de sa forme canonique.

Les lettres utilisées dans l'écriture d'une équation sont appelées **inconnues**.

On cherche la ou les valeurs à leur donner pour que l'égalité soit vraie. Ces valeurs sont appelées **solutions de l'équation**.

Exemple : Est-ce que -2 est une solution de l'équation $2x^2 + x + 1 = 1 - 3x$?

Résoudre une équation signifie déterminer l'ensemble de ses solutions. On note $\mathcal{S}$ cet ensemble.

Remarque : Une équation de degré n possède au plus n solutions.

Pour résoudre une équation, on utilise les quatre **principes d'équivalence** suivants :

- Premier principe d'équivalence

On obtient une équation équivalente à une équation donnée si on **réduit** les membres de l'équation par les règles du calcul littéral.

Exemple :

$$\begin{array}{l|l} 1 - x = 4 - 2 \left(\frac{2}{11}x - 3 \right) & c.l. \\ 1 - x = 4 - \frac{4}{11}x + 6 & c.l. \\ 1 - x = -\frac{4}{11}x + 10 & \end{array}$$

- Deuxième principe d'équivalence

On obtient une équation équivalente à une équation donnée en **additionnant** ou en **soustrayant** à chacun des membres de l'équation la même expression.

Exemple :

$$\begin{array}{l|l} 1 - x = -\frac{4}{11}x + 10 & +x \\ 1 = -\frac{4}{11}x + 10 + x & c.l. \\ 1 = \frac{7}{11}x + 10 & -10 \\ -9 = \frac{7}{11}x & \end{array}$$

- Troisième principe d'équivalence

On obtient une équation équivalente à une équation donnée en **permutant** le membre de gauche et le membre de droite.

Exemple :

$$\begin{array}{l|l} -9 = \frac{7}{11}x & \leftrightarrow \\ \frac{7}{11}x = -9 & \end{array}$$

- Quatrième principe d'équivalence

On obtient une équation équivalente à une équation donnée en **multipliant** ou en **divisant** chacun des membres de l'équation par une même expression **non nulle**.

Exemple :

$$\begin{array}{l|l} \frac{7}{11}x = -9 & \cdot 11 \\ 7x = -99 & : 7 \\ x = -\frac{99}{7} & \\ \mathcal{S} = \left\{ -\frac{99}{7} \right\} & \end{array}$$

Lorsqu'on veut résoudre une équation du premier degré, il faut **isoler l'inconnue** dans l'un des membres de l'équation en utilisant les principes d'équivalence.

Après avoir déterminé l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$, il est bon de **faire la vérification**, en remplaçant l'inconnue par la ou les valeurs trouvées.

Exemples : Résoudre les équations suivantes.

a) $3x + 1 = x + 7$

c) $\frac{y}{2} - \frac{3y}{5} = \frac{y-3}{4} - \frac{27}{20}$

b) $x + 5 = 2(x + 2) - (4x + 14)\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{7}(3x + 5) = 9 - \frac{3-x}{7}$

ex. 3.10 à 3.11

On rencontre parfois des équations qui ont l'air d'être du premier degré, mais qui n'en sont pas. Au cours de la résolution, l'inconnue disparaît. L'équation est donc de degré 0.

Deux cas peuvent se présenter :

- L'équation obtenue n'est **jamais vraie**. Il n'y a pas de solution :

$$\text{par exemple :} \quad 5 = -3 \quad \text{ou} \quad 0 = 8 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S} = \emptyset$$

- L'équation obtenue est **toujours vraie**. Tous les nombres réels sont des solutions :

$$\text{par exemple :} \quad -5 = -5 \quad \text{ou} \quad 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S} = \mathbb{R}$$

Exemples : Résoudre.

a) $3 + 4x - (7x - 10) = 13 - 3x$

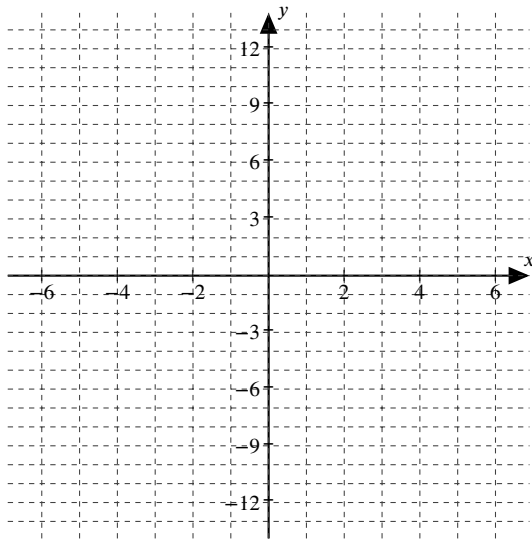
b) $2 + 9x = 3(4 + 3x)$

ex. 3.12 à 3.13

3.3 Liens entre fonctions et équations

Exemples : Observer quelles sont les consignes qui impliquent une résolution par équation.

A) Soit $f(x) = 3x - 5$. Déterminer les valeurs demandées graphiquement puis algébriquement.



a) le zéro

b) l'ordonnée à l'origine

c) la préimage de 6

d) l'image de 5

B) Résoudre graphiquement l'équation $3x - 5 = -\frac{1}{2}x - 12$.

C) Quelles sont les coordonnées exactes du point d'intersection des droites d'équations

$$y = 3x - 5 \text{ et } y = \frac{1}{2}x - 12?$$

Exemple : Résoudre algébriquement les équations et expliquer ce que l'on observerait en faisant une résolution graphique :

$$-\frac{1}{3}x + 3 = -\frac{1}{3}x - 2 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{3}x + 3 = 3 - \frac{1}{3}x$$

ex. 3.14 à 3.19

3.4 Applications

Exemple :

Sarah part de chez elle pour aller à l'école. On suppose que sa vitesse est constante.

Elle constate 10 minutes plus tard qu'il lui reste encore 1650 m à parcourir.

28 minutes après être partie, elle n'a plus que 300 mètres à faire.

- a) Faire l'esquisse du graphique qui représente la distance qui reste à parcourir en fonction du nombre de minutes écoulées depuis son départ de la maison. Indiquer les valeurs données dans la consigne et les noms des axes.

- b) Quelle est l'expression de la fonction qui donne la distance qui reste à parcourir en fonction du nombre de minutes écoulées depuis son départ de la maison ?

- c) Quelle est la distance totale entre la maison et l'école ?

- d) Combien de temps met-elle en tout pour aller à l'école ?

ex. 3.20 à 3.25

4 Degré 2

4.1 Factorisation

Pour continuer l'étude des fonctions, il est nécessaire de savoir factoriser des polynômes et résoudre des équations. Nous allons donc réviser les bases du calcul littéral.

Additions et soustractions :

Effectuer les opérations et réduire les expressions ci-dessous.

a) $5x - 8x - (-2x) + x =$

b) $-\frac{3x^2}{7} - \frac{4}{21}x^2 + 2x^2 =$

c) $(x^2 + 2x + 3) + \left(2x^2 + \frac{2}{3}x + 7\right) =$

d) $\left(x^2 + 2x + \frac{1}{7}\right) - (2x^2 + 3x - 7) =$

Multiplications :

Effectuer les opérations et réduire les expressions ci-dessous.

a) $(-2x)(-5x) =$

b) $3x^2(4x - 5) =$

c) $-\frac{2}{3}x^5 \left(x^2 - 15x + \frac{5}{7}\right) =$

d) $(x^2 + 3)(x^3 - 5x) =$

ex. 4.1 à 4.4

Factoriser un polynôme, c'est le transformer en un produit de polynômes, appelés **facteurs**.

- Effectuer et réduire : $(x + 2)(x + 5) \Rightarrow x^2 + 2x + 5x + 10 \Rightarrow x^2 + 7x + 10$
- Factoriser : $x^2 + 7x + 10 \Rightarrow (x + 2)(x + 5)$

Nous allons étudier trois méthodes de factorisation. Elles sont présentées dans l'ordre dans lequel il faut essayer de les appliquer.

Méthode 1 : La mise en évidence

- Effectuer et réduire : $-7x(2x - 3) \Rightarrow -14x^2 + 21x$
- Mettre en évidence : $-14x^2 + 21x \Rightarrow -7x(2x - 3)$

On commence par repérer le **"plus grand diviseur" commun à tous les termes du polynôme à décomposer** et on complète l'autre facteur de manière à ce que le résultat de la multiplication corresponde au polynôme de départ.

Exemples :

A) Mettre en évidence autant que possible de manière à ce que le polynôme obtenu dans la parenthèse ait des coefficients entiers.

a) $-70x^2 + 14x - 35 =$

b) $\frac{1}{10}x^4 - 10x^2 =$

B) Mettre en évidence de manière à ce que le polynôme obtenu dans la parenthèse soit unitaire.

a) $-70x^2 + 14x - 35 =$

b) $\frac{1}{10}x^4 - 10x^2 =$

ex. 4.5 à 4.6

Méthode 2 : Les identités remarquables

Les identités remarquables sont des formules qui permettent de calculer plus rapidement certains produits particuliers. Elles sont particulièrement utiles lorsqu'il s'agit de factoriser un polynôme.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Justification :

Exemples :

A) Effectuer et réduire à l'aide des identités remarquables.

a) $(x + 3)^2 =$

b) $(4x^3 - 5)^2 =$

B) Factoriser.

a) $x^2 - 14x + 49 =$

b) $81x^2 + 180x + 100 =$

Remarque : Pour ces deux identités remarquables, il est important de vérifier aussi le double produit :

$$9x^2 - 10x + 1 \neq (3x - 1)^2$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Justification :

Exemples :

A) Effectuer et réduire à l'aide de l'identité remarquable ci-dessus.

a) $(5x - 4)(5x + 4) =$

b) $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) =$

B) Factoriser.

a) $121x^2 - 400 =$

b) $\frac{25}{196}x^2 - \frac{49}{9} =$

c) $3 - x^2 =$

ex. 4.7 à 4.11

ex. 4.12

Méthode 3 : Décomposition de trinôme unitaire de degré 2 ("somme - produit")

On cherche ici à factoriser des polynômes de type : $x^2 + sx + p$ où s et p sont des nombres connus, le plus souvent entiers.

• Développer et réduire : $(x + 2)(x + 5) \Rightarrow x^2 + 2x + 5x + 10 \Rightarrow x^2 + 7x + 10$

• Factoriser : $x^2 + 7x + 10 \Rightarrow (x + 2)(x + 5)$

Lorsqu'on effectue et réduit $(x + a)(x + b)$, on obtient :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$$

Donc, pour factoriser $x^2 + sx + p$, on doit trouver deux nombres a et b tels que :

$s = a + b$	et	$p = a \cdot b$
somme		produit

Exemples :

a) $x^2 + 8x + 7 =$

b) $x^2 + x - 6 =$

c) $x^2 - 9x + 20 =$

ex. 4.13 à 4.14

Récapitulation : Lorsqu'on doit factoriser un polynôme du deuxième degré, on commence par réduire et ordonner le polynôme, puis on regarde si l'on peut mettre quelque chose en évidence. Ensuite, on observe le nombre de termes, les coefficients et leurs signes pour reconnaître si l'on peut utiliser une identité remarquable ou "somme - produit". Quand cela n'est pas le cas, il faut utiliser une quatrième méthode que nous verrons plus loin.

Il ne faut pas s'arrêter avant d'être sûr d'avoir factorisé le plus possible.

Exemples :

a) $2x^2 - 162 =$

b) $90x^2 + 60x + 10 =$

c) $-x^2 + 13x - 36 =$

d) $\frac{1}{10}x^2 - \frac{72}{5} =$

ex. 4.15

4.2 Équations du deuxième degré

Remplir ce tableau de valeurs.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x - 1$							
$x + 3$							
$(x - 1)(x + 3)$							

Observer le tableau. Quelles sont les solutions de l'équation $(x - 1)(x + 3) = 0$?

Lorsqu'une équation a un membre factorisé et l'autre nul, ses solutions se déterminent facilement. Il suffit de trouver les zéros de chacun des facteurs.

$$A(x)B(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0$$

Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.

Exemple : Résoudre l'équation $3x(x + 7)(x - 5)(3x + 8) = 0$.

Donc, pour résoudre une équation de degré 2 ou plus, nous procéderons, si possible, de la manière suivante :

- Mettre l'équation sous forme canonique.
- Factoriser le polynôme obtenu.
- Trouver les zéros des facteurs.

Comme pour toute autre résolution d'équation, on conclut en écrivant l'ensemble des solutions. Il est bien sûr conseillé d'effectuer la vérification des solutions en remplaçant dans l'équation de départ.

Exemples : Résoudre.

a) $x(x + 4) = -4$

b) $5x^2 = 20(2x - 3)$

c) $9x^2 - 4x = 0$

d) $x^2 + 4 = 0$

ex. 4.16 à 4.17

Peut-on résoudre l'équation $2x^2 - 3x - 2 = 0$ par factorisation ?

Certaines équations du deuxième degré ne sont pas faciles à résoudre par factorisation. Nous allons voir une formule générale qui permet de résoudre toutes les équations du deuxième degré.

Pour utiliser la formule, il faut d'abord mettre l'équation du deuxième degré sous forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$a \neq 0$, car l'équation doit être du deuxième degré.

On appelle $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de cette équation.

Trois cas peuvent se présenter :

- si $\Delta > 0$, l'équation possède exactement deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, l'équation possède exactement une solution : $x = -\frac{b}{2a}$
- si $\Delta < 0$, l'équation ne possède aucune solution dans $\mathbb{R}$. On note alors $S = \emptyset$.

Exemples : a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ b) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ c) $x^2 + x + 1 = 0$

ex. 4.18 à 4.19

Exemples : Quelle méthode choisir pour résoudre chacune de ces équations le plus efficacement possible ?

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $4x^2 - 28x + 49 = 0$

c) $5z^2 + 7z - 6 = 0$

d) $x^2 + x - 1 = 0$

e) $2x^2 - 26 = 0$

f) $2x^2 - 26x = 0$

On peut factoriser un polynôme du deuxième degré $ax^2 + bx + c$ à l'aide de la formule de résolution des équations du deuxième degré.

Il faut procéder de la manière suivante :

- Trouver, si elles existent, les solutions x_1 et x_2 de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. S'il n'y a qu'une solution, on prend $x_2 = x_1$.
- La forme factorisée de $ax^2 + bx + c$ est :

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si $ax^2 + bx + c = 0$ ne possède aucune solution, le polynôme $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.

Exemples : Factoriser. Pour le a) vérifier la réponse obtenue en effectuant la multiplication.

a) $2x^2 - 7x - 4$

b) $6x^2 + 5x + 1$

c) $25x^2 - 10x + 1$

ex. 4.21

En résumé :

Lorsque l'on veut factoriser un polynôme, on commence par essayer la **mise en évidence** :

$$-88x^5 - 33x^3 = -11x^3(8x^2 + 3)$$

La parenthèse obtenue doit, lorsque c'est possible, être encore factorisée.

Pour le deuxième degré, les différentes méthodes sont :

- Repérer une **identité remarquable** :

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

- Décomposer un **trinôme unitaire de degré 2** :

$$x^2 + (a + b)x + a \cdot b = (x + a)(x + b)$$

- Utiliser la **formule du discriminant** :

Si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$\text{où } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta < 0$, le polynôme n'est pas factorisable.

ex. 4.22

4.3 Fonctions quadratiques

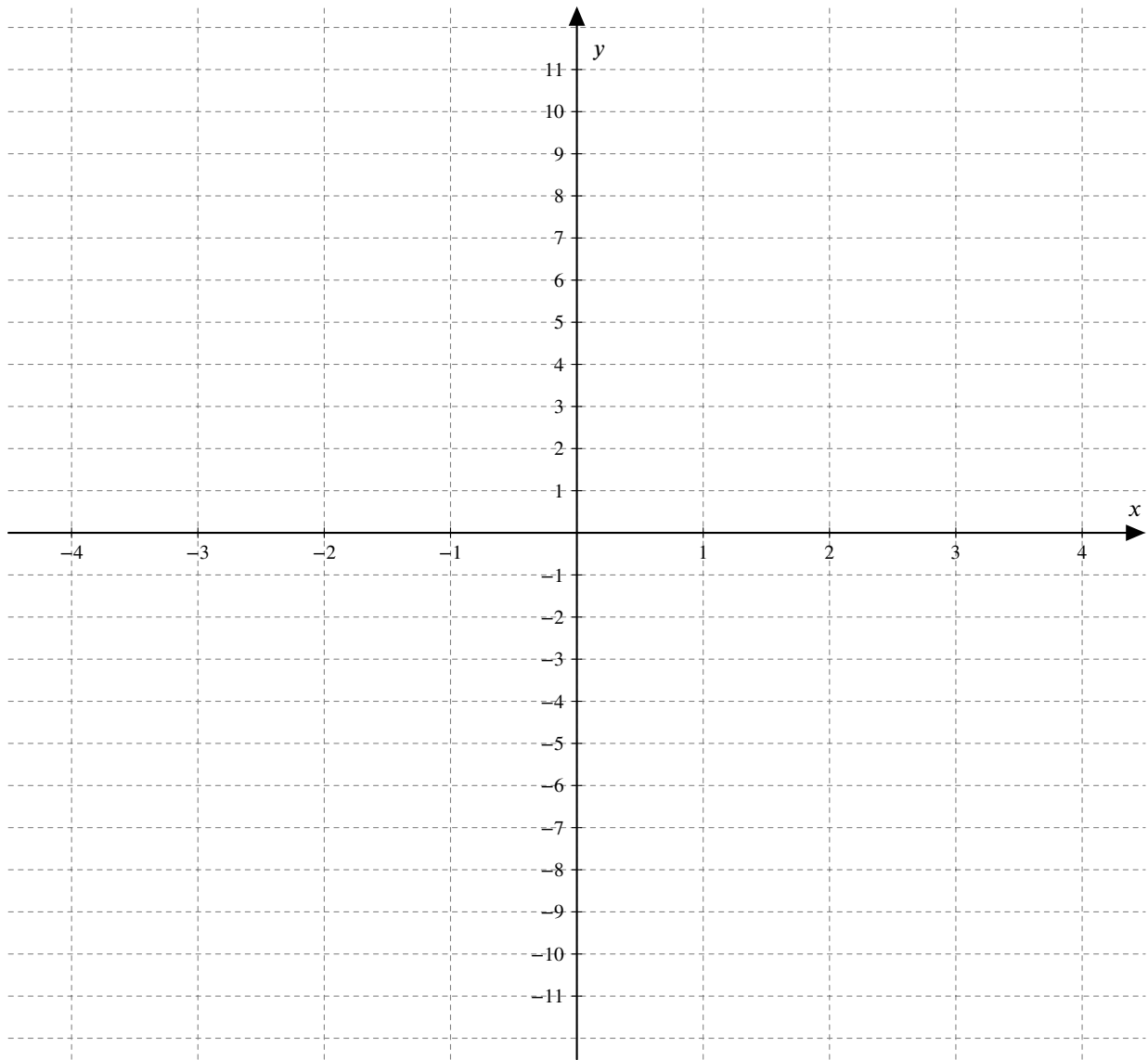
Une **fonction quadratique** est une fonction polynomiale du 2^{ème} degré.

Son expression peut se ramener à une expression du type :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Exemples : Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions f et g .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2 + 3x$									
$g(x) = -0,5x^2 + 2x - 2$									



ex. 4.23 à 4.24

Le graphe de la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une **parabole**.

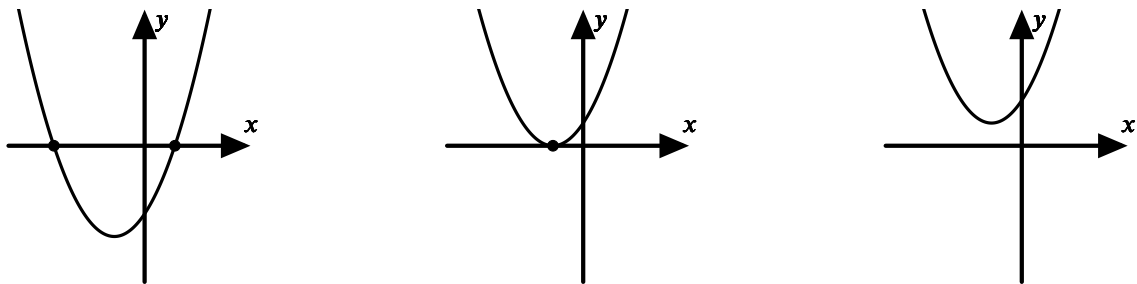
Les **points caractéristiques de la parabole** sont le sommet et les intersections avec les axes.

L'intersection avec l'axe Oy a pour coordonnées $(0; c)$. Le coefficient c est l'**ordonnée à l'origine**, puisque $f(0) = c$.

Une parabole $y = ax^2 + bx + c$ peut couper l'axe Ox en 0, 1 ou 2 points. Leurs premières coordonnées correspondent aux **zéros** de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$. Leurs deuxièmes coordonnées valent 0.

On peut les trouver en résolvant l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$:
L'équation a 2 solutions.
La fonction a 2 zéros.
La parabole coupe l'axe Ox en 2 points.
- Si $\Delta = 0$:
L'équation a 1 solution.
La fonction a 1 zéro.
La parabole est tangente à l'axe Ox .
- Si $\Delta < 0$:
L'équation n'a pas de solution.
La fonction n'a pas de zéro.
La parabole ne coupe pas l'axe Ox .



Esquisser le graphe d'une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ qui correspond aux contraintes de chaque case.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

ex. 4.25 à 4.26

La parabole a un **sommet** et un **axe de symétrie vertical** qui passe par ce sommet.

Si $a > 0$:

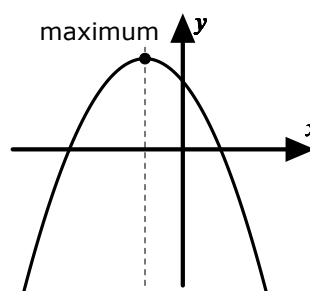
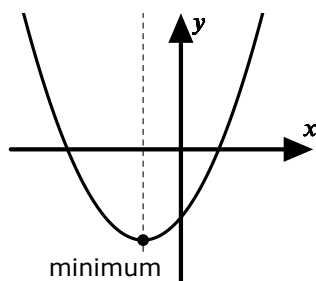
La parabole "sourit", elle est **convexe**.

Le sommet est alors un **minimum**.

Si $a < 0$:

la parabole "est triste", elle est **concave**.

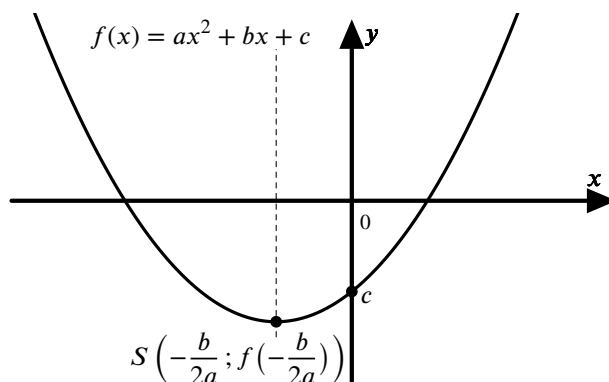
Le sommet est alors un **maximum**.



La première coordonnée du sommet S peut se calculer grâce aux coefficients de l'expression de la fonction :

$$x_S = -\frac{b}{2a}$$

Pour trouver la deuxième coordonnée, il suffit de calculer l'image de x_S .



Justification :

- Quels sont les zéros de la fonction $f(x) = ax^2 + bx$?
- Calculer la moyenne de ces deux zéros.
- Quelle est l'équation de l'axe de symétrie de la parabole $y = ax^2 + bx$?
- Comparer les graphes de $f(x) = ax^2 + bx$ et $g(x) = ax^2 + bx + c$.
- Que peut-on en conclure à propos du sommet de $y = ax^2 + bx + c$?

ex. 4.27

Exemples : Déterminer l'expression de la fonction quadratique : ...

a) dont les zéros sont -3 et 1 et l'ordonnée à l'origine 15 ;

b) dont les zéros sont -3 et 1 et passe par le point $(5 ; 64)$;

ex. 4.28 à 4.29

Exemple : Déterminer l'expression de la fonction dont les zéros sont -3 et 1 et ...

a) ...l'ordonnée à l'origine 15 .

b) ...passe par le point $(5 ; 64)$.

ex. 4.30 à 4.32

4.4 Intersections de graphes

Pour trouver la première coordonnée des éventuels points d'intersection du graphe de f et du graphe de g , il faut résoudre l'équation :

$$f(x) = g(x)$$

Pour trouver la deuxième coordonnée, on calcule l'image des valeurs obtenues.

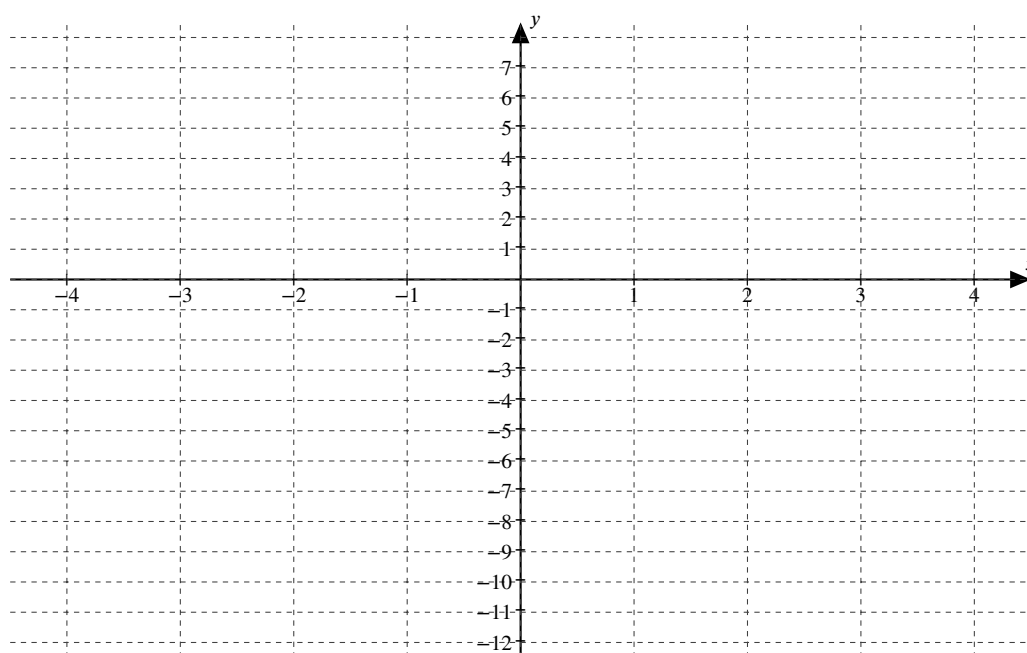
Exemple :

Soit les fonctions f et g définies par

$$f(x) = -x^2 + 5$$

$$g(x) = -\frac{3}{2}x - 5$$

Calculer les coordonnées exactes des points d'intersection du graphe de f et du graphe de g , puis vérifier vos résultats en représentant graphiquement ces fonctions.



ex. 4.32 à 4.33

4.5 Applications

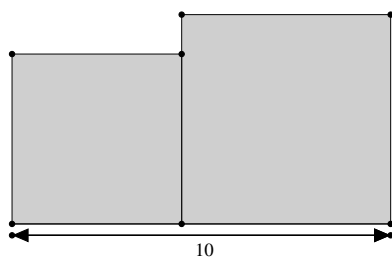
Pour résoudre un problème à l'aide d'une équation, nous procéderons de la manière suivante :

- lire soigneusement tout le problème et effectuer éventuellement un croquis de la situation,
- déterminer l'objet ou la quantité à trouver, choisir l'inconnue avec son unité,
- poser l'équation exprimant la situation décrite,
- résoudre l'équation,
- contrôler les solutions obtenues pour que le problème reste cohérent,
- donner la réponse au problème à l'aide d'une phrase, sans oublier les unités.

Exemple : Quelles sont les dimensions d'un terrain rectangulaire dont la longueur mesure 30 m de plus que sa largeur et 30 m de moins que sa diagonale ?

Exemple : On veut créer deux pièces carrées différentes le long d'un mur de 10 m de long. L'aire de la plus grande doit être 1,5 fois celle de la petite.

Quelles seront les dimensions de ces deux pièces ?



ex. 4.35 à 4.37

Parfois, on nous demande de chercher à déterminer quand une mesure sera maximum ou minimum. Il s'agit alors d'un problème d'**optimisation**.

On procédera de la manière suivante :

- lire soigneusement tout le problème et effectuer éventuellement un croquis de la situation,
- déterminer les variables avec leur unité,
- écrire les équations liant les différentes variables,
- définir la quantité à optimiser avec son unité et l'exprimer en fonction des variables choisies,
- substituer pour n'avoir plus qu'une seule variable dans la fonction,
- déterminer les valeurs qui maximisent ou minimisent la fonction,
- vérifier que les solutions obtenues soient cohérentes avec l'ensemble du problème,
- donner la réponse au problème à l'aide d'une phrase, sans oublier les unités.

Exemple : Je désire construire un enclos rectangulaire pour mon lapin. Un des côtés de l'enclos sera le mur de ma maison et les 3 autres seront faits grâce à une cloture de 6 mètres de longueur.

Quelles dimensions vais-je choisir pour que mon lapin ait le plus d'espace possible ?

ex. 4.38 à 4.42

5 Systèmes d'équations

5.1 Système d'équations linéaires 2 x 2

Une équation à deux inconnues x et y est **linéaire** lorsqu'elle est équivalente à une équation de la forme :

$$ax + by = c \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}$$

La forme $ax + by = c$ est dite forme **normale** de l'équation.

Un **système d'équations linéaires 2 x 2** est composé de deux équations linéaires qui ont au total deux inconnues et que l'on considère simultanément. Une accolade indique que les équations forment un système.

Exemples :

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 6x - 5y = -21 \\ -2x = 7 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = -3y - 5 \\ 2x + 11 = 5y \end{cases}$$

Résoudre un système d'équations, c'est trouver l'ensemble des couples de la forme $(x; y)$ qui vérifient toutes les équations du système simultanément. On notera $\mathcal{S} = \{(1; 2)\}$, si la seule solution du système est $(1; 2)$.

Exemples : Les couples $(-7; 7)$ et $(3; 2)$ sont-ils des solutions de l'exemple a) ci-dessus ?

5.1.1 Résolution par substitution

- Isoler une des inconnues d'un côté d'une des équations.
- Substituer l'inconnue par le résultat dans l'autre équation du système.
- Résoudre l'équation à une inconnue obtenue.
- Calculer la deuxième inconnue à l'aide de l'équation de substitution et la valeur obtenue.

Exemple : Résoudre ce système d'équations par substitution.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 10 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

ex. 5.1

5.1.2 Résolution par combinaison linéaire

- Mettre les équations sous forme normale.
- Amplifier chaque équation par un nombre, de sorte que le coefficient d'une des inconnues dans la première équation soit opposé à celui de la même inconnue dans la deuxième équation.
- Additionner membre à membre les deux équations obtenues. Une inconnue sera ainsi éliminée.
- Résoudre l'équation à une inconnue.
- Trouver l'autre inconnue, soit en substituant celle obtenue dans une des équations de départ, soit en reprenant depuis le début et en faisant une combinaison linéaire qui élimine l'autre inconnue.

Exemples : Résoudre les systèmes d'équations par combinaison linéaire.

a)
$$\begin{cases} 4x + 5y = 11 \\ 7y - 24 = 3x \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3y - 6 = 7x \\ 5x - 5y + 9 = 0 \end{cases}$$

ex. 5.2 à 5.3

En général, un système linéaire 2x2 a une unique solution.

Cependant, on peut rencontrer les cas particuliers suivants :

- Un système est **impossible** s'il n'admet pas de solution. On note alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Un système est **indéterminé** s'il admet une infinité de solutions. (Voir l'exemple b) ci-dessous pour la notation de l'ensemble des solutions.)

Exemples :

a) Comparer les deux équations puis résoudre.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = 9 \end{cases}$$

b) Comparer les deux équations puis résoudre.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = 12 \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions mais ce n'est pas pour autant que n'importe quel couple $(x; y)$ est une solution de ce système.

Vérifier que $(1; 1)$ n'est pas une solution de ce système, puis que $(6; 2)$ et $(0; -2)$ en sont des solutions.

Trouver d'autres solutions.

Notation de l'ensemble des solutions :

ex. 5.4 à 5.6

5.1.3 Applications

Les systèmes d'équations sont souvent utilisés pour la résolution de problèmes. La marche à suivre est semblable à celle vue pour les problèmes à une inconnue :

- Lire soigneusement tout le problème et faire éventuellement un croquis de la situation.
- Déterminer les grandeurs à trouver, y compris leurs unités, et leur attribuer les inconnues.
- Poser les équations exprimant la situation décrite.
- Résoudre le système.
- Contrôler que l'on a trouvé tout ce qui était demandé.
- Donner la réponse au problème à l'aide d'une phrase, sans oublier les unités.

Exemples :

- a) Un agriculteur a une exploitation de 100 hectares sur laquelle poussent des laitues et des choux.

Chaque hectare de choux nécessite 600 heures de travail, et chaque hectare de laitues nécessite 400 heures de travail.

Si l'on dispose de 45'000 heures et que tout le terrain et toute la main-d'œuvre doivent être utilisés, trouver le nombre d'hectares de chaque légume qu'il faudrait planter.

- b) À l'aide d'un système d'équations, déterminer les coefficients m et h de l'équation $y = mx + h$ de la droite passant par les points $A(-1; -2)$ et $B(2; -1)$.

ex. 5.7 à 5.13

5.2 Système d'équations du deuxième degré

Un système d'équations est du **deuxième degré** si une des équations qui le composent est de degré 2 et que l'autre est de degré inférieur ou égal à 2.

Exemples :

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 9x^2 + y^2 + 3x = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y = -5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 + y^2 + 3y = 37 \\ 2x^2 + 2y^2 - 3x = 41 \end{cases}$$

Lorsqu'une des équations est de degré 1, on peut utiliser la substitution.

Exemples :

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 9x^2 + y^2 + 3x = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y = -5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$$

ex. 5.14

Si les deux équations sont de degré 2, on essaiera d'éliminer tous les termes de degré 2 ou une des inconnues par combinaison linéaire.

Exemples :

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 + 3y = 37 \\ 2x^2 + 2y^2 - 3x = 41 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + 3y = 54 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

ex. 5.15

5.3 Systèmes d'équations linéaires 3 x 3

5.3.1 Résolution d'un système d'équations linéaires 3 x 3

Un **système d'équations linéaires 3 x 3** est composé de trois équations à trois inconnues x , y et z , équivalentes à des équations de la forme :

$$ax + by + cz = d \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Une **solution** de ce système est un triplet $(x; y; z)$ qui vérifie les trois équations.

Exemples : Est-ce que $(1; 0; 5)$ est une solution des systèmes d'équations ci-dessous ?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x + 7y - z = -3 \\ -3x + 2y + 3z = 12 \\ -5x - 3y + 2z = 5 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 6 \\ x + y - z = 6 \end{cases} \end{array}$$

Pour résoudre de tels systèmes, nous procéderons de la manière suivante :

- Choisir une des équations et s'en servir pour éliminer une des inconnues dans les deux autres équations, à l'aide de combinaisons linéaires.
- Résoudre le système 2 x 2 obtenu.
- Trouver l'inconnue manquante grâce à l'une des équations de départ.

Exemples : Résoudre.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 7y - z = -3 \\ -3x + 2y + 3z = 12 \\ -5x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

ex. 5.16 à 5.17

$$\text{b) } \begin{cases} 3y + z = 5 \\ x + y = 7 \\ -x + z = 4 \end{cases}$$

ex. 5.18

5.3.2 Applications**Exemples :**

a) Un fleuriste vend des roses, des marguerites et des lys.

J'ai acheté un bouquet de 3 roses, 1 marguerite et 3 lys.

Ma sœur a acheté un bouquet de 2 roses, 9 marguerites et 2 lys.

Mon frère a acheté un bouquet de 5 roses, 5 marguerites et 1 lys.

Sachant que nous avons dépensé chacun CHF 25.–, déterminer le prix de chaque sorte de fleur.

ex. 5.19 à 5.23

b) Déterminer l'expression de la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont le graphe passe par les points $(1; 0)$, $(-1; 6)$ et $(2; 3)$.

ex. 5.24 à 5.25

6 Degrés 3 et plus

6.1 Factorisation

Nous allons maintenant voir plusieurs méthodes pour factoriser les polynômes de degré supérieur à 2. Pour choisir la bonne méthode, il est important d'observer le polynôme avant de se lancer dans les calculs. **Comme auparavant, on commence toujours par la mise en évidence.** On essaie ensuite une des méthodes suivantes.

6.1.1 Méthode 1 : Produits remarquables du 3^e degré

Tout comme pour le 2^e degré, il existe des identités remarquables pour le 3^e degré :

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

Justifications :

On peut les utiliser pour factoriser certains polynômes.

Exemples : Factoriser.

a) $x^3 - 64$

b) $1000x^3 + 300x^2 + 30x + 1$

ex. 6.1 à 6.3

6.1.2 Méthode 2 : Changement de variable

Effectuer, réduire et comparer :

a) $(x^2 + 5)(x^2 + 2)$

b) $(y + 5)(y + 2)$

Dans certains cas, le polynôme à factoriser ressemble à un polynôme que l'on sait déjà factoriser mais ses puissances ont été doublées.

Exemple : $x^4 - 7x^2 + 12$

Pour le factoriser, on effectue un **changement de variable** : On pose $y = x^2$ et donc $y^2 = x^4$.

Puis on factorise notre polynôme en y .

Ensuite, on revient aux x et on factorise encore si l'on peut.

Exemples : Factoriser.

a) $x^4 - 18x^2 + 81$

b) $30x^5 - 70x^3 - 200x$

ex. 6.4 à 6.5

Effectuer, réduire et comparer :

a) $(x^3 + 1)(x^3 - 5)$

b) $(y + 1)(y - 5)$

Un changement de variable peut donc aussi s'utiliser si les puissances ont été multipliées par un autre entier que 2.

Exemples : Factoriser.

a) $x^8 - 17x^4 + 16$

b) $x^6 - 1$

ex. 6.6

6.1.3 Méthode 3 : Méthode du groupement

La **méthode du groupement** est une mise en évidence un peu plus complexe que celles effectuées jusque-là. Nous l'utiliserons avec des polynômes à 4 termes.

Effectuer les multiplications ci-dessous et observer les résultats obtenus :

a) $3x^2(2x + 11) =$

b) $7(2x + 11) =$

c) $(3x^2 + 7)(2x + 11) =$

Exemples : Factoriser.

a) $11x^3 - 3x^2 - 44x + 12$

b) $x^4 + 7x^3 + 8x + 56$

ex. 6.7 à 6.8

ex. 6.9 à 6.10

6.2 Factorisation par division

6.2.1 Division euclidienne

Les méthodes de factorisation que nous avons vues ne sont utilisables que dans des cas bien particuliers. Pour pouvoir factoriser d'autres polynômes, nous devons apprendre à faire une division polynomiale, car pour factoriser, il faut parfois diviser.

Exemple : Écrire 5999 sous forme d'une multiplication, sachant qu'il est divisible par 7.

La méthode de division pour les polynômes est très similaire à la division en colonne pour les nombres.

Exemples : Effectuer la division euclidienne de 92'737 par 5. Expliquer les étapes de la méthode.

Écrire l'égalité fondamentale.

Nous allons maintenant diviser $14x^3 - 29x^2 - 5$ par $2x^2 - 3x + 1$.

Égalité fondamentale :

Exemples : Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x) = 6x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 2x^2 - 5$ et $G(x) = 3x^3 + 7$ b) $F(x) = 4x^3 - 28x + 24$ et $G(x) = x^2 + 2x - 3$

ex. 6.11 à 6.14

Méthode de Horner

Exemples : Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

- a) $F(x) = 5x^4 + 6x^2 + x - 5$ et $G(x) = x + 2$
- b) $F(x) = 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 19x - 21$ et $G(x) = x - 3$

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
x^3	x^2	x	x^0	reste

ex. 6.15

En observant le dernier exemple de la page précédente, on peut remarquer que, lorsque le reste est nul, l'écriture de l'égalité fondamentale est une manière de factoriser.

Exemple : $F(x) = 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 19x - 21 =$

Lorsque le reste de la division de $F(x)$ par $G(x)$ est égal à zéro, on dit que $F(x)$ est **divisible** par $G(x)$.
 $G(x)$ est alors un **diviseur** de $F(x)$.

Exemple : $F(x) = 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 19x - 21$ est divisible par $G(x) = x - 3$.

$G(x) = x - 3$ est un diviseur de $F(x) = 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 19x - 21$.

Mais comment peut-on trouver un diviseur pour un polynôme $F(x)$ donné ?

Exemple : Observons le polynôme factorisé : $F(x) = (x - 10)(2x + 1)(x + 3)$

a) Effectuer et réduire $F(x)$.

b) Comparer le terme de degré zéro avec la forme factorisée de $F(x)$. Que pouvez-vous en dire ? Pouvez-vous l'expliquer ?

c) Calculer $F(10)$ à l'aide du polynôme réduit, puis du polynôme factorisé. Que pouvez-vous en dire ? Pouvez-vous l'expliquer ?

Critère de divisibilité par $x - a$:

Soit un polynôme $F(x)$ et un nombre réel a .

$$F(x) \text{ est divisible par } x - a \text{ si et seulement si } F(a) = 0$$

Preuve : Si $F(x)$ est divisible par $x - a \Rightarrow$ Le reste de la division de $F(x)$ par $x - a$ est nul.

$$\Rightarrow F(x) = (x - a) \cdot Q(x) \text{ pour } Q(x) \text{ le quotient de la division de } F(x) \text{ par } x - a$$

$$\Rightarrow F(a) = (a - a) \cdot Q(a) = 0$$

$$\text{Si } F(a) = 0$$

On appelle $Q(x)$ le quotient de la division de $F(x)$ par $x - a$ et R le reste de cette division.

(R est de degré 0 car on a divisé par un polynôme de degré 1. C'est donc un nombre.)

On a l'égalité fondamentale : $F(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$

$$F(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R = R \text{ et } F(a) = 0 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow F(x) \text{ est divisible par } x - a$$

#

Exemples :

- a) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessous, les polynômes divisibles par $x + 10$.

$$A(x) = x^3 + 7x^2 + 6x - 8$$

$$B(x) = x^{300} - 5x^{23} + 3x + 1$$

$$C(x) = 2x^3 - 7x^2 - 200x + 700$$

$$D(x) = x^3 + 11x^2 + 4x - 60$$

- b) Pour ceux qui sont divisibles par $x + 10$, effectuer la division, écrire l'égalité fondamentale et finir la factorisation.

ex. 6.16 à 6.20

6.2.2 Méthode 4 : Factorisation par division :

Pour factoriser un polynôme $F(x)$ par division, on procède de la manière suivante :

- Recenser les « *suspects* », c'est-à-dire les diviseurs positifs et négatifs du terme de degré 0 de $F(x)$.
- Trouver un des « *coupables* », en testant les suspects jusqu'à avoir trouvé a tel que $F(a) = 0$.
- Effectuer la division de $F(x)$ par $x - a$. Son reste doit être nul.
- Écrire l'égalité fondamentale de cette division. La première étape de factorisation est faite.
- Si cela est possible, continuer la factorisation à l'aide de la même méthode ou d'une autre méthode connue.

Exemples : Factoriser.

a) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

b) $6x^4 - 19x^3 + 13x^2 + 4x - 4$

ex. 6.21

Exemple : Résoudre $6x^4 + 43x^3 + 6x^2 - 7x = 0$.

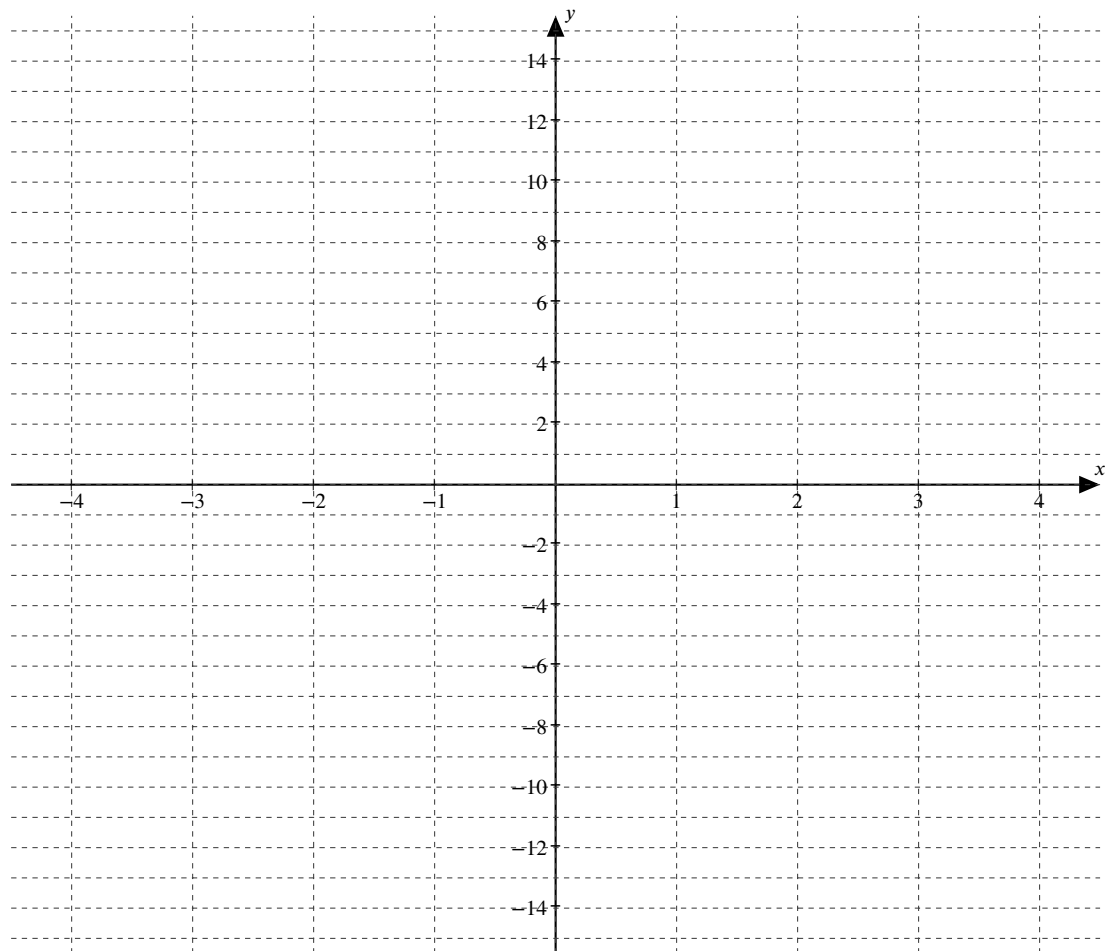
ex. 6.22 à 6.23

6.3 Signe d'une fonction polynomiale

6.3.1 Généralités

Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement la fonction f .

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = (x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)$							



On peut remarquer que le tableau de valeurs n'est pas forcément l'outil idéal pour représenter une fonction polynomiale. Les valeurs intéressantes, par exemple les zéros de la fonction, n'apparaissent pas systématiquement dedans. De plus, il y a beaucoup de calculs à effectuer pour le remplir.

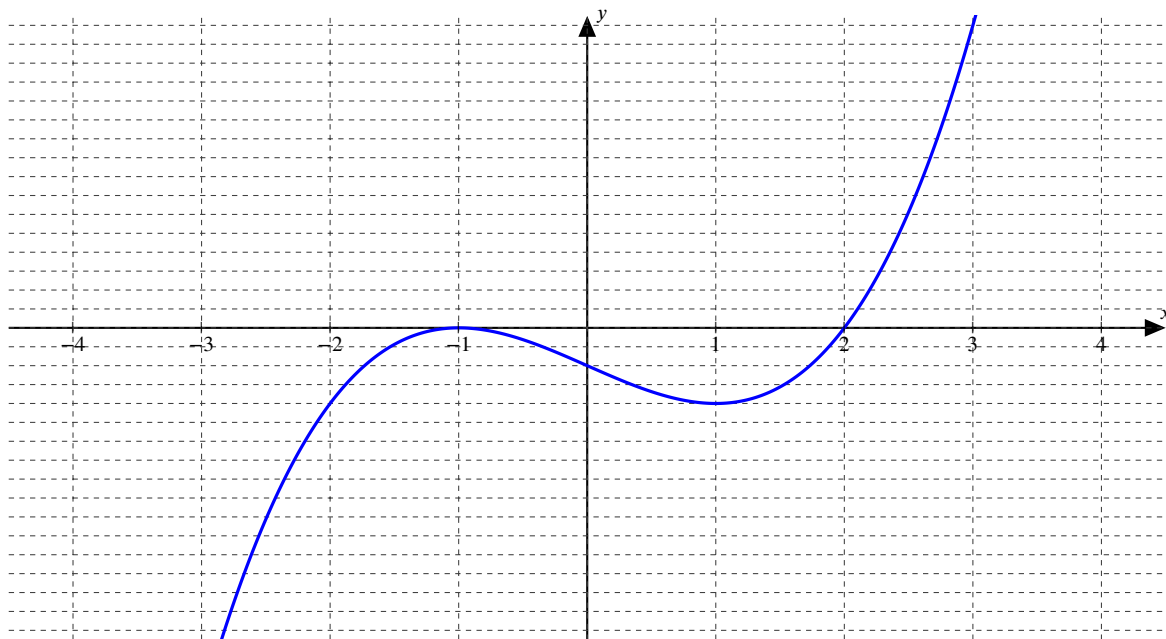
Il est souvent plus simple et approprié d'utiliser le **tableau des signes de la fonction**. C'est un tableau dans lequel la première ligne contient les zéros et les valeurs interdites de la fonction, tandis que la deuxième indique le signe des images obtenues :

x		-2		-0,5		3	
$f(x) = (x+2)(x+0,5)(x-3)$	-	0	+	0	-	0	+

On dit alors qu'on **étudie le signe de la fonction**.

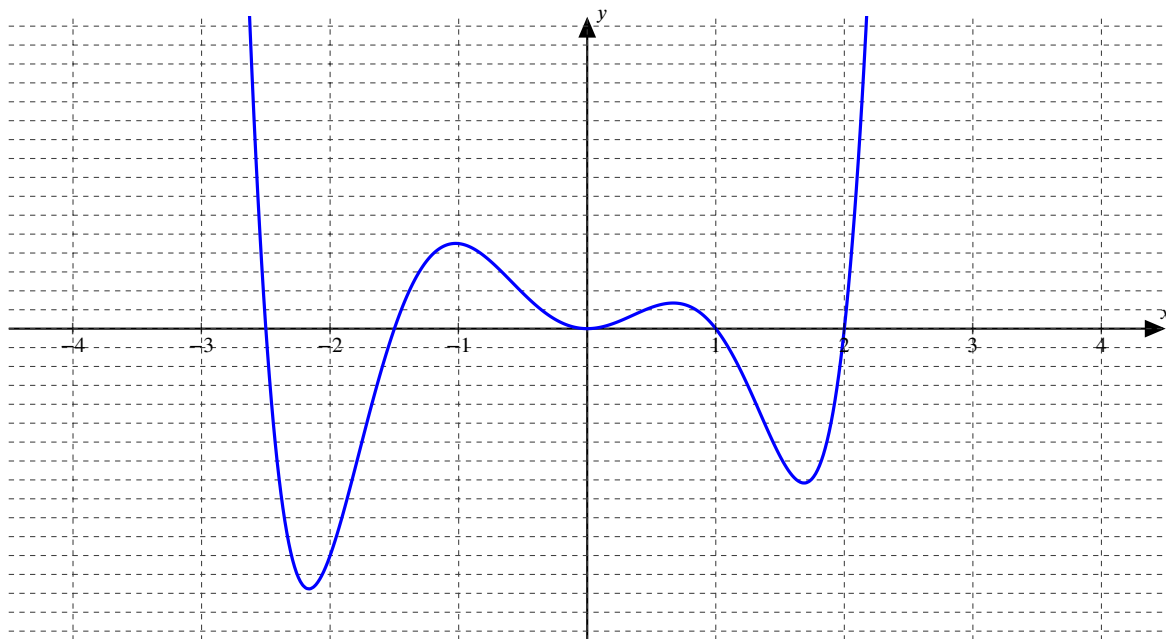
Exemples : Compléter le tableau des signes des fonctions représentées ci-dessous.

a)



x	
$f(x)$	

b)

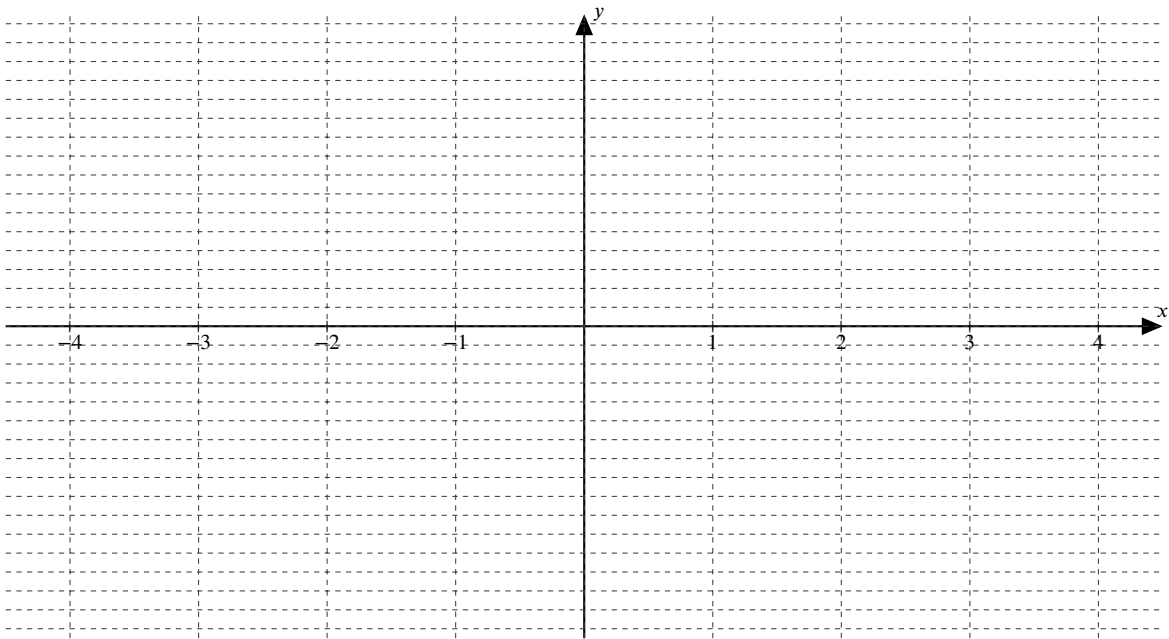


x	
$f(x)$	

Exemples : Faire une esquisse du graphe d’une fonction correspondant au tableau des signes.

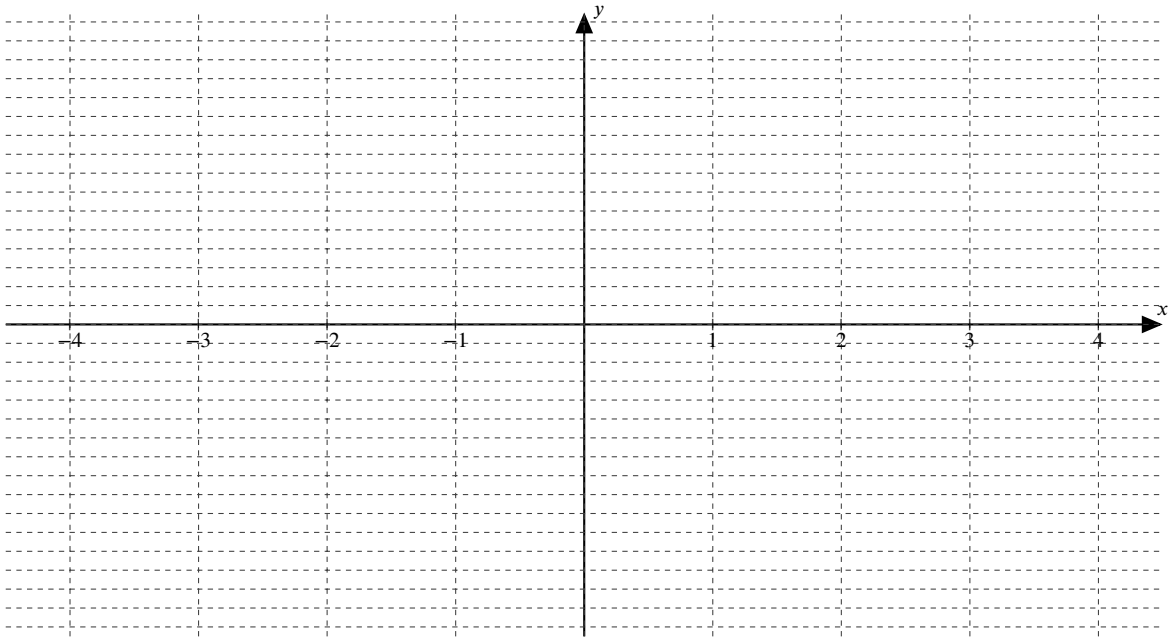
a)

x		-3		-1		3,5	
$f(x)$	-	0	+	0	+	0	+



b)

x		-2		0		1,5		3	
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	-



ex. 6.24 à 6.26

6.3.2 Signe d'un produit

Exemple : Compléter ce tableau de valeurs, puis le tableau des signes correspondant.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$4x$		-12	-8	-4	0	4	8	12	16
$x + 3$		0	1	2	3	4	5	6	7
$2 - x$		5	4	3	2	1	0	-1	-2
$4x(x + 3)(2 - x)$									

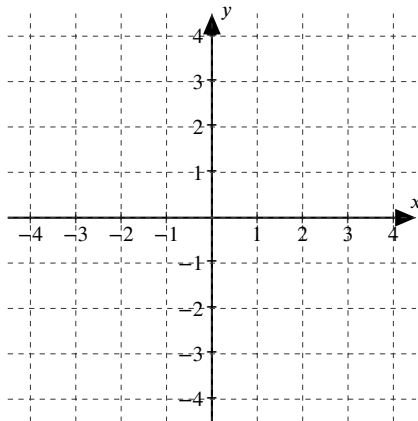
x	
$4x$	
$x + 3$	
$2 - x$	
$4x(x + 3)(2 - x)$	

On peut observer que le signe du produit est déterminé par les signes des facteurs et la règle des signes. Or, tout polynôme est décomposable en produit de facteurs du 1^{er} et du 2^e degrés. Nous allons donc étudier le signe des fonctions affines et quadratiques et nous en servir pour trouver le signe des autres polynômes.

6.3.3 Signe d'une fonction affine

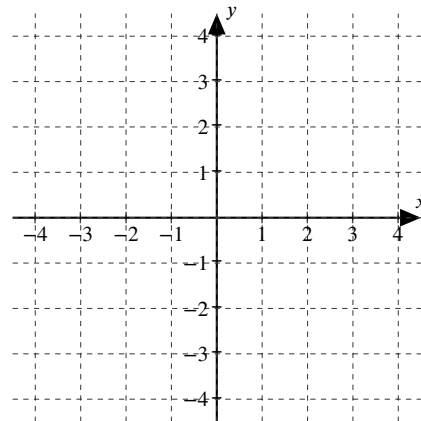
Exemples : Représenter le graphe de la fonction, puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x) = 2x - 4$



x	
$f(x)$	

b) $g(x) = -2x - 2$



x	
$f(x)$	

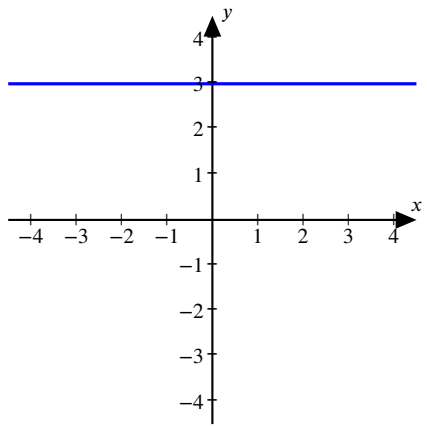
Comment peut-on reconnaître l'expression d'une fonction affine correspondant aux signes de chacun des tableaux ?

Observations : Le graphe d’une fonction affine $f(x) = mx + h$ est une droite. On a donc les cas de figure suivants :

(A) Si $m = 0$, la fonction est constante et son signe est celui de h .

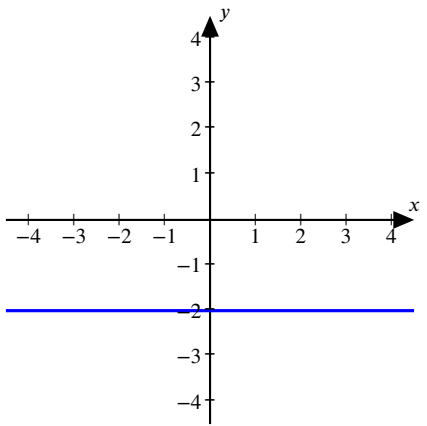
Exemples :

a) $f(x) = 3$



x	
$f(x)$	+

b) $g(x) = -2$

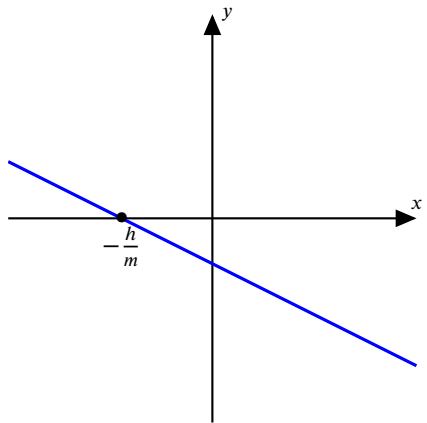


x	
$g(x)$	-

(B) Si $m \neq 0$, la fonction a un unique zéro, que l’on trouve en résolvant l’équation $mx + h = 0$.

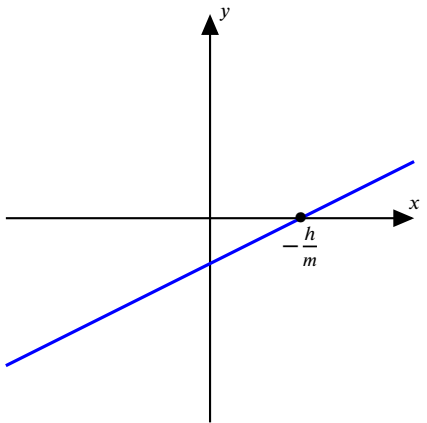
Le signe de la fonction dépend du signe de la pente m .

- si la pente est négative



x		$-\frac{h}{m}$	
$f(x)$	+	0	-

- si la pente est positive



x		$-\frac{h}{m}$	
$f(x)$	-	0	+

Exemples : Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$5x + 10$	

b)

x	
$5x - 10$	

c)

x	
$-5x + 10$	

d)

x	
$-5x - 10$	

e)

x	
$-5x$	

f)

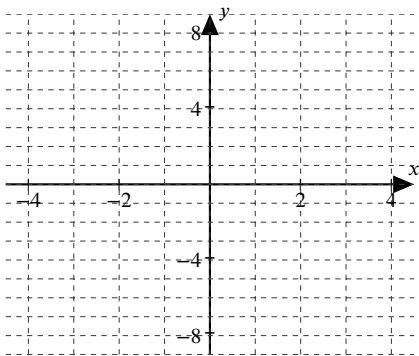
x	
-10	

ex. 6.27 à 6.29

6.3.4 Signe d’une fonction quadratique

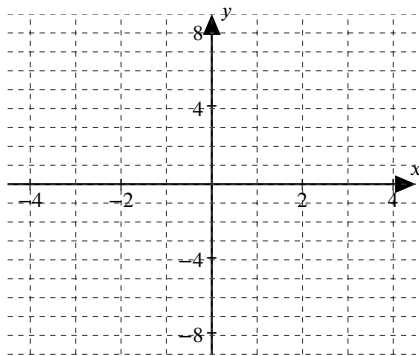
Exemples : Représenter le graphe de la fonction, puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x) = x^2 - 9$



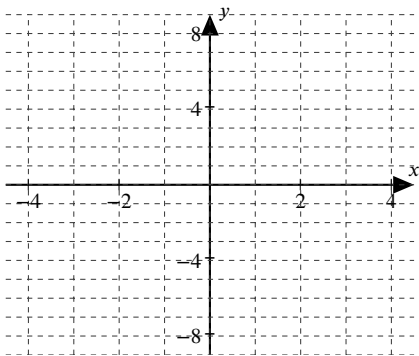
x	
$f(x)$	

c) $h(x) = -x^2 + 9$



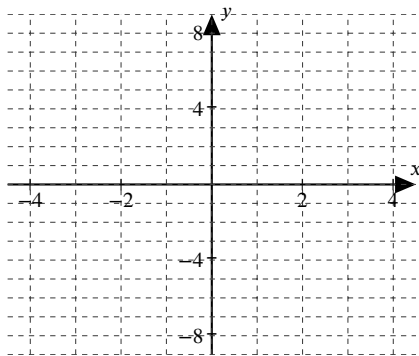
x	
$h(x)$	

b) $g(x) = x^2 + 3x$



x	
$g(x)$	

d) $i(x) = -0,5x^2$

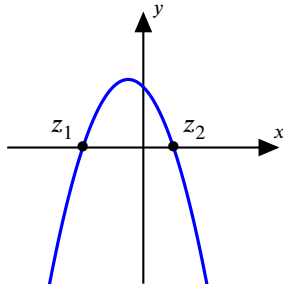


x	
$i(x)$	

Observations : Le graphe d'une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole. On a donc les cas de figure suivants :

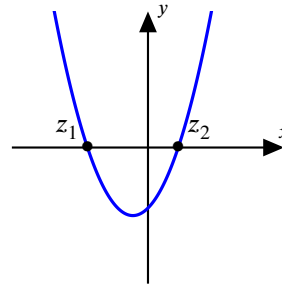
(A) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la fonction a deux zéros, que l'on peut calculer grâce à $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- si $a < 0$



x		z_1		z_2	
$f(x)$	-	0	+	0	-

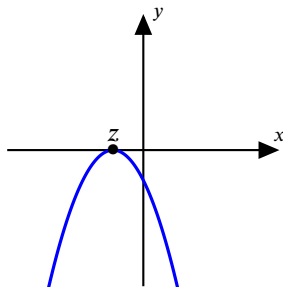
- si $a > 0$



x		z_1		z_2	
$f(x)$	+	0	-	0	+

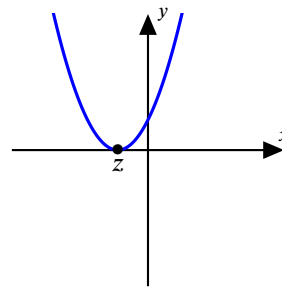
(B) Si $\Delta = 0$, la fonction a un seul zéro, que l'on peut calculer grâce à $z = \frac{-b}{2a}$.

- si $a < 0$



x		z	
$f(x)$	-	0	-

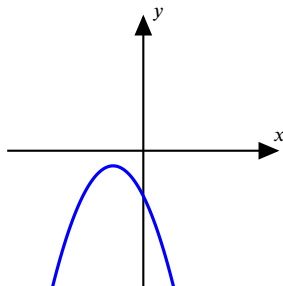
- si $a > 0$



x		z	
$f(x)$	+	0	+

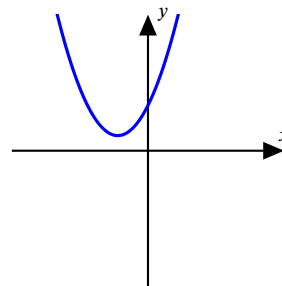
(C) Si Δ est négatif, la fonction n'a pas de zéro.

- si $a < 0$



x	
$f(x)$	-

- si $a > 0$



x	
$f(x)$	+

Exemples : Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$x^2 + 7x + 10$	

d)

x	
$-x^2 - 16$	

b)

x	
$-9x^2 + 6x - 1$	

e)

x	
$x^2 - 6x + 9$	

c)

x	
$2x^2 + x + 1$	

f)

x	
$-2x^2 + x + 1$	

ex. 6.30 à 6.32

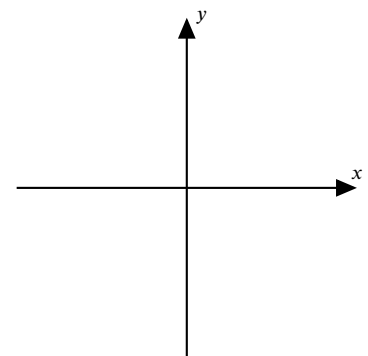
6.3.5 Signe d'une fonction polynomiale

La première étape est de factoriser le polynôme à l'aide des différentes méthodes que nous avons étudiées :

- mise en évidence,
- identités remarquables ;
- changement de variable ;
- méthode du groupement ;
- division polynomiale.

Ensuite, il faut faire un tableau des signes avec une ligne par facteur, puis remplir la ligne finale à l'aide de la règle des signes.

Exemple : Étudier le signe de la fonction $f(x) = -2x^6 + 20x^4 - 18x^2$ et faire une esquisse du graphe de la fonction.



ex. 6.33 à 6.34

6.3.6 Signe de $(g(x))^n$ **Exemples :**

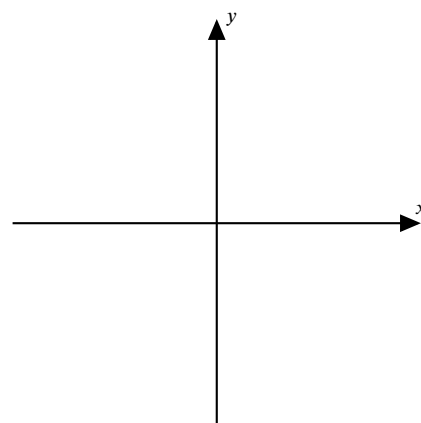
a) Étudier le signe de la fonction $f(x) = (x + 2)^4$.

b) Étudier le signe de la fonction $f(x) = (x + 2)^5$.

Observations :

- Lorsque n est pair, le signe de $(g(x))^n$ est :
- Lorsque n est impair, le signe de $(g(x))^n$ est :

Exemple : Étudier le signe de la fonction $f(x) = 5x^3(2 - x)^2(7x + 4)^5$ et faire une esquisse du graphe de la fonction.



Quels sont les zéros de la fonction qui occasionnent un changement de signe ?

Comment utiliser cela pour remplir le tableau de signe rapidement ?

ex. 6.35 à 6.36

7 Fonctions rationnelles

7.1 Généralités

On appelle **fraction rationnelle** une fraction dont le dénominateur et le numérateur sont des polynômes.

Exemples : $\frac{x-3}{x+2}$ $\frac{3}{x^2-4}$ $\frac{3x}{(x+1)^2}$

On appelle **fonction rationnelle** une fonction dont l'expression peut se ramener à une fraction rationnelle.

Exemples : $f(x) = \frac{x-2}{x+5}$ $g(x) = \frac{3}{x^2-4}$ $h(x) = \frac{3x}{(x-2)^2}$

a) Calculer l'image de 2 par chacune de ces trois fonctions.

b) Quelles sont les valeurs de x qui posent problème pour ces fonctions ? Les comparer avec l'expression de la fonction.

Rappel : On appelle **ensemble de définition** d'une fonction l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe. On le note D_f ou ED_f .

Pour une fonction rationnelle $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, les problèmes viennent des divisions par zéro. On a donc :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid d(x) = 0\}$$

Ainsi, les zéros de $d(x)$ sont les **valeurs interdites** de $f(x)$.

Exemples : Déterminer les ensembles de définition.

a) $f(x) = \frac{x^2-4}{3x^2-7x}$

b) $g(x) = \frac{8x+1}{x^3+4x^2-3x-12}$

ex. 7.1 à 7.3

7.2 Simplification

Rappel : Simplifier les fractions ci-dessous :

a) $\frac{130}{39}$

b) $\frac{68}{85}$

Pour simplifier une fraction, il faut donc commencer par factoriser le numérateur et le dénominateur.

Exemples : Simplifier les fractions ci-dessous :

a) $\frac{x^3 - 4x}{x^5 - 8x^2}$

b) $\frac{6 - x}{x^2 - 7x + 6}$

Observations : Compléter les tableaux de valeurs ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x) = \frac{x-3}{x+2}$							

Comparer les tableaux de valeurs ci-dessus. Que peut-on en déduire sur la simplification d'une fonction rationnelle ?

Mise en garde : L'ensemble de définition doit être déterminé avant de simplifier la fraction.

ex. 7.4 à 7.10

7.3 Opérations de base

Rappel : Effectuer les additions ci-dessous :

a) $\frac{18}{35} + \frac{11}{14}$

b) $4 + \frac{9}{11}$

Pour **additionner** des fractions :

- Factoriser le dénominateur.
- Déterminer un multiple commun des dénominateurs.
- Amplifier les deux fractions pour avoir le dénominateur choisi.
- Additionner les numérateurs obtenus.
- Vérifier si l'on peut simplifier la fraction finale.

On procède de manière similaire pour les **soustractions**.

Exemples : Effectuer les opérations ci-dessous :

a) $\frac{x-3}{x^2+3x+2} + \frac{6}{x^2+4x+4}$

b) $\frac{x-1}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9}$

c) $\frac{x+6}{x+1} + \frac{x}{x^2+x} - 2$

ex. 7.11 à 7.14

Rappel : Effectuer les multiplications ci-dessous :

$$a) \frac{7}{55} \cdot \frac{33}{39}$$

$$b) 21 \cdot \frac{31}{35}$$

Pour **multiplier** des fractions :

- Multiplier les numérateurs entre eux (sans effectuer les calculs).
- Multiplier les dénominateurs entre eux (sans effectuer les calculs).
- Factoriser les numérateurs et les dénominateurs pour simplifier.

Exemples : Effectuer les multiplications ci-dessous :

$$a) \frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{x^2-x-6}{x+5}$$

$$b) \frac{x^4-16}{x^2+2x} \cdot \frac{x^3}{x^2-4x+4}$$

ex. 7.16

Rappel : Effectuer les divisions ci-dessous :

$$a) \frac{22}{49} : \frac{33}{35}$$

$$b) \frac{77}{30} : \frac{14}{12}$$

Pour **diviser** des fractions :

- Transformer la division en une multiplication par l'inverse de la 2^{ème} fraction.
- Multiplier en simplifiant si possible.

Exemples : Effectuer les divisions ci-dessous :

$$a) \frac{x}{x+2} : \frac{x^2-2x}{x+5}$$

$$b) 35 : \frac{5x+15}{x-10}$$

Attention à l'ensemble de définition ! On ne peut pas diviser par 0, que la division soit notée par un $:$ ou par une barre de fraction !

ex. 7.17 à 7.19

7.4 Résolution d'équations rationnelles

On appelle **équation rationnelle** une équation qui peut se ramener à $\frac{N(x)}{D(x)} = 0$ où $N(x)$ et $D(x)$ sont deux polynômes réduits. Nous appellerons **forme canonique** cette forme de l'équation.

Exemple : Écrire l'équation ci-dessous sous forme canonique.

$$\frac{x+3}{x-2} = 3$$

Observations : Compléter le tableau de valeur de cette fonction :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$							

Quelles sont les solutions de l'équation $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = 0$?

Mise en garde : Une valeur interdite de l'équation de départ ne peut pas être une solution. Il faut donc chercher l'ensemble de définition avant de résoudre l'équation.

Pour **résoudre une équation rationnelle** :

- Trouver son ensemble de définition.
- La mettre sous forme canonique.
- Trouver les zéros du numérateur.
- Vérifier que ce ne sont pas des valeurs interdites.

Exemples : Résoudre :

a) $\frac{x+3}{x+2} = \frac{8x+10}{3x^2+6x}$

b) $\frac{x}{x+3} = \frac{-4x-9}{x^2+5x+6}$

ex. 7.20 à 7.21

Application :

Exemple : Un marchand achète des places de spectacle pour un montant de CHF 672.—. Il compte les revendre CHF 4.— de plus par place. Il retrouvera ainsi son investissement de départ, tout en gardant 3 places pour lui.

Combien en a-t-il acheté et à quel prix ?

ex. 7.22 à 7.24

7.5 Signe d’une fonction rationnelle

Exemple : Compléter ce tableau de valeurs, puis le tableau des signes correspondant.

x	-2	-1	0	1	2	3
$x + 1$		0	1	2	3	4
$2 - x$		3	2	1	0	-1
$\frac{x + 1}{2 - x}$						

x	
$x + 1$	
$2 - x$	
$\frac{x + 1}{2 - x}$	

Observations : On peut observer que le signe du quotient est déterminé par le signe du numérateur, celui de dénominateur et la règle des signes.

Le signe ne peut changer qu’aux zéros et aux valeurs interdites.

Les zéros du numérateur sont les zéros de la fonction.

Les zéros du dénominateur sont les valeurs interdites de la fonction.

Exemple : Donner l’ensemble de définition et étudier le signe de la fonction $f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 + 4x}$.

ex. 7.25

8 Inéquations

8.1 Inéquations du premier degré à une inconnue

Une **inéquation à une inconnue** est une inégalité entre deux expressions littérales comportant des nombres et une inconnue qui peut être juste ou fausse selon les valeurs attribuées à la variable.

Son écriture se compose de trois parties : le **membre de gauche** de l'inéquation, le **signe d'inégalité** ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$) et le **membre de droite** de l'inéquation.

Un nombre réel est une **solution** de l'inéquation si elle est vraie lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre.

Exemples : Parmi les valeurs -10 , -3 et 0 , lesquelles sont solutions des inéquations ci-dessous ?

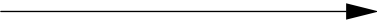
a) $5x > -15$

b) $x + 9 \geq -2x$

Le vocabulaire utilisé pour les inéquations est exactement le même que celui utilisé pour les équations. Les termes **résoudre** une inéquation, **ensemble de solutions** d'une inéquation et **équivalence** d'inéquations se définissent de manière identique à ce qui a été vu précédemment.

Généralement, une inéquation possède une infinité de solutions. L'ensemble des solutions sera donné par un **intervalle**. On peut le représenter sur la droite des nombres réels.

Exemples : Compléter le tableau ci-dessous :

Inéquation	Intervalle	Représentation graphique
$x \leq 7$		
$x < 7$		
$x \geq 7$		
$x > 7$		

8.1.1 Résolution par voie graphique

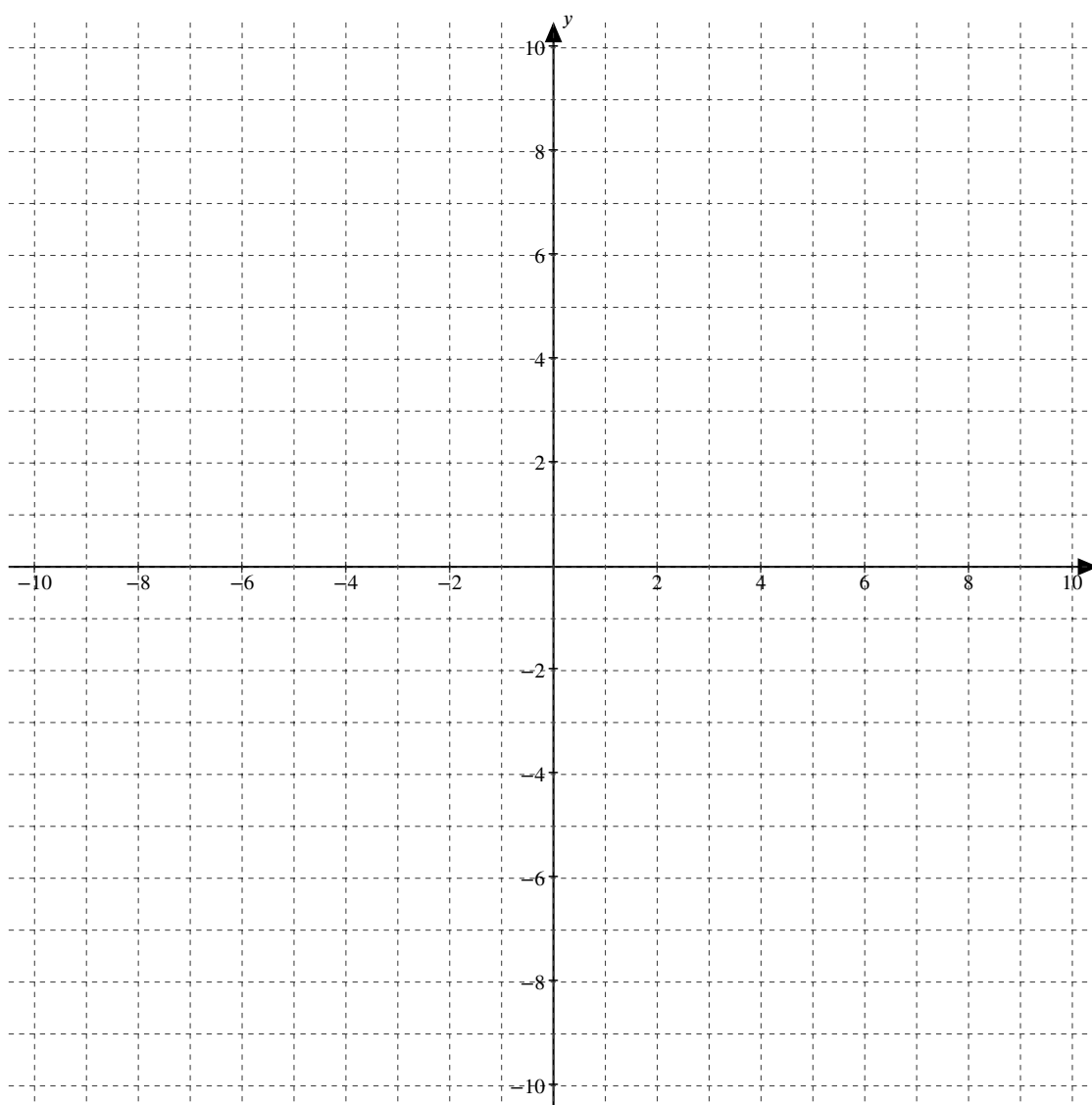
Appelons $f(x)$ le membre de gauche de l'inéquation et $g(x)$ le membre de droite.

La méthode par voie graphique consiste à tracer dans un même système d'axes les droites définies par $y = f(x)$ et $y = g(x)$. On observe ensuite pour quelles valeurs de x on obtient des images respectant l'inégalité voulue.

Exemples :

a) Résoudre l'inéquation $x + 2 > -2x - 1$ par voie graphique.

b) Résoudre l'inéquation $x + 2 \leq -2x - 1$ par voie graphique.



ex. 8.1 à 8.3

8.1.2 Résolution algébrique

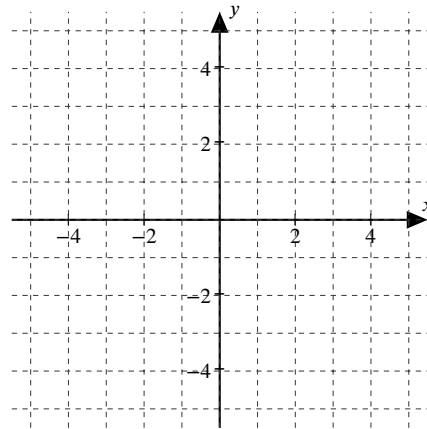
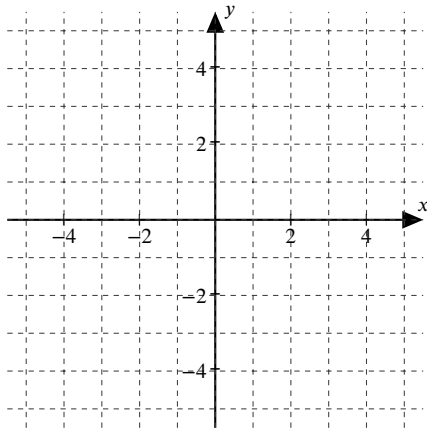
Résoudre ces inéquations par voie graphique et en déduire les implications ci-dessous.

a) $x + 3 > 1$

b) $x - 3 > 1$

c) $2x \leq x - 1$

d) $0 \leq 4 - x$

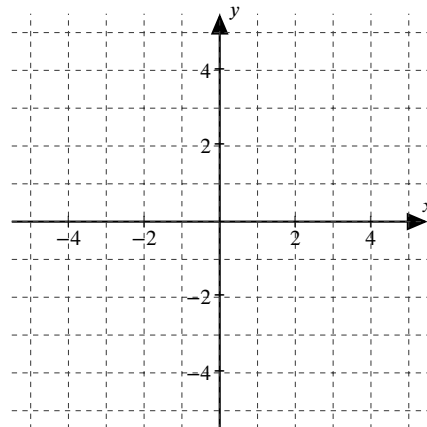
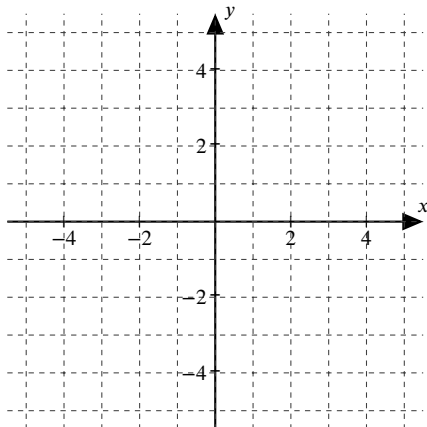


e) $3x > 3$

f) $-3x > 3$

g) $\frac{1}{4}x \geq 1$

h) $-\frac{1}{4}x \geq 1$



a) $x + 3 > 1 \quad \Rightarrow \quad x > \dots\dots$

e) $3x > 3 \quad \Rightarrow \quad x \dots\dots$

b) $x - 3 > 1 \quad \Rightarrow \quad x \dots\dots$

f) $-3x > 3 \quad \Rightarrow \quad x \dots\dots$

c) $2x \leq x - 1 \quad \Rightarrow \quad x \dots\dots$

g) $\frac{1}{4}x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x \dots\dots$

d) $0 \leq 4 - x \quad \Rightarrow \quad x \dots\dots$

h) $-\frac{1}{4}x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x \dots\dots$

A quoi faudra-t-il donc être attentif lors des résolutions algébriques d'inéquations ?

La méthode algébrique se base sur l'utilisation des quatre **principes d'équivalence** suivants :

- **1^{er} principe d'équivalence**

On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en réduisant les membres de l'inéquation par les règles du calcul littéral.

Exemple :

$$2(3x + 5) > 4x - 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 6x + 10 > 4x - 3$$

- **2^e principe d'équivalence**

On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en additionnant ou en soustrayant à chacun des membres de l'inéquation la même expression.

Exemples :

$$\begin{array}{lcl} 6x + 10 > 4x - 3 & \Longleftrightarrow & 2x > -13 \\ 6x + 10 > 4x - 3 & \Longleftrightarrow & 13 > -2x \end{array}$$

- **3^e principe d'équivalence**

On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en permutant le membre de gauche et le membre de droite, puis en changeant le sens de l'inégalité.

Exemple :

$$13 > -2x \quad \Longleftrightarrow \quad -2x < 13$$

- **4^e principe d'équivalence**

On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en multipliant ou en divisant chacun des membres de l'inéquation par un nombre strictement positif.

On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée **en multipliant ou en divisant** chacun des membres de l'inéquation **par un nombre strictement négatif**, puis **en changeant le sens de l'inégalité**.

Exemples :

$$\begin{array}{lcl} 2x > -13 & \Longleftrightarrow & x > -\frac{13}{2} \\ -2x < 13 & \Longleftrightarrow & x > -\frac{13}{2} \end{array}$$

Lorsqu'on veut résoudre algébriquement une inéquation du premier degré à une inconnue, il faut isoler l'inconnue dans l'un des membres de l'inéquation en utilisant les principes d'équivalence.

Après avoir déterminé l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$, il est bon de vérifier s'il est correct, en remplaçant la variable par une valeur de l'ensemble $\mathcal{S}$.

Exemples :

a) Résoudre l'inéquation $2(2x + 3) < 6(x - 2) + 10$

b) Résoudre l'inéquation $\frac{2x - 3}{4} + 6 \geq 2 + \frac{4x}{3}$

ex. 8.4 à 8.9

8.2 Cas particuliers

a) Résoudre l'inéquation $6x - 10 < 2(3x - 5)$.

b) Résoudre l'inéquation $6x - 10 \leq 2(3x - 5)$.

c) Résoudre l'inéquation $6x - 10 < 2(3x - 4)$.

d) Résoudre l'inéquation $6x - 10 > 2(3x - 4)$.

e) Résoudre l'inéquation $6x - 10 \geq 2(3x - 4)$.

ex. 8.10 à 8.11

8.3 Autres inéquations

Seules les inéquations du premier degré peuvent être résolues algébriquement. Pour les degrés supérieurs ou les fractions rationnelles, il faut les transformer en des inéquations canoniques équivalentes puis utiliser un tableau des signes.

Exemples : Résoudre.

a) $-3x^4 + 5x^3 \geq -10x^3 + 18x^2$

b) $\frac{5x + 10}{x^2 - 4} < -1$

ex. 8.12 à 8.20

8.4 Ensemble de définition d'une racine carrée

Pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{g(x)}$, il faut résoudre l'inéquation $g(x) \geq 0$, donc, dans la plupart des cas, il faut faire le tableau des signes de la fonction g .

Exemples : Déterminer l'ensemble de définition de $f(x)$.

a) $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 6}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$

Remarque : Il ne faut pas confondre le tableau des signes de $f(x)$ avec celui de $g(x)$.

Exemples : Faire le tableau des signes des deux fonctions ci-dessus.

ex. 8.21

9 Exercices

9.1 Ensemble et logique

Premières notions

Exercice 1.1 Définir par énumération les ensembles ci-dessous :

- a) les multiples de 4 inférieurs ou égaux à 40
- b) les diviseurs de 24
- c) les lettres qui forment le mot BANANE
- d) les solutions de l'équation $(x - 3)(x + 1) = 0$
- e) les puissances de 10 entre 0,05 et 5000

Exercice 1.2 Définir par extension les ensembles ci-dessous :

- a) les entiers naturels non nuls
- b) les mois de l'année
- c) les entiers inférieurs à 3
- d) les fractions égales à 3
- e) les carrés parfaits
- f) les nombres réels supérieurs à 3
- g) les puissances de 10 entre 0 et 2

Exercice 1.3 Définir les ensembles suivants par énumération ou extension :

- a) $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x \leq 10 \}$
 - b) $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{7} \in \mathbb{N} \}$
 - c) $C = \{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{x+1}{7} \in \mathbb{N} \}$
 - d) $D = \{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \text{ et } \frac{a}{b} = 0,3 \}$
 - e) $E = \{ x \in A \mid \frac{80}{x} \in \mathbb{N} \}$
 - f) $F = \{ x \in A \mid x > 6 \}$
 - g) $G = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x = 0,3 \}$
 - h) $H = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x + 1 \in \mathbb{Z} \}$
 - i) $I = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x + 1 \in \mathbb{N} \}$
 - j) $J = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 1 = 6 \}$
 - k) $K = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x(x + 8)(x - 9,5) = 0 \}$
- où A est l'ensemble défini plus haut

Exercice 1.4 Définir par une propriété caractéristique :

- a) les multiples de 30
- b) les entiers naturels non nuls
- c) les fractions entre 0 et 3
- d) les fractions égales à 3
- e) les nombres impairs
- f) les diviseurs de 30

Exercice 1.5 Définir par une propriété caractéristique :

- a) $\mathbb{R}^*$
- b) $\mathbb{R}_-$
- c) $\mathbb{R}_+^*$
- d) $A = \{ 1 ; 8 ; 27 ; 64 ; 125 ; \dots \}$
- e) $B = \{ 1 ; 8 ; 27 ; 64 ; 125 \}$

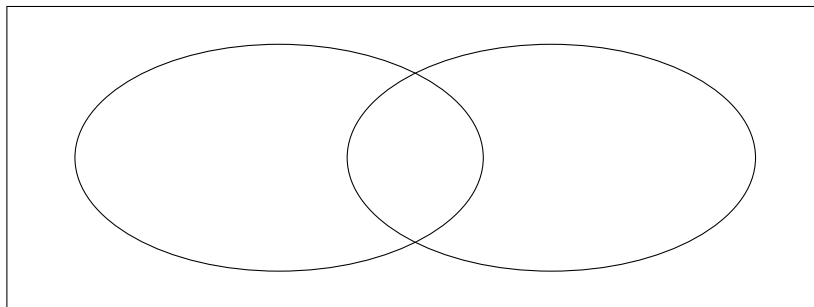
Exercice 1.6 Définir par énumération ou par extension, puis par une propriété caractéristique :

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| a) les multiples de 10 | d) les carrés parfaits |
| b) les diviseurs de 10 | e) les nombres pairs |
| c) les puissances de 10 | f) les nombres impairs |

Exercice 1.7 Compléter les diagrammes de Venn-Euler pour les ensembles suivants.

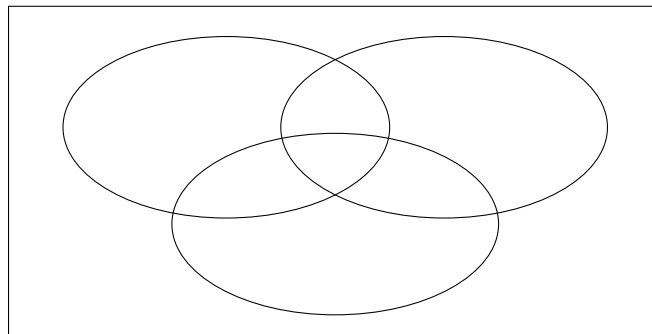
- a) $E = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq 30 \}$
 A : les diviseurs de 24

B : les diviseurs de 30

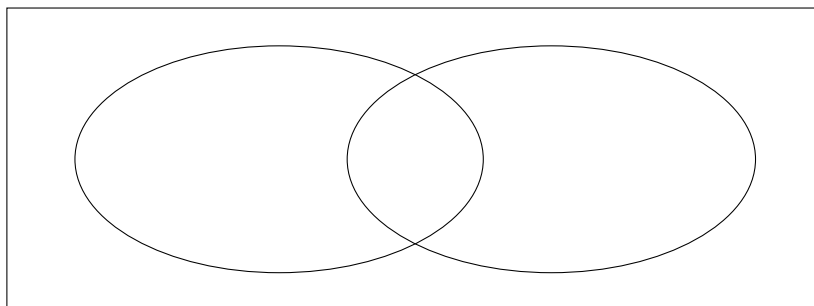


- b) $E = \{ a ; b ; c ; d ; e ; f \}$
 $B = \{ b ; c ; d \}$

$A = \{ a ; b ; c \}$
 $C = \{ a ; c ; e \}$



- c) E : les triangles
 A : les triangles qui ont au moins 2 angles isométriques
 B : les triangles qui ont un angle droit



Exercice 1.8 1) Représenter les ensembles ci-dessous par un diagramme de Venn-Euler sans plage vide, le référentiel étant les lettres de l'alphabet. Inscrire leurs éléments aux bons endroits.

A : ensemble des lettres du mot « maison »

B : ensemble des lettres du mot « ami »

C : ensemble des lettres du mot « moisi »

2) Déterminer si ces affirmations sont vraies pour les ensembles ci-dessus.

a) $A \subset B$

d) $C \subset B$

g) $a \in B$

b) $A \subset C$

e) $B \subset A$

h) $a \in C$

c) $C \subset A$

f) $B \subset C$

i) $a \notin B$

Exercice 1.9 Pour chaque ligne, représenter les ensembles par un diagramme de Venn-Euler sans plage vide. Inscrire leurs éléments aux bons endroits (3 par plage si il y en a une infinité) et écrire les inclusions.

a) $E = \mathbb{N}$ D_{40} : l'ensemble des diviseurs de 40 et D_{20} : l'ensemble des diviseurs de 20

b) $E = \mathbb{N}$ M_{40} : l'ensemble des multiples de 40 et M_{20} : l'ensemble des multiples de 20

c) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Exercice 1.10 Soit $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 6\}$

Tenir compte de toutes les informations ci-dessous pour énumérer E et ses sous-ensembles A , B et C et les représenter avec leurs éléments par un diagramme sans plage vide.

a) $C \subset A$

d) $2 \in A$

g) $3 \in B$

j) $4 \in A$

b) $C \subset B$

e) $2 \in B$

h) $3 \notin A$

k) $5 \notin A$

c) $1 \in C$

f) $2 \notin C$

i) $4 \notin B$

l) $5 \notin B$

Exercice 1.11 Soit $A = \{a; b; c\}$ et $B = \{a; b; c; d; e\}$

Les assertions suivantes sont-elles correctes? Si non, proposer une correction sans changer les lettres.

a) $a \subset A$

c) $A \in B$

e) $B \subset A$

b) $A \subset A$

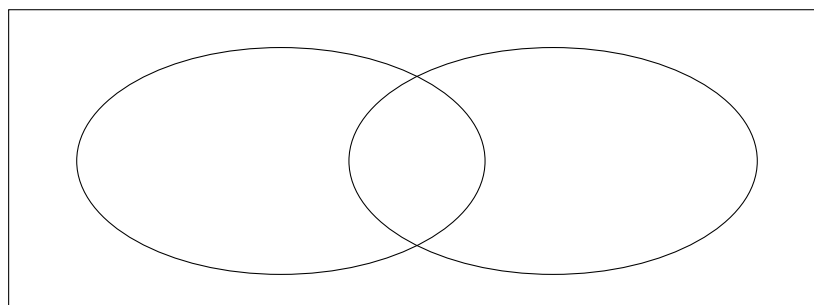
d) $d \in A$

f) $e \in B$

Exercice 1.12 Lors d'une votation en classe :

- 4 élèves ont refusé les 2 propositions
- 10 élèves ont accepté la proposition A
- 2 élèves ont accepté les 2 propositions
- 12 élèves ont accepté la proposition B

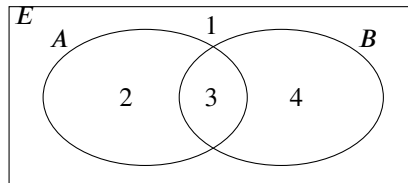
Compléter le diagramme de Venn-Euler en indiquant le nombre d'élèves dans chaque plage.



Opérations sur les ensembles

Exercice 1.13 Pour chaque ligne, représenter le référentiel et les sous-ensembles suivants par un diagramme de Venn-Euler sans plage vide. Inscrire leurs éléments aux bons endroits.

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------|---------------------------|
| a) $E = \{ 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 8 \}$ | $A = \{ 1 ; 4 ; 5 \}$ | $B = \{ 6 ; 8 \}$ |
| b) $E = \{ 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 10 \}$ | $A = \{ 1 ; 2 ; 6 ; 7 \}$ | $B = \{ 2 ; 3 ; 6 ; 8 \}$ |
| c) $E = \{ 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 10 \}$ | $A = \{ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 \}$ | $B = \{ 4 ; 8 \}$ |

Exercice 1.14

Énumérer les sous-ensembles suivants :

- | | | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| a) A | d) $\overline{B}$ | g) $A \cup B$ | j) $\overline{A \cup B}$ | m) $A \setminus B$ |
| b) B | e) $A \cap B$ | h) $B \cup A$ | k) $\overline{A \cap B}$ | n) $B \setminus A$ |
| c) $\overline{A}$ | f) $B \cap A$ | i) $\overline{A \cap B}$ | l) $\overline{A \cup B}$ | o) $A \setminus (A \cap B)$ |

Que peut-on observer ?

Exercice 1.15 Soit l'ensemble E et ses sous-ensembles A et B suivants :

E : les élèves de la classe

A : les élèves qui aiment les brocolis, B : les élèves qui aiment les carottes.

A) Associer les descriptions ci-dessous à une écriture du langage ensembliste.

- Les élèves qui aiment les brocolis et les carottes.
- Les élèves qui aiment les brocolis ou les carottes.
- Les élèves qui aiment les brocolis.
- Les élèves qui n'aiment que les brocolis.
- Les élèves qui n'aiment pas les brocolis.

B) Décrire les élèves des ensembles ci-dessous.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------|
| a) $A \cup B$ | c) $\overline{A \cap B}$ |
| b) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ | d) $\overline{A \cap B}$ |

Exercice 1.16 Donner deux éléments de chacun des ensembles suivants :

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ | b) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ | c) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|

Exercice 1.17 Soit $E = \{ a ; b ; c ; d ; e ; f \}$ et ses sous-ensembles $A = \{ a ; b ; c \}$ et $B = \{ b ; c ; d \}$.

Énumérer les sous-ensembles suivants :

- | | | |
|-------------------|--------------------------|--------------------|
| a) $\overline{A}$ | d) $A \cup B$ | g) $A \setminus B$ |
| b) $\overline{B}$ | e) $\overline{A \cap B}$ | h) $B \setminus A$ |
| c) $A \cap B$ | f) $\overline{A \cup B}$ | i) $\overline{E}$ |

Exercice 1.18 Soit l'ensemble E et ses sous-ensembles A , B et C suivants :

E : les élèves de la classe

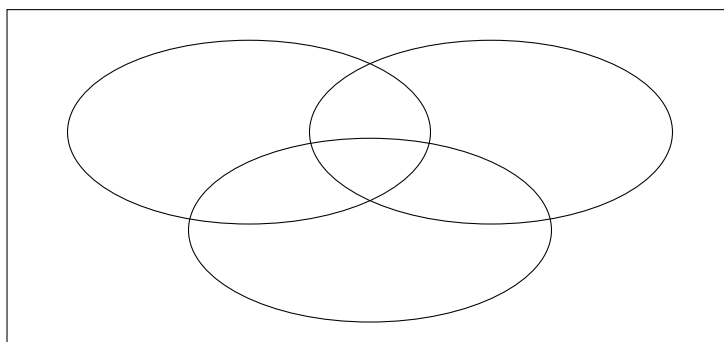
A : les élèves qui aiment les mathématiques,

B : les élèves qui aiment le français

C : les élèves qui aiment la gymnastique.

- | | |
|---|---|
| a) 7 élèves aiment les trois branches. | e) 16 élèves aiment les maths. |
| b) 1 élève n'aime aucune branche. | f) 1 élève n'aime que le français. |
| c) 9 élèves aiment les maths et la gym. | g) 20 élèves aiment les maths ou le français. |
| d) 11 élèves aiment les maths et le français. | h) 22 élèves aiment au moins une branche. |

Compléter le diagramme de Venn-Euler en indiquant le nombre d'élèves dans chaque plage.



Exercice 1.19 Soit l'ensemble E et ses sous-ensembles A et B .

Écrire de manière plus simple :

- | | | |
|-----------------------|---------------|-----------------------|
| a) $A \cap E$ | c) $A \cap A$ | e) $A \cup \emptyset$ |
| b) $A \cap \emptyset$ | d) $A \cup E$ | f) $A \cup A$ |

Exercice 1.20 Soit l'ensemble E et ses sous-ensembles A et B tels que $A \subset B$.

Écrire de manière plus simple :

- | | | |
|---------------|---------------|--------------------|
| a) $A \cap B$ | b) $A \cup B$ | c) $A \setminus B$ |
|---------------|---------------|--------------------|

Exercice 1.21 Dans une classe, on a recensé les élèves quant à leurs loisirs : musique, sport, ciné-club. On a obtenu les résultats suivants :

- 9 élèves font seulement du sport,
- 18 élèves font du sport,
- 20 élèves font de la musique ou vont au ciné-club, éventuellement les deux,
- 6 élèves font du sport et vont au ciné-club,
- 2 élèves participent aux trois activités,
- 7 élèves participent à deux activités exactement,
- 12 élèves ne font pas de sport,
- 19 élèves font soit de la musique, soit du sport, mais pas les deux.

Trouver l'effectif de la classe, ainsi que le nombre d'élèves qui font de la musique.

Exercice 1.22 Dans un collège, les cours de langues à option comprennent l'anglais, le latin et l'italien.

Parmi les 500 élèves de ce collège, 360 étudient au moins l'anglais, 230 au moins le latin et 125 au moins l'italien.

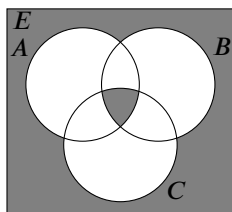
D'autre part, 160 élèves étudient au moins l'anglais et le latin, 85 au moins l'anglais et l'italien et 45 au moins le latin et l'italien

Enfin, 20 élèves apprennent les trois langues.

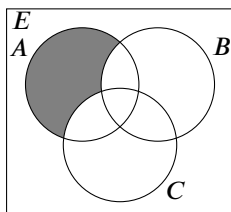
Déterminer le nombre d'élèves qui étudient uniquement le latin, qui étudient uniquement l'italien, qui n'étudient aucune de ces trois langues.

Exercice 1.23 Coder les régions grisées, le plus simplement possible, au moyen du langage ensembliste.

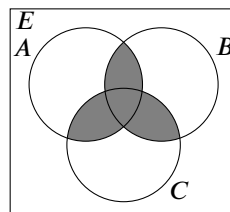
a)



b)



c)



Les intervalles

Exercice 1.24 Pour s'inscrire au concours « Miss Suisse », il faut mesurer au moins 1,68 mètres.

Écrire cette condition à l'aide de crochets et sous forme d'inéquation.

Exercice 1.25 Une entreprise fabrique un téléphone qui coûte CHF 600.—. Les revendeurs y ajoutent une marge, qui peut aller jusqu'à 10% de ce prix.

Écrire la fourchette du prix payé par le client à l'aide des crochets et sous forme d'inéquation.

Exercice 1.26 La température moyenne du mois passé a été de 20°C. Il y a eu au maximum 6,5°C de différence avec celle-ci.

Écrire la fourchette des températures à l'aide des crochets et sous forme d'inéquation.

Exercice 1.27 Compléter le tableau.

Inégalité	Axe	Inter- valle
$-4 \leq x < 1$		
		$]-\infty ; 3]$

Exercice 1.28 Écrire les ensembles suivants à l'aide de la notation des intervalles ou énumérer si c'est impossible.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 23\}$ | e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \leq x \leq \frac{23}{2}\right\}$ | h) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \text{ et } x \leq 1,5\}$ |
| b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -35 < x \leq -2\}$ | f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{5} < x \leq 2,4\right\}$ | i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ |
| c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x\}$ | g) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$ | j) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 2\}$ |
| d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4,5\}$ | | k) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < -2\}$ |

Exercice 1.29 Compléter le tableau.

Inégalité	Axe	Intervalle
$-4 < x \leq 1$ ou $x > 3$		
		$[1; 2[\cup]3; 4]$

Exercice 1.30 Soit les intervalles : $A = [-7 ; 3]$ $B =]0 ; +\infty[$
Représenter ces intervalles sur la droite numérique et les écrire sous forme d'intervalle :

- | | | |
|---------------|--------------------|-------------------|
| a) $A \cup B$ | c) $A \setminus B$ | e) $\overline{A}$ |
| b) $A \cap B$ | d) $B \setminus A$ | f) $\overline{B}$ |

Exercice 1.31 Soit les intervalles : $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$
Représenter ces intervalles sur la droite numérique et les écrire sous forme d'intervalle :

- | | | |
|---------------|--------------------|-------------------|
| a) $A \cup B$ | c) $A \setminus B$ | e) $\overline{A}$ |
| b) $A \cap B$ | d) $B \setminus A$ | f) $\overline{B}$ |

Exercice 1.32 Écrire les ensembles suivants à l'aide d'une propriété caractéristique.

- | | | |
|---------------------|---------------|-----------------------------------|
| a) $] -\infty ; 3]$ | b) $[-3 ; 3[$ | c) $\{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$ |
|---------------------|---------------|-----------------------------------|

Liens entre ensembles et logique

Exercice 1.33 Soit les ensembles suivants dans le référentiel $E = \mathbb{N}$:

A : Les nombres pairs B : Les nombres premiers C : Les multiples de 10

- a) Représenter ces ensembles par un diagramme de Venn **sans plage vide**.
(noter uniquement les 3 **plus petits éléments** dans les plages où il y en a une infinité.)
- b) Écrire l'inclusion que vous pouvez observer et l'implication qui lui est associée.

Exercice 1.34 Déterminer si les implications ci-dessous sont vraies ou fausses.

- a) être un carré $\implies$ être un rectangle
- b) être un parallélogramme $\implies$ être un carré
- c) x est un nombre premier $\implies x$ est un nombre impair
- d) x est divisible par 5 $\implies x$ est divisible par 10
- e) x est divisible par 10 $\implies x$ est divisible par 5

Exercice 1.35 Déterminer si les équivalences ci-dessous sont vraies ou fausses.

- a) être un triangle équilatéral $\iff$ être un triangle qui a 3 angles de 60°
- b) être un cerf-volant $\iff$ avoir au moins un axe de symétrie
- c) x est un diviseur de 40 $\iff x$ est un diviseur de 20
- d) x est un nombre entier positif $\iff x$ est un nombre naturel
- e) être un étudiant qui travaille régulièrement $\iff$ être un étudiant qui a de bonnes notes

Exercice 1.36 Formuler les contraposées des implications suivantes :

- a) être un dauphin $\implies$ être un mammifère
- b) x est un multiple de 20 $\implies x$ est un multiple de 10
- c) être un carré $\implies$ être un rectangle
- d) x est un nombre premier $\implies x$ a exactement deux diviseurs
- e) être un quadrilatère $\implies$ ne pas être un triangle
- f) x est divisible par 2 et par 3 $\implies$ être divisible par 6
- g) être un mot qui commence par a ou par b $\implies$ être au début du dictionnaire

Exercice 1.37 Formuler les proverbes suivants sous forme d'implications et écrire leurs contraposées :

- a) Qui vole un oeuf, vole un boeuf.
- b) La nuit, tous les chats sont gris.
- c) Pierre qui roule n'amasse pas mousse.
- d) Les têtes intelligentes se protègent.

Exercice 1.38 Considérons l'implication : avoir tiré un jeton bleu ou un jeton jaune $\Rightarrow$ avoir gagné.

- A) Écrire la réciproque de cette implication.
 B) Décrire un jeu dans lequel l'implication serait vraie, mais pas sa réciproque.
 C) Parmi les propositions ci-dessous, lesquelles expriment la contraposée de l'implication de départ ?
- a) avoir perdu $\Rightarrow$ ne pas avoir tiré un jeton bleu ou un jeton jaune
 - b) avoir perdu $\Rightarrow$ ne pas avoir tiré un jeton bleu et ne pas avoir tiré un jeton jaune
 - c) avoir perdu $\Rightarrow$ ne pas avoir tiré un jeton bleu ou ne pas avoir tiré un jeton jaune
 - d) avoir perdu $\Rightarrow$ ne pas avoir tiré un jeton bleu et jaune
 - e) avoir perdu $\Rightarrow$ ne pas avoir tiré un jeton bleu et un jeton jaune
 - f) avoir perdu $\Rightarrow$ n'avoir tiré ni un jeton bleu, ni un jeton jaune
 - g) avoir perdu si l'on n'a pas tiré un jeton bleu ou un jeton jaune

Les quantificateurs

Exercice 1.39 Traduire les affirmations ci-dessous et illustrer par un exemple numérique :

- a) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists ! y \in \mathbb{R}$ tel que $x \cdot y = 1$.
- b) x est pair $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$.

Exercice 1.40 Écrire à l'aide des quantificateurs :

- a) La droite d est parallèle à la droite e si et seulement si tous les points P appartenant à d n'appartiennent pas à e .
- b) Pour tous les nombres naturels a et b , si le plus grand diviseur commun de a et b vaut 1 alors le plus petit multiple commun de a et b est égal au produit de a et b .

Exercice 1.41 Écrire les mots « carré(s) » et « rectangle(s) » aux bons endroits (un de chaque par ligne), de manière à ce que ces propositions soient vraies :

- a) Les sont des
- b) Les peuvent être des
- c) $\forall ABCD$, $ABCD$ est un
- d) Tous les sont des
- e) $ABCD$ est un $\Rightarrow ABCD$ est un
- f) $\exists ABCD$ tel que $ABCD$ est un
- g) Les ne sont pas des

Démonstrations**Exercice 1.42** Vrai ou faux ? Réfuter lorsque c'est faux.

- | | |
|--|---|
| a) $\forall x \in \mathbb{N}, \frac{x}{4} \in \mathbb{N}.$ | d) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Q}$ tel que $xy = 1.$ |
| b) $\exists x \in \mathbb{N}, \frac{x}{4} \in \mathbb{N}.$ | e) $\forall x \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{Q}$ tel que $xy = 1.$ |
| c) $\exists ! x \in \mathbb{N}, \frac{x}{4} \in \mathbb{N}.$ | f) $\forall x \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $xy = 1.$ |

Exercice 1.43

- a) Réfuter cette proposition :
La somme d'un nombre positif et de son double est un multiple de 3.
- b) Traduire la proposition ci-dessous en « français ».
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = 2x$. Si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $x + y = 3k$ alors $x \in \mathbb{N}$.
- c) Identifier l'hypothèse et la conclusion de cette deuxième proposition.
- d) Prouver cette deuxième proposition.
- e) Écrire la contraposée de cette deuxième proposition.
- f) Écrire la réciproque de cette deuxième proposition.
- g) Prouver la réciproque de cette deuxième proposition.

Exercice 1.44 Identifier l'hypothèse et la conclusion, puis prouver ou réfuter :

- a) L'inverse d'un nombre entier est un nombre entier.
- b) L'inverse d'un nombre entier n'est jamais un nombre entier.
- c) Le quotient de deux nombres rationnels non nuls est un nombre rationnel.
- d) La différence de deux nombres impairs est paire.

Exercice 1.45 Illustrer chaque théorème ci-dessous par deux exemples, puis identifier l'hypothèse et la conclusion :

- a) La somme des angles d'un polygone à n côtés peut se calculer à l'aide de la formule $180 \cdot (n - 2)$.
- b) Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- c) Si le chiffre des unités d'un nombre entier est zéro, c'est un multiple de 10.
- d) Les multiples de 10 ont 0 pour chiffre des unités.

Exercice 1.46 Illustrer chaque proposition ci-dessous par deux exemples, puis écrire les démonstrations :

- a) Lorsqu'on double les dimensions d'un carré, son aire quadruple.
- b) Si l'aire d'un carré a quadruplé, alors ses dimensions ont doublé.
- c) Le produit de deux nombres entiers consécutifs est un nombre pair.
- d) La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

9.2 Introduction aux fonctions

Exercice 2.1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction qui double puis ajoute 5.

- Quelle est l'expression algébrique de cette fonction ?
- Quelle est l'image de 1 ?
- Quelle est la préimage de 1 ?

Exercice 2.2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction qui ajoute 5 puis double le résultat.

- Quelle est l'expression algébrique de cette fonction ?
- Quelle est l'image de 1 ?
- Quelle est la préimage de 1 ?

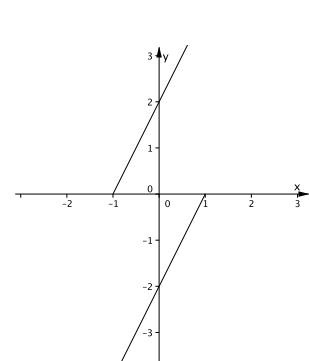
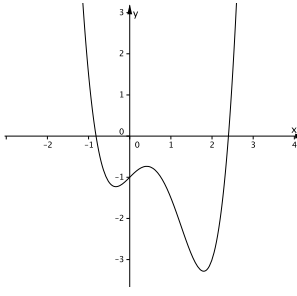
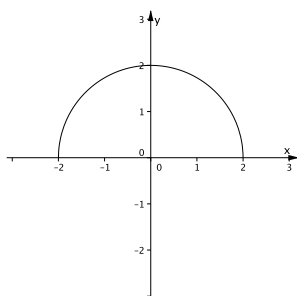
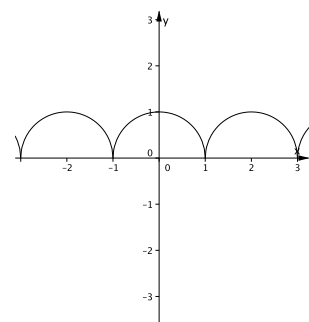
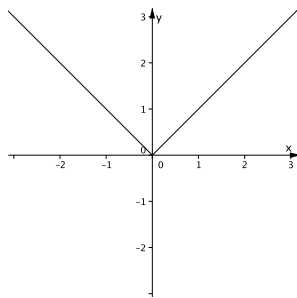
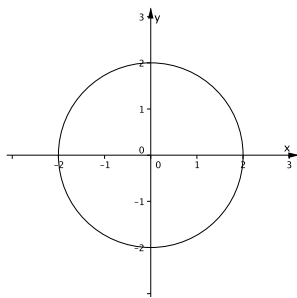
Exercice 2.3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction qui soustrait 7 puis met au carré.

- Quelle est l'expression algébrique de cette fonction ?
- Quelle est l'image de 1 ?
- Quelles sont les préimages de 1 ?

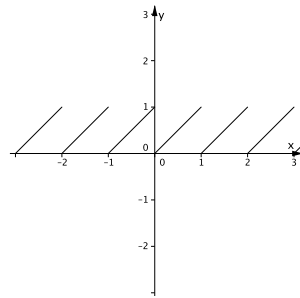
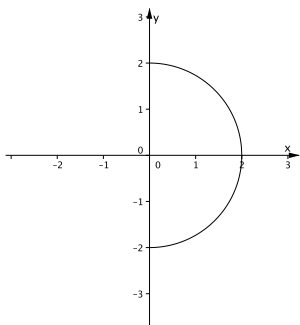
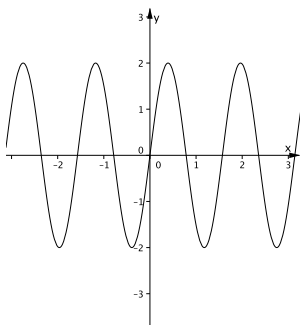
Exercice 2.4 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction qui met au carré puis soustrait 7.

- Quelle est l'expression algébrique de cette fonction ?
- Quelle est l'image de 1 ?
- Quelles sont les préimages de 1 ?

Exercice 2.5 Parmi les courbes ci-dessous, lesquelles peuvent représenter des fonctions ? Justifier



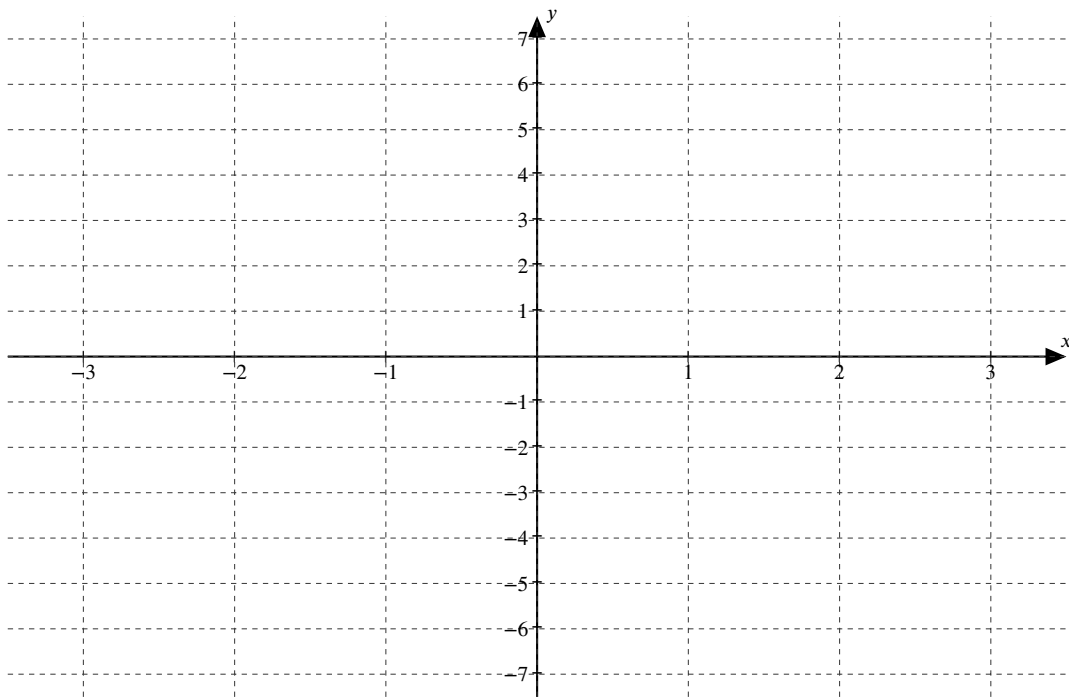
Exercice 2.6 Parmi les courbes ci-dessous, lesquelles peuvent représenter des fonctions ? Justifier.



Exercice 2.7 a) Remplir le tableau de valeurs pour les fonctions ci-dessous.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 3x - 5$							
$g(x) = -x$							
$h(x) = x^2 - 2x - 2$							
$p(x) = \frac{1}{2}x^3$							
$q(x) = 6$							

b) À partir du tableau de valeurs, tracer le graphe des fonctions.



Exercice 2.8 Soit $f(x) = x^3 + 27$ $g(x) = \frac{x-4}{x+5}$ $h(x) = \sqrt{x-4}$.

Pour chacune de ces fonctions, déterminer :

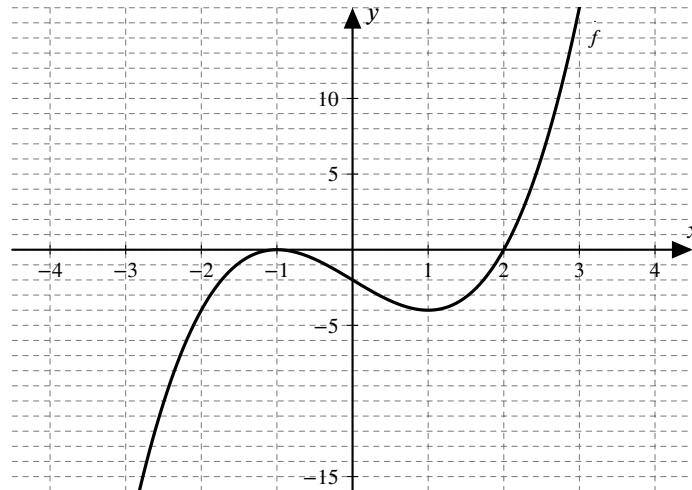
- l'ensemble de définition,
- les éventuels zéros,
- l'ordonnée à l'origine.

Exercice 2.9 Déterminer d'après le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	-3	0	0,5	2	7	10

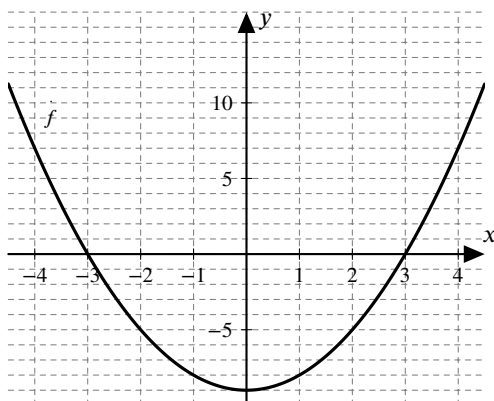
- l'ordonnée à l'origine de la fonction f ,
- le(s) zéro(s) de la fonction f ,
- le(s) préimage(s) de 2,
- l'image de -3.

Exercice 2.10 Déterminer d'après la représentation graphique ci-dessous :



- les préimages de -4,
- le(s) zéro(s) de la fonction f ,
- l'image de 3,
- l'ordonnée à l'origine de la fonction f .

Exercice 2.11 Déterminer d'après ce qui est visible sur ce graphique :



- l'ensemble de définition,
- l'ordonnée à l'origine,
- les zéros,
- les préimages de -8,
- l'image de 2,
- $\text{Im}(f)$.

Exercice 2.12 Retrouver le graphe de chacune des fonctions d'après sa description.

a) f est négative entre -2 et 1 ,
elle est toujours positive ailleurs

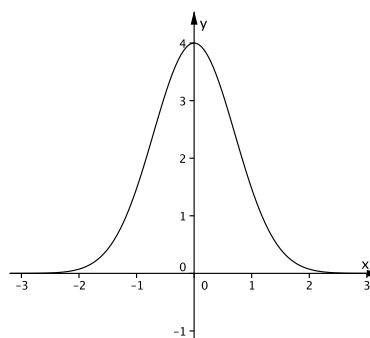
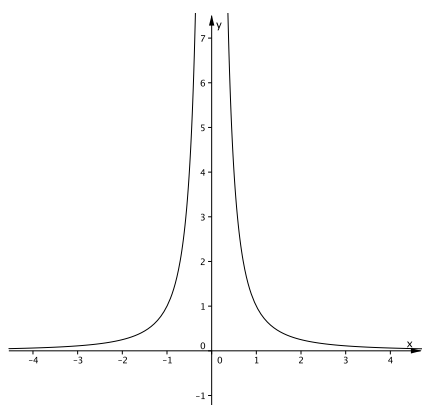
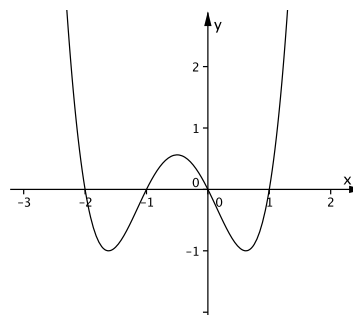
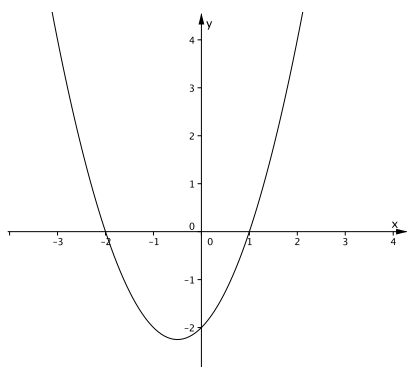
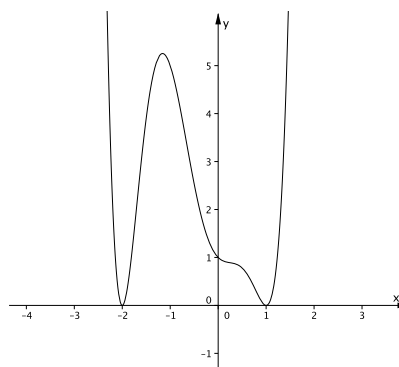
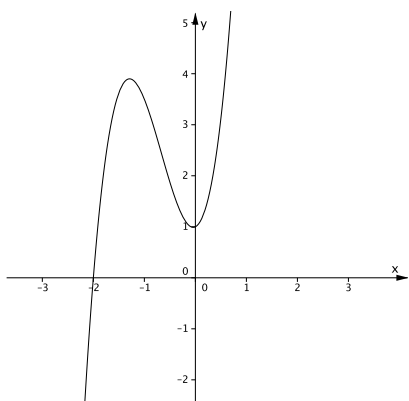
b) g est positive et n'est pas définie en 0

c) l'image de 0 par h est 1 et sa préimage -2

d) l'ordonnée à l'origine de la fonction p est 4

e) $q(0) = 1$, $q(-2) = 0$ et q est toujours positive

f) -2 et 1 sont des zéros de la fonction r
et $r\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$



Exercice 2.13 Associer les affirmations suivantes à tous les graphes ci-dessous qui conviennent.

A. La fonction n'est pas définie en $x = 1$.

E. La fonction ne s'annule pas.

B. La fonction est négative sur $] -1 ; 0[$.

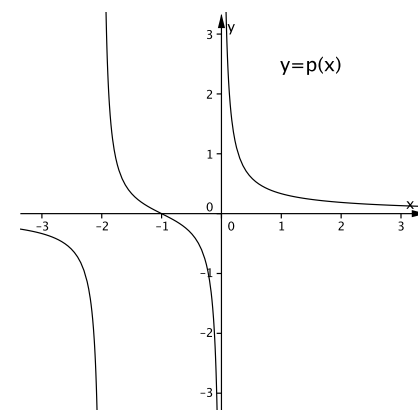
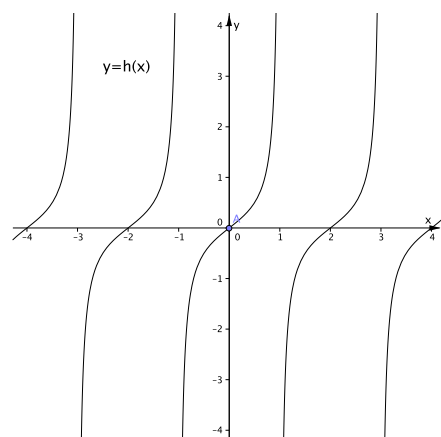
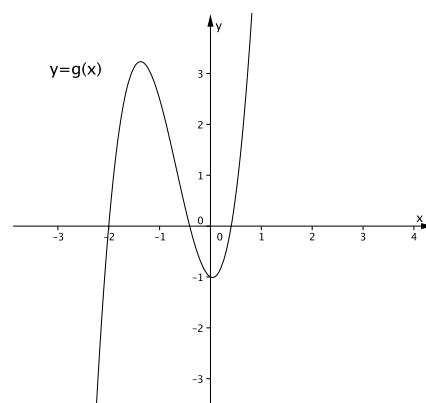
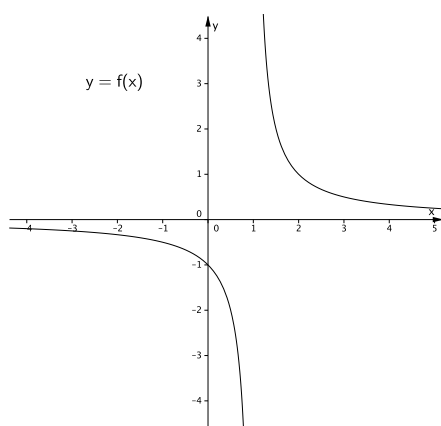
F. La fonction est positive sur $]1 ; +\infty[$.

C. Les zéros de la fonction sont tous négatifs.

G. La fonction est positive en $x = -\frac{3}{2}$.

D. La fonction s'annule en $x = -1$.

H. La fonction n'a pas de zéro positif.



9.3 Degrés 0 et 1

Fonctions affines

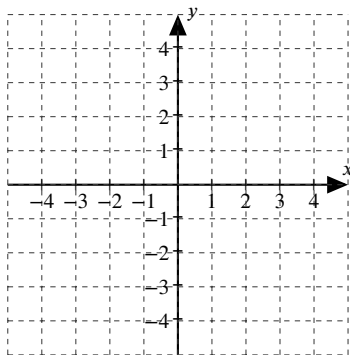
Exercice 3.1 Soit la fonction f définie par $f(x) = 5x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 3$. Quels sont les coefficients de degré :

- | | | |
|------|------|------|
| a) 5 | c) 3 | e) 1 |
| b) 4 | d) 2 | f) 0 |

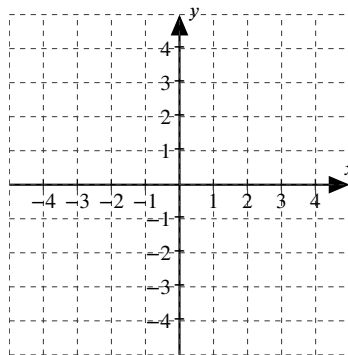
Quel est le degré de cette fonction ?

Exercice 3.2 A) Représenter le graphe des fonctions ci-dessous.

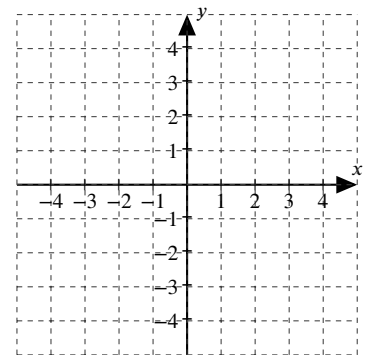
a) $f(x) = 2x - 1$



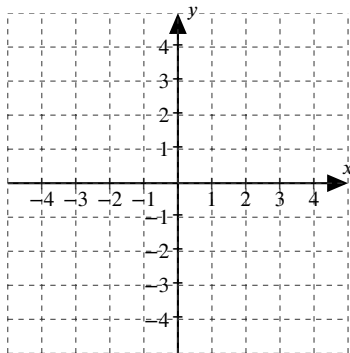
c) $h(x) = \frac{3}{2}x - 3$



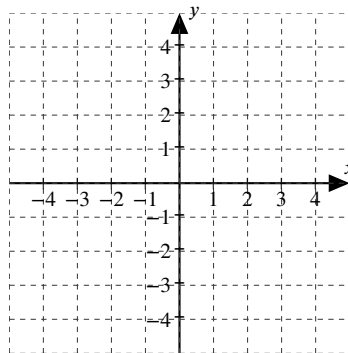
e) $j(x) = 2 - x$



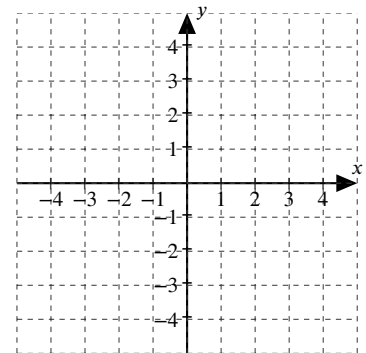
b) $g(x) = x - 2$



d) $i(x) = -2$



f) $k(x) = -2x$



B) Quels sont les zéros de ces fonctions ?

C) Quelles sont les ordonnées à l'origine de ces fonctions ?

D) Quelles sont les pentes de ces droites ?

Exercice 3.3 Soit la fonction affine définie par $f(x) = 2x + 3$. Calculer

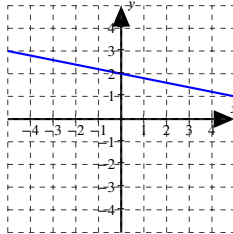
- | | | |
|-----------|---------------------------------|------------|
| a) $f(2)$ | c) $f(-1)$ | e) $f(u)$ |
| b) $f(0)$ | d) $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ | f) $f(2t)$ |

Exercice 3.4

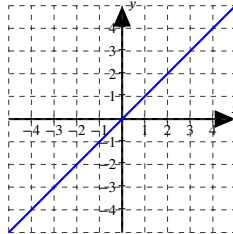
A) Quelles sont les pentes des droites représentées ci-dessous ?

B) Quelles sont les ordonnées à l'origine des droites représentées ci-dessous ?

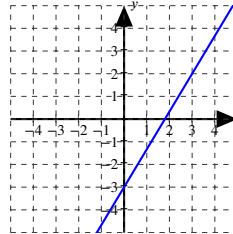
a)



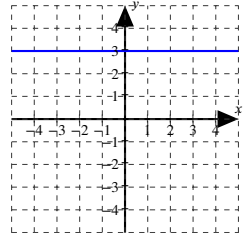
b)



c)



d)



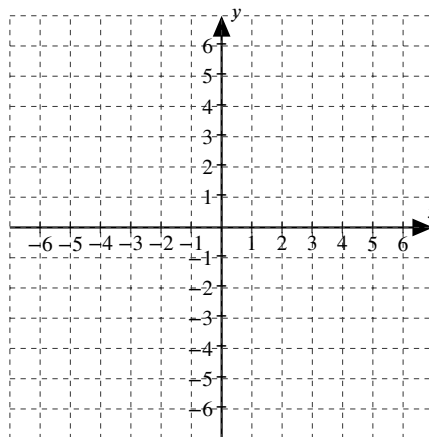
Exercice 3.5 Représenter les graphes des fonctions affines f , g , h et j telles que :

a) $f(-1) = 2$ et la pente du graphe de f vaut 2.

c) $h(2) = 0$ et la pente du graphe de h vaut $-\frac{3}{5}$.

b) $g(0) = -1$ et la pente du graphe de g vaut $\frac{3}{2}$.

d) $j(4) = 5$ et la pente du graphe de j vaut 0.



Exercice 3.6 Utiliser la pente et l'ordonnée à l'origine pour représenter graphiquement ces fonctions.

a) $f(x) = -x + 2$

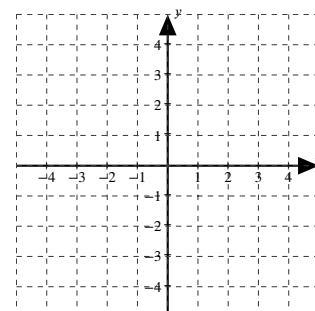
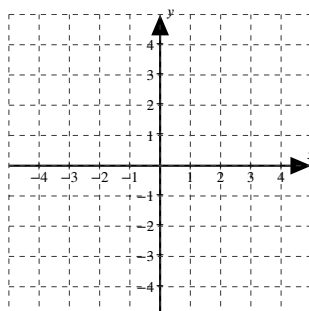
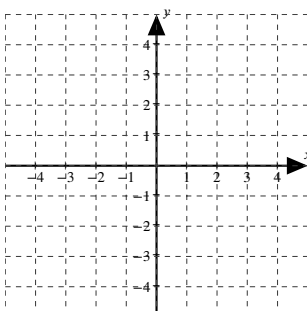
c) $f(x) = -3x + 2$

e) $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$

b) $f(x) = 3x - 1$

d) $f(x) = -\frac{3}{4}x + 3$

f) $f(x) = -\frac{5}{6}x + 4$



Exercice 3.7 Déterminer une expression algébrique de la fonction affine f :

- a) dont le graphe a une pente de $\frac{2}{3}$ et une ordonnée à l'origine de 1.
- b) dont le graphe passe par le point $(5; -3)$ et a une pente de -2 .
- c) dont le graphe passe par les points $(2; 1)$ et $(4; 6)$.
- d) telle que $f(1) = 4$ et $f(2) = 0$.

Exercice 3.8 Déterminer l'équation de la droite :

- a) qui passe par les points de coordonnées $(1; 4)$ et $(2; 11)$.
- b) de pente $-\frac{5}{4}$ et qui passe par le point de coordonnées $(1; -1)$.
- c) horizontale qui passe par le point de coordonnées $(6; 2)$.
- d) verticale qui passe par le point de coordonnées $(3; -1)$.
- e) parallèle à la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ qui passe par l'origine.

Exercice 3.9

- a) Déterminer la pente de la droite qui passe par les points de coordonnées $(-1; 2)$ et $(3; \frac{1}{2})$.
- b) Déterminer l'équation de la droite parallèle à la droite d'équation $y = 5x + 2$ qui passe par le point de coordonnée $(1; 3)$.
- c) Déterminer l'équation de la droite de pente -3 qui passe par l'origine.
- d) La droite qui passe par les points de coordonnées $(2; 2)$ et $(4; 3)$ est-elle parallèle à celle qui passe par les points de coordonnées $(1; -1)$ et $(5; 1)$?
- e) Le point de coordonnée $(3; 3)$ est-il sur la droite qui passe par les points de coordonnées $(1; 2)$ et $(-3; 4)$?

Équations du premier degré**Exercice 3.10** Résoudre les équations suivantes :

a) $5x = 20$

b) $-3u = 12$

c) $x + 4 = 6$

d) $3x + 60 = 14x + 5$

e) $12 - 5x = 4 + x + 8$

f) $7x = 3x + 4$

Exercice 3.11 Résoudre les équations suivantes :

a) $\frac{5}{13}x = 2$

b) $\frac{x}{5} + 9 = 11$

c) $\frac{2x}{3} - 2 = \frac{x}{15} - \frac{3}{5}$

d) $\frac{3}{5}(x + 2) = 6$

e) $\frac{1}{11}x + 6 = 4(x - 20)$

f) $\frac{5}{13}x = \frac{13}{5}$

g) $3x - \frac{1}{2}(4 - x) = x - \frac{1}{3}$

h) $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{5} + 6\right) = 25 - \frac{3x}{2}$

i) $36 - \frac{4x}{9} = 8$

Exercice 3.12 Résoudre les équations suivantes :

a) $4(2x - 1) = 7x + 8$

b) $(9x - 1) - (5x - 7) = x$

c) $(3x - 1) + (9 - 3x) = 8$

d) $3x + 3(3 - x) = 8x + 1$

e) $5(x + 2) - 2(5x + 1) = 8$

f) $(-3)(x + 1) = -3x + 1$

Exercice 3.13 Résoudre les équations suivantes :

a) $\frac{1}{4}x + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}x - \frac{3}{4}$

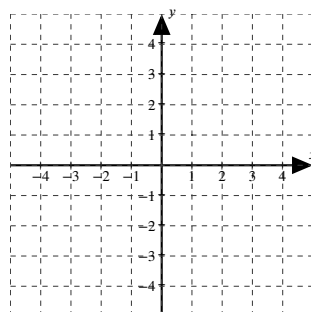
c) $2x + 5 = \frac{1}{2}(7 - 4x)$

e) $\frac{t - 5}{3} = \frac{2 - t}{2}$

b) $3x + 8 = 2(x + 4)$

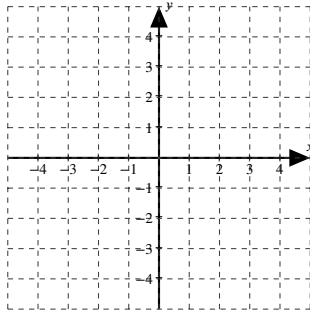
d) $\frac{1}{2}(8 + 2x) = x + 4$

f) $3x - \frac{4 - x}{2} = x - \frac{1}{3}$

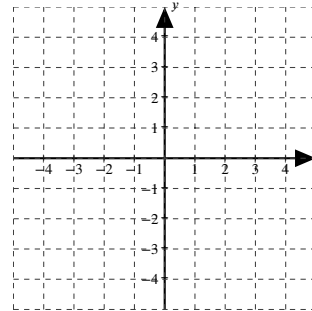
Liens entre fonctions et équations**Exercice 3.14** Soit $f(x) = 4x - 5$. Déterminer par calcul ou algébriquement :a) le zéro de f c) la préimage de 3 par f b) son ordonnée à l'origine f d) l'image de $\frac{21}{2}$ par f **Exercice 3.15** Soit $f(x) = \frac{2}{7}x + 5$. Déterminer par calcul ou algébriquement :a) le zéro de f c) la préimage de 3 par f b) son ordonnée à l'origine f d) l'image de $\frac{21}{2}$ par f **Exercice 3.16** Résoudre graphiquement, puis algébriquement l'équation $-\frac{1}{3}x + 2 = 1$.

Exercice 3.17 Dans chaque cas, déterminer graphiquement, puis algébriquement le point d'intersection I des graphes des fonctions f et g .

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ $g(x) = -x + 6$

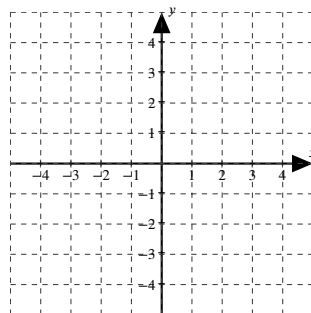


b) $f(x) = -2x + 2$ $g(x) = \frac{4}{3}x - 3$



Exercice 3.18 Quelles sont les coordonnées exactes du point d'intersection des droites d'équations $y = 4x - 20$ et $y = \frac{1}{2}x$?

Exercice 3.19 Résoudre graphiquement, puis algébriquement l'équation $\frac{1}{3}x + 2 = -\frac{4}{3}x$.



Applications

Exercice 3.20 Le réservoir d'essence d'une voiture est rempli au maximum. La voiture s'engage sur une longue route à vitesse constante. La quantité d'essence utilisée est proportionnelle au nombre de kilomètres parcourus.

Après 200 km de route, il reste 40 litres d'essence. Après 450 km parcourus, il ne reste plus que 15 litres.

- Exprimer sous forme d'une fonction affine le nombre de litres d'essence restant dans le réservoir en fonction du nombre de kilomètres parcourus.
- Calculer la capacité totale du réservoir ainsi que la consommation moyenne de la voiture (nb de litres pour 100 km).

Exercice 3.21 Une ville a installé de nouvelles usines pour alimenter ses citoyens en eau potable. Pour en payer les coûts, elle met en place une taxe composée d'une redevance fixe et d'un montant proportionnel à la consommation d'eau.

Un voisin de Jean a reçu son décompte annuel. Pour une consommation de 600 hectolitres, il doit payer 88 Frs. Un autre voisin doit payer 100 Frs. pour une consommation de 750 hectolitres d'eau.

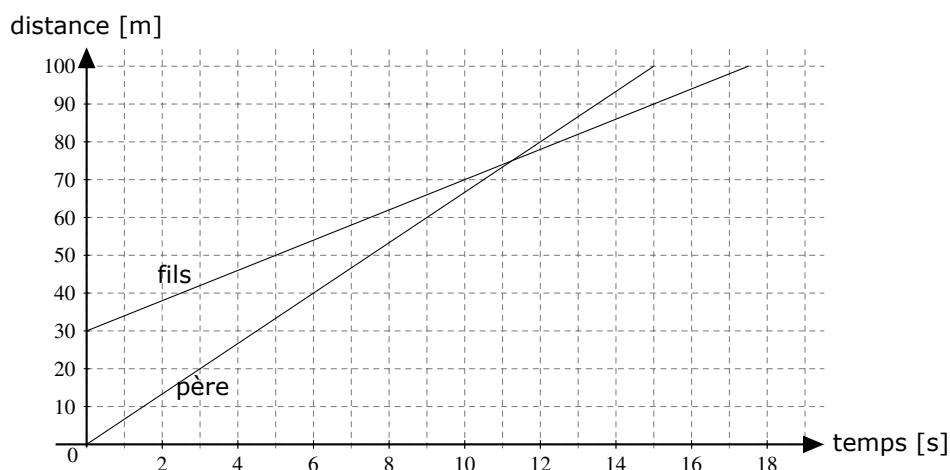
- Jean sait qu'il a consommé 820 hectolitres d'eau cette année. Combien devra-t-il payer ?
- Calculer le montant de la redevance fixe ainsi que la taxe variable pour 1000 litres d'eau.

Exercice 3.22 Un producteur de légumes sait qu'il peut vendre toute sa production de navets en les vendant à 40 cts la pièce. Il estime que ses coûts de production fixes sont de 100 Frs par jour et qu'il lui coûte 20 cts pour produire chaque navet.

Un vendeur de machines agricoles propose au producteur l'achat d'une machine qui lui permettra de faire descendre son coût de production à 10 cts par navet. Par contre, ses frais fixes augmenteront à 180 Frs. par jour.

- Illustrer graphiquement le problème.
- Combien de navets doit-il produire par jour pour être rentable sans la nouvelle machine ?
- Est-il intéressant de produire les navets avec la nouvelle machine ?

Exercice 3.23 Un père défie son fils au 100 mètres, en lui laissant un peu d'avance. Les graphes indiquant la distance parcourue (en mètres) par les deux personnes en fonction du temps (en secondes) sont donnés ci-dessous.



- Quelles sont les expressions algébriques des fonctions qui donnent la distance à partir du temps ?
- Répondre graphiquement aux questions ci-dessous, puis confirmer l'exactitude des réponses algébriquement.
 - Combien de mètres d'avance le père a-t-il laissés à son fils ?
 - Qui a gagné ? Avec combien de secondes d'avance ?
 - Quelle distance les sépare lorsque le vainqueur franchit la ligne d'arrivée ?
 - Quelles sont les vitesses des deux coureurs ?
 - Le père et le fils ont-ils été côte à côte ? Si oui, à quelle distance de la ligne de départ ?
- Mêmes questions si l'expression algébrique de la fonction correspondant au trajet du père est $f(x) = 6x$ et celle du fils $g(x) = 3x + 40$.

Exercice 3.24 Un écrivain veut publier son nouveau roman. L'imprimeur lui fait l'offre suivante : l'impression du prototype coûtera 2'500.– Frs, puis chaque tirage coûtera 4.– Frs la pièce.

Quel prix de vente faut-il fixer si l'écrivain veut rentrer dans ses frais avec un premier tirage de 500 exemplaires ?

Un deuxième imprimeur peut produire le prototype pour 4'500.– Frs, puis chaque tirage pour 3.– Frs la pièce.

Déterminer quel est l'imprimeur le plus avantageux en fonction du nombre d'exemplaires imprimés.

Exercice 3.25 Votre permis de conduire en poche, vous hésitez entre l'achat d'une voiture et le carsharing. Une voiture coûte en frais fixes 6'850.– Frs par année (comprenant amortissement, assurances, taxes, parc...). Il faut y ajouter des frais variables de 30 cts. par kilomètres. Pour le carsharing, il faut acheter un abonnement annuel de 300.– Frs puis l'utilisation d'une voiture coûte 70 cts. le kilomètre.

- a) Pour chacune des options, calculer les expressions algébriques des fonctions affines exprimant le coût annuel en fonction du nombre de kilomètres parcourus.
- b) Si vous roulez 6000 km en une année, que vous coûte chacune des options ?
- c) A partir de combien de kilomètres annuels est-il plus avantageux d'acheter sa propre voiture ?

9.4 Degré 2

Factorisation

Exercice 4.1 Effectuer et réduire les expressions suivantes :

a) $(x^2 + x + 1) + (3x^2 - 8x + 7)$

d) $-(8x^2 - 3 + x) + \left(\frac{2}{11}x - 8x^2 + 3\right)$

b) $(x^2 + x^3 - x) - (2x + 2x^3)$

e) $18x - [7x - (8x - y)]$

c) $5x - (-3x^2 + 12) + 7x$

f) $(6x - \frac{1}{3}y) + \left(4x + \frac{2}{7}y - 3z\right) - \left(-3z + 10x - \frac{1}{21}y\right)$

Exercice 4.2 Effectuer et réduire les expressions suivantes :

a) $4(x + 1)$

d) $(4x - 3)(x - 5)$

g) $3a^2 - (a + 2)(a - 1)$

b) $(-x + 8)(-10)$

e) $10(-x + 2)(x - 7)$

h) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

c) $(x^3 + 5)(x^3 - 7)$

f) $(2u + 3)(u - 4) - (4u^2 + 4u)$

i) $(2z^5 + 1)^2$

Exercice 4.3 Effectuer et réduire les expressions suivantes :

a) $(x + 1)x + 5(3x^2 - 8x + 7)$

b) $4(x^3 - x) - 3x^3(2x + 7)$

c) $3x^2 - 3x^2(5x^4 + 1)$

Exercice 4.4 Soit $P(x)$ et $Q(x)$ des polynômes. Calculer $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$ et $P(x) \cdot Q(x)$ pour les valeurs suivantes :

a) $P(x) = 2x + 4$, $Q(x) = x - 1$

b) $P(x) = 2x^2 - 7$, $Q(x) = x + 2$

Exercice 4.5 A) Effectuer et réduire :

a) $3(x^2 - 3x + 1)$

b) $5x(x + 2)$

c) $-3x^2(2x^3 - 3x^2 - x - 2)$

d) $a(x^2 - 4x + 1)$

B) Mettre en évidence autant que possible :

e) $56x^4 - 24x^3 + 80x^2$

h) $48x^3 + 8x^2$

k) $2a^{10} - 8a^4$

f) $3x^2 + 8x$

i) $-xy + y$

l) $\frac{1}{3}xy^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{5}{3}x$

g) $36x^2 - 27x$

j) $y^5 - y^2$

m) $2x^6 + 4x^4 + 6x^2$

Exercice 4.6 Mettre un nombre en évidence, afin d'obtenir un polynôme unitaire dans la parenthèse.

a) $2x^2 - 6x + 10$

c) $3x^2 - 24x + 6$

e) $-10x^2 - 5x + 20$

g) $\frac{1}{12}x^2 - \frac{11}{4}x - 5$

b) $-x^2 - 2x + 5$

d) $3x^2 + 21x + 20$

f) $\frac{x^2}{2} - x + 2$

h) $-3x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

Exercice 4.7 A) Effectuer et réduire à l'aide des identités remarquables :

a) $(x+2)^2$ b) $(2x-3)^2$ c) $(a+b)^2$ d) $(3a-b^2)^2$

B) Factoriser :

e) $x^2 + 10x + 25$ g) $x^2 - 20x + 100$ i) $x^2 + 28xy + 196y^2$ k) $x^2 - x + 16$
 f) $100x^2 - 20x + 1$ h) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ j) $25x^2 + 20x + 4$ l) $9x^2 - 2x + \frac{1}{9}$

Exercice 4.8 A) Effectuer et réduire à l'aide des identités remarquables :

a) $(x+2)(x-2)$ b) $(3x-y^3)(3x+y^3)$ c) $(x+3)(3-x)$ d) $(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$

B) Factoriser :

e) $x^2 - 25$ g) $x^2 - 7$ i) $4x^2 - 225y^2$ k) $x^2y^2 - 36$
 f) $100x^2 - 169$ h) $x^2 - \frac{9}{49}$ j) $x^2 + 4$ l) $6x^2 - 1$

Exercice 4.9 Effectuer et réduire à l'aide des identités remarquables :

a) $(x+4)^2$ d) $(3x-4)^2$ g) $(xy+z^3)^2$
 b) $(x-11)^2$ e) $(3y-x)(3y+x)$ h) $(8-x)(x+8)$
 c) $(x-6)(x-6)$ f) $(1-x^7)^2$ i) $(8x-5)^2$

Exercice 4.10 Factoriser à l'aide des identités remarquables :

a) $x^2 - 9$ c) $6x^2 - 6$ e) $8x^2 - 112x + 392$
 b) $x^2 + 2x + 1$ d) $4x^2 - 36x + 81$ f) $8x(2x+3) + 9$

Exercice 4.11 Factoriser à l'aide de la mise en évidence et des identités remarquables :

a) $5x^2 - 10x + 5$ d) $-8y^2 - 8y - 2$ g) $20x^2 - 45$ j) $1 - 2x^2 + x^4$
 b) $-3x^2 + 18x - 27$ e) $5x^2 - 5$ h) $(x+1)^2 - 4$ k) $1 + x^6 - 2x^3$
 c) $-a^2 + 2ab - b^2$ f) $x^3 - 4x$ i) $1 + 2x^2 + x^4$ l) $x^3 - 9x$

Exercice 4.12 Effectuer, réduire et observer :

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| a) $(x+2)(x+3)$ | c) $(x+2)(x-3)$ | e) $(x-6)(x-1)$ | g) $(x+11)(x-10)$ |
| b) $(x-2)(x+3)$ | d) $(x-2)(x-3)$ | f) $(x+6)(x-1)$ | h) $(x+a)(x+b)$ |

Exercice 4.13 Effectuer à l'aide de la décomposition du trinôme unitaire (« somme-produit ») :

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) $(x+3)(x-5)$ | d) $(x-4)(x-5)$ | g) $(x-1)(x-5)$ |
| b) $(x+5)(x-2)$ | e) $(x-3)(x+4)$ | h) $(x+1)(x+5)$ |
| c) $(x-3)(x+2)$ | f) $(x-1)(x+5)$ | i) $(x+1)(x-5)$ |

Exercice 4.14 Factoriser les expressions suivantes à l'aide de la décomposition du trinôme unitaire :

- | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| a) $x^2 - 6x + 8$ | e) $x^2 - 5x + 6$ | i) $x^2 - 10x - 24$ |
| b) $-x + x^2 - 12$ | f) $y^2 + 7y + 12$ | j) $z^2 + z - 90$ |
| c) $6 - 7y + y^2$ | g) $x^2 - x - 132$ | k) $z^2 - z - 90$ |
| d) $x^2 + 12 - 8x$ | h) $x^2 + 10x + 24$ | l) $z^2 - 43z - 90$ |

Exercice 4.15 Factoriser :

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
| a) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ | f) $9x^2 + 1'200x + 40'000$ | k) $2 - 8x + 8x^2$ |
| b) $12a^2 + 36a + 27$ | g) $x^3 + 16x - 8x^2$ | l) $48a - 16a^2 - 36$ |
| c) $-x^2 + 6x + 16$ | h) $2x^2 + 34x + 32$ | m) $90x^2 + 60x + 10$ |
| d) $8t^2 - 50$ | i) $15x^2 - 1500$ | n) $-x^2 + 13x - 36$ |
| e) $x^2 - 6x + 8$ | j) $9x^3 - x$ | o) $\frac{1}{10}x^2 - \frac{72}{5}$ |

Exercice 4.16 Factoriser à l'aide de la décomposition du trinôme.

a) $2x^2 + 13x + 15$

d) $2x^2 - x - 28$

g) $17x^2 + 288x - 17$

b) $9x^2 + 8x - 1$

e) $3x^2 + 2x - 1$

h) $4x^2 + 2x - 56$

c) $5y^2 - 54y - 72$

f) $4t^2 + 7t - 2$

i) $3x^2 - 8x - 35$

Exercice 4.17 Factoriser à l'aide de la méthode de décomposition du carré :

a) $x^2 - 8x + 15$

c) $2x^2 + 3x - 35$

b) $x^2 + 5x - 14$

d) $3x^2 - 13x - 10$

Équations du deuxième degré

Exercice 4.18 Résoudre les équations suivantes en utilisant les techniques de factorisation :

a) $6x^2 - 6 = 0$

e) $8x^2 - 112x + 392 = 0$

i) $18z^2 + 72z + 72 = 0$

b) $t^2 + 20t + 100 = 0$

f) $196z^2 + 280z = -100$

j) $x^2 - 5 = 0$

c) $48z^2 - 216z + 243 = 0$

g) $t^2 + t + \frac{1}{4} = 0$

k) $x^2 - 5x - 36 = 0$

d) $4x^2 = 9$

h) $9x^2 - \frac{1}{9} = 0$

l) $x^2 + 3x - 18 = 0$

Exercice 4.19 Résoudre les équations suivantes en utilisant les techniques de factorisation.

a) $2z^2 + 24z + 64 = 0$

d) $t^2 + 11t + 30 = 0$

g) $x^2 + 45 = -18x$

b) $x^2 + 7x + 6 = 0$

e) $x^2 - 11x + 10 = 0$

h) $4x + 32 = x^2$

c) $-y^2 + 10y - 9 = 0$

f) $x^2 + 7x = 18$

i) $(2x - 1)^2 - x^2 = 0$

Exercice 4.20 Résoudre les équations suivantes à l'aide de la méthode du discriminant :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$

d) $z^2 - 15 = 0$

g) $x^2 + x + 1 = 0$

b) $y^2 - 5y + 4 = 0$

e) $x^2 + 8x + 16 = 0$

h) $6t^2 - t = 0$

c) $2x^2 - 5x = 0$

f) $5x^2 + 13x = 6$

i) $100u^2 + 40u + 4 = 0$

Exercice 4.21 Résoudre les équations suivantes à l'aide de la méthode du discriminant.

(On veut des solutions en valeurs exactes.)

a) $x^2 + 5x + 2 = 0$

c) $2x^2 = 4x + 4$

b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

d) $3x^2 + 5x + 12 = 0$

Exercice 4.22 Résoudre les équations suivantes :

a) $3(x^2 + 1) = -10x$

e) $(x + 1)(x + 3) - (4x - 5)(x + 1) = 0$

b) $(x - 7)^2 + (5x + 1)(x + 11) = 0$

f) $8(2x + 7)(4x - 5) = 0$

c) $0,5x(x + 3) = 0,4x - 0,2$

g) $(x + 3)(x - 4) = 170$

d) $\frac{1}{10}x^2 + 2x + 10 = 0$

h) $(x - 4)^2 = (2x - 5)^2$

Exercice 4.23 Factoriser les polynômes suivants à l'aide de la méthode du discriminant :

a) $3x^2 - 5x + 2$

c) $x^2 - 4x - 1$

b) $4x^2 - 20x + 25$

d) $x^2 + x + 1$

Exercice 4.24 Factoriser les polynômes ci-dessous à l'aide de la formule :

a) $6x^2 - x - 1$

c) $20x^2 - 76x + 21$

e) $9x^2 + 12x + 4$

b) $5x^2 + 17x - 12$

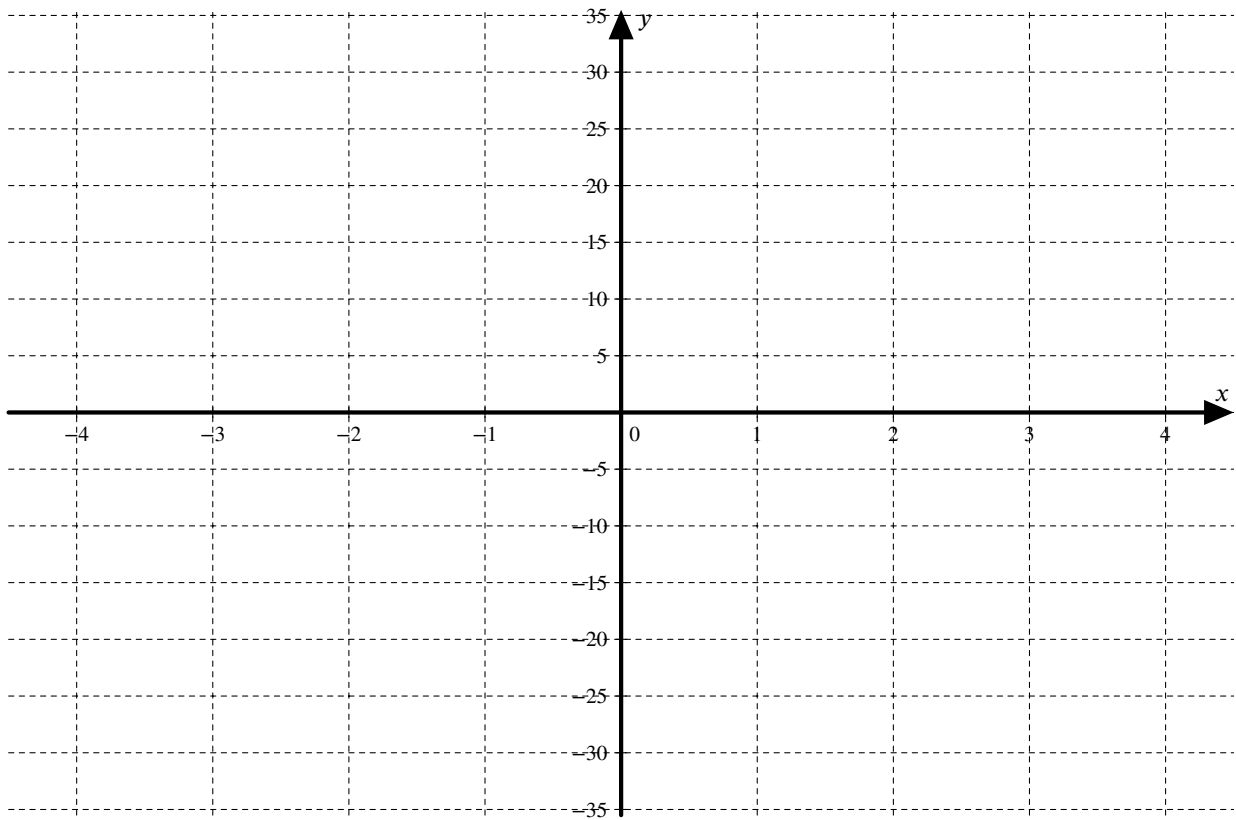
d) $4x^2 + 33x - 27$

f) $7x^2 - 9x + 2$

Fonctions quadratiques

Exercice 4.25 Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

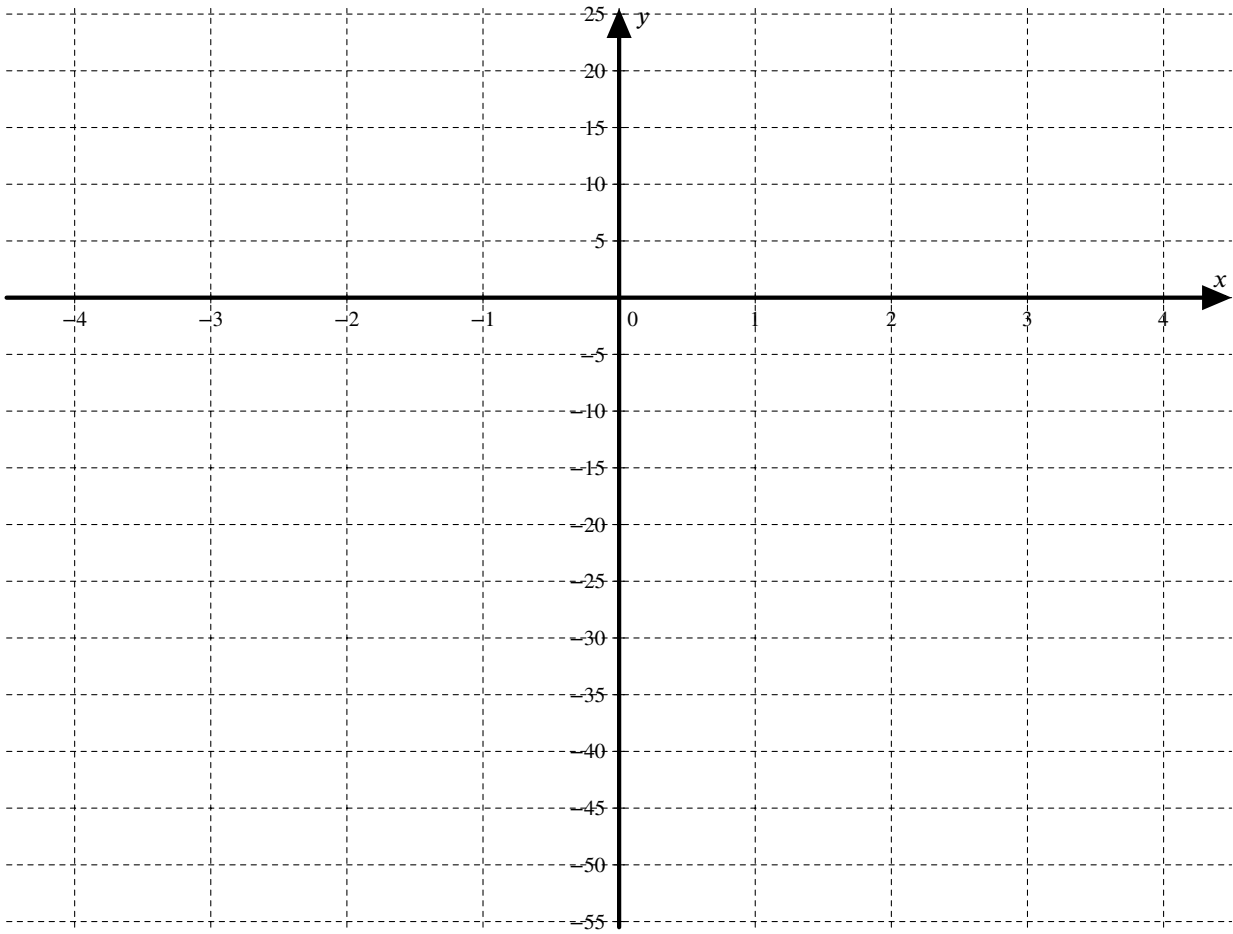
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2$									
$g(x) = 2x^2$									
$h(x) = -x^2$									
$i(x) = -\frac{1}{2}x^2$									



Que peut-on observer de particulier ?

Exercice 4.26 Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = -2x^2$									
$g(x) = -2x^2 - 10$									
$h(x) = -2x^2 + 20$									



Que peut-on observer de particulier ?

Exercice 4.27 Décrire le graphe des fonctions ci-dessous et donner les coordonnées de leurs intersections avec les axes.

a) $f(x) = x^2 - 9$

d) $f(x) = (x - 2)(1 - x)$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

e) $f(x) = -x(2 - 3x)$

c) $f(x) = 5 - 2x^2 + 3x$

f) $f(x) = -2(3x^2 + x - 4)$

Exercice 4.28 Dessiner les graphes des fonctions données par les expressions algébriques ci-dessous et comparer la transformation de l'expression avec celle du graphe :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

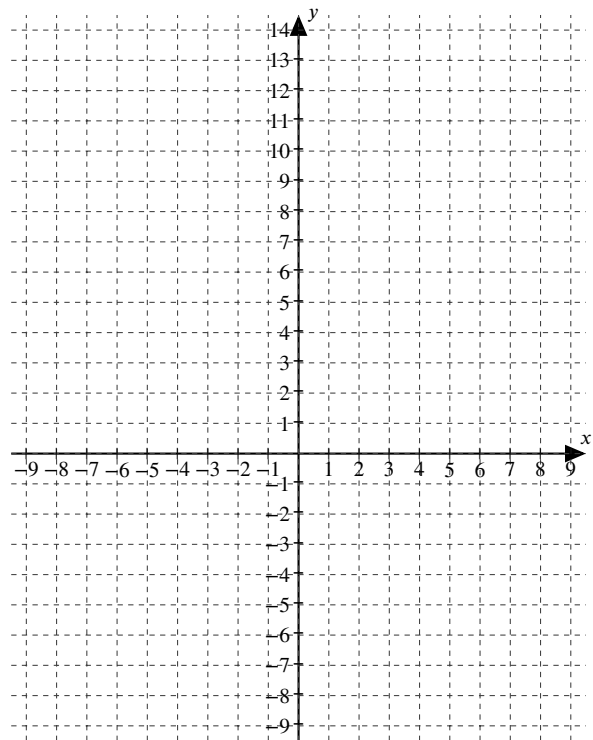
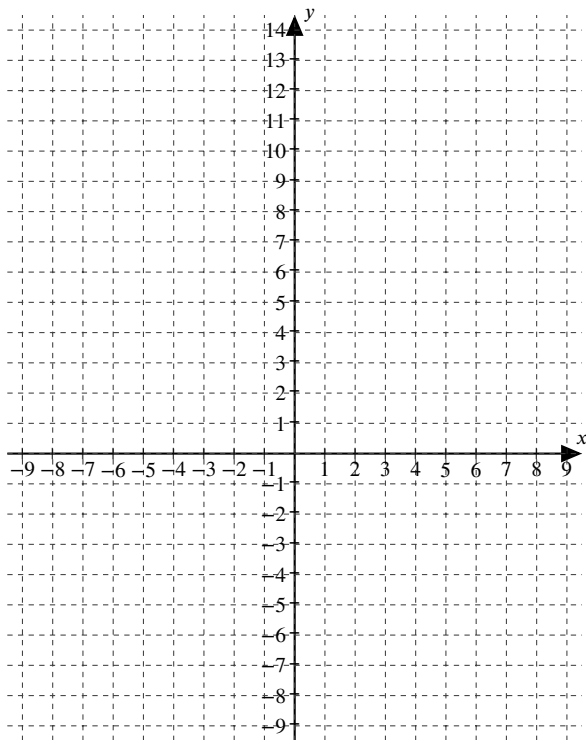
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$$

$$i(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2$$

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8$$

$$j(x) = \frac{1}{2}(x + 4)^2$$



Exercice 4.29 Calculer les coordonnées des points caractéristiques des paraboles d'équations suivantes. Indiquer si le sommet est un maximum ou un minimum.

a) $y = x^2 + 12x + 11$

c) $y = x^2 + x + 1$

e) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$

g) $y = 20 + 8x - x^2$

b) $y = x^2 + 4x$

d) $y = 2x^2 - x + 2$

f) $y = \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4}$

h) $y = x^2 - 5$

Exercice 4.30 Pour chacune des fonctions quadratiques ci-dessous, calculer les coordonnées des points caractéristiques, déterminer l'orientation de son graphe, puis tracer son esquisse.

a) $f(x) = x^2 + 8x + 12$

c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 9$

e) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$

b) $f(x) = x^2 - 4x$

d) $f(x) = -2x^2 + 8x - 13$

f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$

Exercice 4.31 Donner les coordonnées des points caractéristiques **sans réduire l'expression des fonctions**. Indiquer si le sommet est un maximum ou un minimum.

a) $f(x) = (x - 2)(x + 4)$

e) $f(x) = -2(x - 1)(x - 5)$

b) $f(x) = (x + 1)^2$

f) $f(x) = 2(x + 1)(x + 5)$

c) $f(x) = -(x + 1)^2$

g) $f(x) = -3(x + 3)(x - 4)$

d) $f(x) = (x - 1)^2$

h) $f(x) = -2x^2$

Exercice 4.32 Répondre aux questions ci-dessous.

a) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole d'équation $y = x^2 - 48x$

b) Déterminer les coordonnées des zéros de la parabole donnée par son sommet $S(-4; -12)$ et un point $(6; 0)$.

c) Déterminer l'équation de la parabole qui passe par le point $A(4; 48)$ et dont les points particuliers sont confondus ($S = H = Z_1 = Z_2$).

d) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole donnée par les points $A(-6; 12)$, $B(5; 7)$ et $C(-17; 7)$.

Exercice 4.33 Répondre aux questions ci-dessous.

a) Déterminer les coordonnées des zéros de la parabole donnée par son sommet $S(4; 2)$ et un point $B(0; 8)$.

b) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole d'équation $y = (x - 4)(x - 8)$.

c) Déterminer l'équation d'une parabole de sommet $S(-6; 0)$ et d'ordonnée à l'origine $H(0; 18)$.

d) Déterminer les coordonnées des zéros de la parabole d'équation $y = x^2 + 12x - 28$.

Exercice 4.34 Pour chacune des fonctions quadratiques ci-dessous, calculer les coordonnées des points caractéristiques, déterminer l'orientation de son graphe, puis tracer son esquisse.

a) $f(x) = x^2 + 8x + 12$

c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 9$

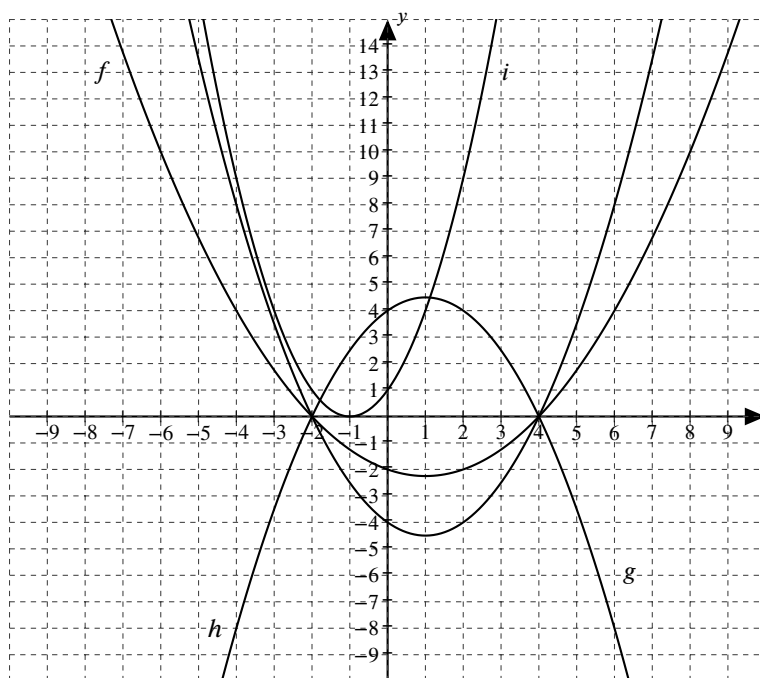
e) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$

b) $f(x) = x^2 - 4x$

d) $f(x) = -2x^2 + 8x - 13$

f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$

Exercice 4.35 Soit les fonctions quadratiques f , g , h et i dont les graphes sont représentés ci-dessous. Donner une expression algébrique pour chacune de ces fonctions.



Intersections de graphes

Exercice 4.36 Déterminer les coordonnées des points d'intersection des graphes de f et g .

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et $g(x) = -4x + 10$.

b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$ et $g(x) = 3x + 5$.

c) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ et $g(x) = x - 4$.

Exercice 4.37 Déterminer les coordonnées des points d'intersection des graphes de f et g .

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = 3x^2 - 12x + 18$.

b) $f(x) = -x^2 + 13x - 48$ et $g(x) = x^2 - 11x + 24$.

c) $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = 2x^2 - 6$.

Applications

Exercice 4.38 Un terrain rectangulaire de 26 m sur 30 m est entouré d'un trottoir de largeur constante. Si l'aire du trottoir est de 240 m^2 , quelle est sa largeur ?

Exercice 4.39 Un sol est recouvert de 500 dalles carrées. Si l'on avait utilisé des dalles de 5 cm plus longues et plus larges, il en aurait fallu 320 pour recouvrir le sol.

Quelles sont les dimensions des premières dalles ?

Exercice 4.40 Lorsqu'on lâche une pierre du haut d'une falaise, elle parcourt approximativement $4,9t^2$ mètres en t secondes. On entend l'impact 4 secondes plus tard. Sachant que la vitesse du son est d'environ 330 m/s, estimer la hauteur de la falaise.

Exercice 4.41

Quelle est la valeur maximale du produit de deux nombres si leur somme doit être égale à 35 ?

Exercice 4.42

Quelle est la valeur minimale du produit de deux nombres si leur différence doit être égale à 12 ?

Exercice 4.43 Sur son terrain, un fermier veut clôturer un enclos rectangulaire et le diviser en 2 rangées de 3 rectangles identiques, à l'aide de 1000 m de barrière. Quel est le plus grand enclos qu'il pourra obtenir ?

Exercice 4.44 Une compagnie désire fabriquer des gouttières à partir de feuilles d'aluminium de 27 cm de largeur en repliant les deux extrémités perpendiculairement à la base. Quelle largeur doit-on replier de chaque côté pour que la gouttière puisse contenir un maximum d'eau ?

Exercice 4.45 Une agence de voyages offre des voyages organisés au prix de CHF 60.– par personne pour les 30 premiers participants.

Pour les plus grands groupes, jusqu'à 90, chaque personne bénéficie d'un rabais de CHF 0,50 pour tout participant en plus des 30 premiers. Par exemple, si 33 personnes participent, le prix par personne est de CHF 58,50.

a) Quelle est l'expression de la fonction permettant de calculer le prix par personne en fonction du nombre de participants pour un groupe de plus de 30 personnes ?

b) Pour quel nombre de participants l'agence encaissera-t-elle le plus d'argent ?

9.5 Systèmes d'équations

Système d'équations linéaires 2x2

Exercice 5.1 Résoudre les systèmes d'équations suivants par substitution :

$$a) \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x - y = 4 \\ 13x - 3y = 14 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 5y = 69 \\ y - 4(x - 7) = 67 - 3x \end{cases}$$

Exercice 5.2 Résoudre les systèmes d'équations suivants par combinaison linéaire :

$$a) \begin{cases} -4x + 5y = 32 \\ 2x - 3y = -22 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 7x + 10y = -12 \\ 2x + 3y = -3 \end{cases}$$

Exercice 5.3 Résoudre les systèmes d'équations par la méthode la plus appropriée.

$$a) \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x - 5y = 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -6x = -1 - 3y \\ 6x - 15y = 15 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 21x - 49y = 21 \\ 4y + 5x = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4x + 3y + 3 = 0 \\ 8x + 5y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 7 + 4y = x \\ 5x - 6y = 21 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 14y + 54 = 10x \\ y + 4x = 15 \end{cases}$$

Exercice 5.4 Résoudre les systèmes d'équations.

$$a) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 10 - 3y \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4(x - y) = 10 + 2y \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - (6y - 5) = 15 \end{cases}$$

Exercice 5.5 Résoudre les systèmes d'équations.

$$a) \begin{cases} 9(x - y) + 24x = 100 \\ 3(x - y) = 32 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 6(x + y + 2) + 12x = 98 \\ x - y + 2 = 4x \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 6(x + y) - 7(x + y) - 2 = 0 \\ (5x - 3y) - 4(x - y) + 2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 5.6 Résoudre les systèmes d'équations.

$$a) \begin{cases} x - \frac{2}{3}y = 7 \\ \frac{3}{2}x - y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{4} = 1 \\ \frac{x-3}{3} - \frac{y+2}{2} = -2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{5}{12} \\ x - \frac{3y}{4} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Exercice 5.7 Un fermier possède des poules et des lapins. Ces animaux ont ensemble cinquante têtes et cent trente pattes. Combien de poules et combien de lapins possède le fermier ?

Exercice 5.8 Le nez de Pinocchio mesure 5 cm de long au début d'une journée.

Chaque fois que Pinocchio dit un mensonge, la Fée aux cheveux bleus allonge son nez de 3 cm, mais chaque fois qu'il dit la vérité, la Fée le raccourcit de 2 cm.

À la fin de la journée, Pinocchio a parlé dix fois pour dire soit des vérités, soit des mensonges, et son nez mesure 20 cm de long.

Combien de fois Pinocchio a-t-il menti au cours de cette journée ?

Exercice 5.9 Le prix d'une course en taxi comprend une somme fixe (la prise en charge) et une somme variable proportionnelle à la distance parcourue.

Un premier client a payé CHF 16,20 pour une course de 3 kilomètres ; un second client a payé CHF 36,60 pour une course de 9 kilomètres.

Quels sont le prix du kilomètre parcouru et celui de la prise en charge ?

Exercice 5.10 La ville de Nouvo a installé des usines pour alimenter ses citoyens en eau potable. Elle finance les coûts d'exploitation en facturant une redevance fixe et l'eau consommée.

Un des voisins de Jean a reçu son décompte et, pour une consommation de 60'000 litres, paie CHF 88,— ; un autre voisin paie CHF 100,— pour une consommation de 75'000 litres.

Jean n'a pas reçu son décompte, mais il sait qu'il a consommé 82'000 litres d'eau. Quel montant doit-il prévoir ? Déterminer également le montant de la taxe fixe et le prix pour 1'000 litres d'eau.

Exercice 5.11 Pour peindre une chambre, on mélange deux couleurs, une couleur A et une couleur B valant respectivement CHF 12,—/kg et 10,—/kg. Un kg de ce mélange vaut CHF 10,90.

Si l'on met dans ce mélange 3 kg de moins de couleur A en gardant la même quantité totale, le kg vaudra CHF 10,40.

Du mélange de base, combien y a-t-il de couleur A, respectivement de couleur B ?

Exercice 5.12 On mélange 9 litres et 6 litres de deux solutions salées à des taux différents, de cette manière, le mélange contient 13% de sel.

Si l'on prend 7 litres de plus de la première solution et 4 fois plus de la deuxième que précédemment, on obtient un mélange de 12%.

Quel pourcentage de sel contient chaque solution ?

Exercice 5.13 Deux capitaux placés, le premier à 0,4% et le second à 0,5%, produisent ensemble des intérêts annuels de CHF 450,— .

Si l'on avait placé le premier capital à 0,5% et le second à 0,4%, on aurait obtenu CHF 540,— .

Quels sont ces deux capitaux ?

Système d'équations du deuxième degré**Exercice 5.14** Résoudre les systèmes.

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 585 \\ x = 8y \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 96 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 3x + 2y + 2xy + 6 = 0 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 297 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + y = 11 \\ (x + 9)(y + 2) = 72 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y = 13 \\ (x + 3)(y + 10) = 120 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + y - x - 18 = 0 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = -4 \end{cases}$$

Exercice 5.15 Résoudre les systèmes.

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 125 \\ x^2 - y^2 = 75 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3x - 20y = 32 \\ 3x^2 - 2y^2 - 5x + 20y = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x^2 - 2y^2 + 8x - 16y = -8 \\ x^2 - y^2 - 4x + 8y = 4 \end{cases}$$

Systèmes d'équations linéaires 3x3**Exercice 5.16** Résoudre les systèmes.

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 41 \\ 8x + 5y - 2z = 3 \\ 3x + 7y - 2z = -1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - y + z = 30 \\ x + 2z = -2y \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2x + y + 4z = x - 6 \\ 2x + y = -17 + 3z \\ -4x + 7z = 11 - 2y \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - y + z = 29 \\ x + 3y + 30z = 6 \\ x - y + z = 17 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 7x + 3y = -7 + 3z \\ 4x + z = 3 - 2y \\ -2x + 5y - 5z = y - 35 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x + y - z = 7 + 2x \\ 3x + 2y = 14 - z \\ y = 7 - 3z - 5x \end{cases}$$

Exercice 5.17 Résoudre les systèmes.

a)
$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ 4x + 3y + 3z = 7 \\ -2x + 4y + 6z = 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + 5y + 6z = 17 \\ -x - 3y - 3z = -4 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 3x - 4y + z = 9 \\ -6x + 5y + \frac{3}{4}z = 4 \\ 9x - \frac{4}{5}y - z = -5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 1 \\ 10x + y + 2z = 8 \\ -5x - 2y + 4z = 8 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}y - z = -5 \\ 2x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{2}z = -2 \\ 5x - y + \frac{3}{5}z = 5 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} \frac{1}{5}x + y - 2z = -4 - z \\ 4x - \frac{3}{5}y - \frac{1}{3}z = 9 \\ x + y = z \end{cases}$$

Exercice 5.18 Résoudre les systèmes.

$$\text{a) } \begin{cases} 7x - 4y - 5z = 56 \\ 3y - 2z = 13 \\ 5x - 3y = 22 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + 5y = 12 \\ 3y - 2z = 4 \\ 5x - 3z = 21 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4y + 3z = 0 \\ x + y = z - 9 \\ 5x = y - 7 \end{cases}$$

Exercice 5.19 Un fermier a noté les trois commandes, ainsi que les totaux correspondants :

- 5 hl de froment / 4 hl de seigle / 3 hl d'avoine / 1210 francs,
- 3 hl de froment / 5 hl de seigle / 4 hl d'avoine / 1070 francs,
- 1 hl de froment / 8 hl de seigle / 5 hl d'avoine / 1110 francs.

Quel était le prix par hectolitre de chaque sorte de céréales ?

Exercice 5.20 La station du bas d'un téléphérique indique les tarifs suivants :

aller : CHF 22,50

retour : CHF 15.–

aller-retour : CHF 30.–

Pendant une journée, on a encaissé CHF 19'650.– pour un total de 680 montées et 520 descentes, allers-retours inclus.

Combien de billets de chaque sorte ont-ils été vendus ?

Exercice 5.21 À Pâques, j'ai reçu en tout 800 g de chocolat.

Hier, j'ai remarqué que j'avais mangé $\frac{7}{10}$ de mon chocolat blanc, $\frac{4}{5}$ de mon chocolat brun et la moitié de mon chocolat noir.

Il me reste alors autant de chocolat brun que des deux autres réunis.

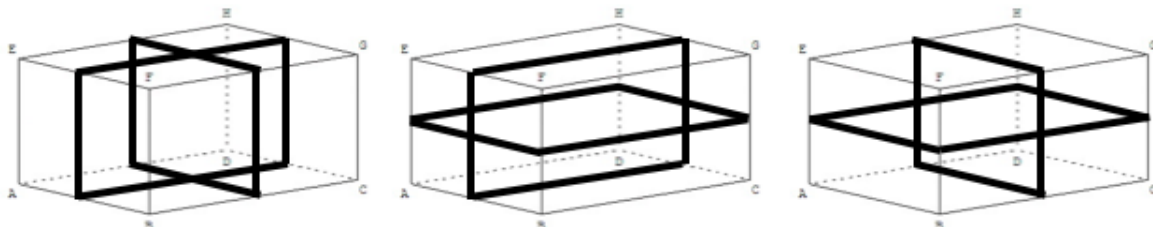
Pourtant, j'ai mangé 16 fois plus de chocolat brun que de noir !

Quelle quantité de chocolat de chaque sorte avais-je au début ?

Exercice 5.22 J'utilise tout le temps les mêmes paquets. Deux de leurs faces sont carrées. Par contre, je varie la manière d'attacher la ficelle autour.

Pour la première manière, j'ai eu besoin de 140 cm de ficelle. Pour la deuxième, il m'a fallu 160 cm et pour la troisième 140 cm.

Quelles sont les trois dimensions de mon paquet ?



Exercice 5.23 Un nombre est formé de trois chiffres dont la somme est 14.

En effaçant le chiffre des unités, j'obtiens le triple du chiffre des unités.

En effaçant le chiffre des dizaines, j'obtiens sept fois le chiffre des dizaines. Quel est ce nombre ?

Exercice 5.24 Lorsque c'est possible, déterminer l'équation de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ passant par les points A , B , et C .

a) $A(2;3)$, $B(-1;6)$ et $C(0;1)$

c) $A(5;3)$, $B(-2;3)$ et $C(3;-2)$

b) $A(-1;-2)$, $B(1;4)$ et $C(-4;4)$

d) $A(2;1)$, $B(-1;7)$ et $C(5;-5)$

Exercice 5.25 Trouver l'équation de la parabole $y = ax^2 + bx + c$, de sommet S et qui passe par A .

a) $S(2;3)$ et $A(4;7)$

b) $S(-3;1)$ et $A(1;9)$

9.6 Degrés 3 et plus

Factorisation

Exercice 6.1 Résoudre les équations suivantes :

a) $(3x + 2)(-4x) = 0$

c) $(x - 9)^2(x - 1)^3(4x + 1) = 0$

b) $(3x + 2) - 4x = 0$

d) $(x^2 - 9)(x - 1)^3(4x + 1) = 0$

Exercice 6.2 Effectuer et réduire en utilisant les identités remarquables.

a) $(x + 2)^3$

d) $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

g) $\left(3x + \frac{1}{3}\right)^3$

b) $(2x - 1)^3$

e) $(2x - 5)^3$

h) $(x^3 - 1)^3$

c) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

f) $(10c - 1)^3$

i) $(x^{10}y^4 + 1)^3$

Exercice 6.3 Factoriser les polynômes suivants en utilisant les produits remarquables :

a) $x^3 - 1$

d) $x^3 - 15x^2 + 75x - 125$

g) $x^3 - 125$

b) $64 + 125y^3$

e) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

h) $64x^3 + 27$

c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

f) $125x^3 - 1$

i) $x^3 - 6x^2 + 24x - 8$

Exercice 6.4 Effectuer et réduire.

a) $(5x + 4)^2$

d) $(z - 15)(z + 15)$

g) $(x - 3)(x + 22)$

b) $(5x^2 + 4)^2$

e) $(z^2 - 15)(z^2 + 15)$

h) $(x^2 - 3)(x^2 + 22)$

c) $(5x^3 + 4)^2$

f) $(z^{10} - 15)(z^{10} + 15)$

i) $(xy - 3)(xy + 22)$

Exercice 6.5 Factoriser.

a) $x^4 - 625$

d) $81x^4 - 72x^2 + 16$

g) $5x^4 - 55x^2 + 90$

b) $x^4 - 11x^2 + 28$

e) $z^4 - 8z^2 - 9$

h) $-7x^7 + x^5 + 6x^3$

c) $2x^4 + 23x^2 + 11$

f) $x^4 + 8x^2 - 9$

i) $\frac{1}{3}x^4 - 27$

Exercice 6.6 Résoudre les équations suivantes :

a) $27x^3 + 1 = 0$

c) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

e) $x^6 + 9x^5 + 27x^4 + 27x^3 = 0$

b) $x^6 + 2x^3 + 1 = 0$

d) $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$

f) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Exercice 6.7 Factoriser.

a) $x^3 + 5x^2 + 3x + 15$

d) $x^4 + 8x^3 + x + 8$

g) $-8x^7 - 64x^6 - 27x^4 - 216x^3$

b) $x^3 + 6x^2 - 4x - 24$

e) $x^4 + x^3 + 8x + 8$

h) $\frac{1}{11}x^3 + \frac{2}{11}x^2 - 11x - 22$

c) $5z^3 - 8z^2 - 5z + 8$

f) $2w^4 + 3w^3 - 250w - 375$

i) $120y^5 - 80y^4 - 30y^3 + 20y^2$

Exercice 6.8 Résoudre.

a) $2x^3 - 8x^2 + 8x = 0$

d) $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 = 0$

g) $2x^4 - 8x^3 + 4x^2 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

e) $3x^4 - 13x^3 - 10x^2 = 0$

h) $(x^2 + 4)(x^2 + 9) = 0$

c) $4x^3 - 12x^2 + 9x = 0$

f) $(x^5 - 9x^4)(x - 1)(x^2 - 1) = 0$

i) $3x^5 - 15x^3 + 12x = 0$

Exercice 6.9 Démontrer :

Tout nombre entier de la forme $n^3 - n$ est divisible par 6, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(Indication : Factoriser, puis montrer que le nombre est toujours divisible par 2 et 3.)

Exercice 6.10 Démontrer :

Si trois nombres réels ont une somme nulle, alors la somme de leurs cubes est égale au triple de leur produit.

Factorisation par division**Exercice 6.11**

- a) Diviser le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ par le polynôme $D(x) = x + 1$. Puis, écrire l'égalité fondamentale correspondante.
- b) Diviser le polynôme $P(x) = 4x^4 - 5x^2 + 7x + 8$ par le polynôme $D(x) = x^2 + 2x - 3$. Puis, écrire l'égalité fondamentale correspondante.

Exercice 6.12 Effectuer la division euclidienne de $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

- a) $F(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$ $G(x) = x - 5$
- b) $F(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ $G(x) = x^2 + 2x - 1$
- c) $F(x) = 5x^4 + 3x^3 - 1$ $G(x) = x^2 - 1$
- d) $F(x) = 6x^5 + 5x^4 - 25x^3 + 31x^2 - 12x + 5$ $G(x) = 2x^2 - 3x + 2$

Exercice 6.13 Effectuer la division euclidienne de $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

- a) $F(x) = 3x^4 - 7x^3 - 18x^2 + 28x + 24$ $G(x) = 3x^2 + 8x + 4$
- b) $F(x) = x^3 + x^2 + 5$ $G(x) = 2x - 3$
- c) $F(x) = -2x^3 - 3x + 1$ $G(x) = 3x^3 + x^2 - 1$

Exercice 6.14 Déterminer un polynôme $P(x)$ tel que le quotient de la division de $F(x)$ par $x^2 + 1$ soit égal à $5x^2 - 3x + 1$ avec un reste égal à $-x + 1$.**Exercice 6.15** À l'aide de la méthode de Horner, effectuer la division euclidienne de $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale correspondante.

- a) $F(x) = 3x^4 - 8x^3 + 10x + 5$ $G(x) = x - 2$
- b) $F(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$ $G(x) = x - 5$
- c) $F(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 8$ $G(x) = x + 2$
- d) $F(x) = x^4 - 8x^2 - 7$ $G(x) = x - 3$

Exercice 6.16 Montrer que le polynôme $P(x) = x^5 - 1$ est divisible par $D(x) = x - 1$ et calculer le quotient.

Exercice 6.17 Déterminer le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que le polynôme $P(x) = x^4 - \lambda x^3 + 2x^2 + 3\lambda x - \lambda^2$ soit divisible par $x - 2$. Calculer ensuite le quotient.

Exercice 6.18 Que peut-on dire sur un polynôme $P(x)$ qui s'annule en $x = -1$, $x = 1$, $x = 4$ et en $x = 0$. Existe-t-il plusieurs solutions à cette question ?

Exercice 6.19 Déterminer un polynôme $P(x)$ de degré trois vérifiant les quatre conditions suivantes :

- i) $P(0) = 0$;
- ii) $P(1) = 0$;
- iii) il est divisible par $x + 2$;
- iv) $P(3) = -6$;

Exercice 6.20 Déterminer un polynôme $P(x)$ de degré quatre vérifiant les cinq conditions suivantes :

- i) il s'annule en $x = -2$;
- ii) il est divisible par $x + 1$;
- iii) il admet le facteur x dans sa factorisation ;
- iv) $P(2) = 0$
- v) $P(1) = -18$

Exercice 6.21 Factoriser les polynômes suivants :

- a) $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$
- b) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$
- c) $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$
- d) $x^6 + x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 14x^2 + 4x - 8$

Exercice 6.22 Résoudre les équations suivantes (en utilisant la factorisation).

- a) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$
- b) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$
- c) $x^3 + 5x^2 - 8x - 48 = 0$
- d) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$
- e) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$
- f) $35x^3 + 47x^2 + 13x + 1 = 0$

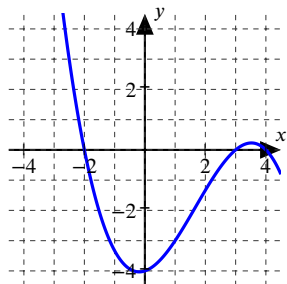
Exercice 6.23 On veut construire une boîte sans couvercle à partir d'une feuille de carton rectangulaire de 20 cm sur 30 cm en découpant de chaque coin un carré d'aire x^2 , et en relevant les côtés.

Montrer qu'il n'y a qu'une seule façon de construire une telle boîte d'un volume de 1000 cm^3 .

Signe d’une fonction polynomiale

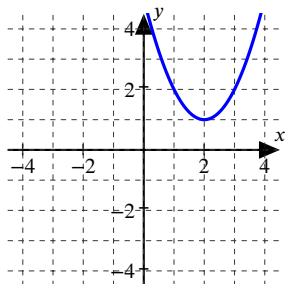
Exercice 6.24 Compléter le tableau des signes des fonctions représentées ci-dessous.

a)



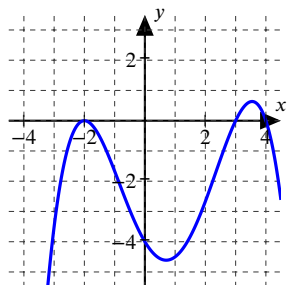
x	
$f(x)$	

c)



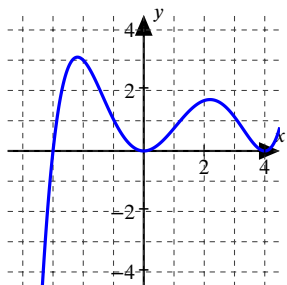
x	
$h(x)$	

b)



x	
$g(x)$	

d)

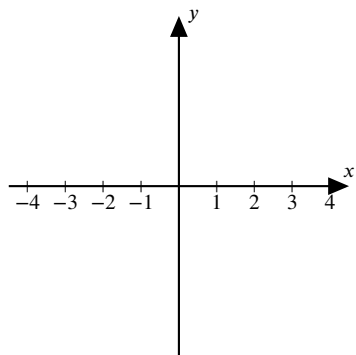


x	
$i(x)$	

Exercice 6.25 Faire une esquisse du graphe d’une fonction correspondant au tableau des signes.

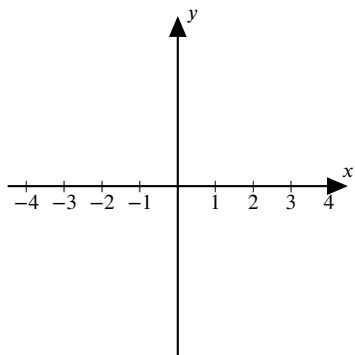
a)

x		-3		0		2	
$f(x)$	-	0	-	0	+	0	+



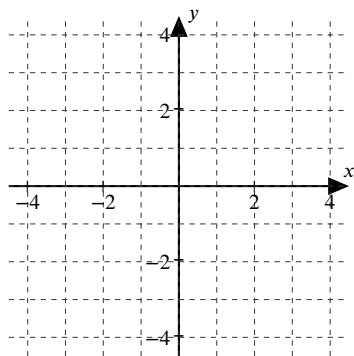
b)

x		-3		2	
$g(x)$	-	0	+	0	-



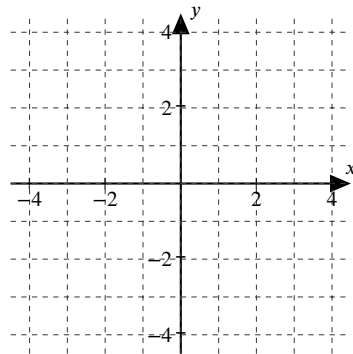
Exercice 6.26 Représenter le graphe de la fonction, puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x) = -\frac{3}{4}x + 1$



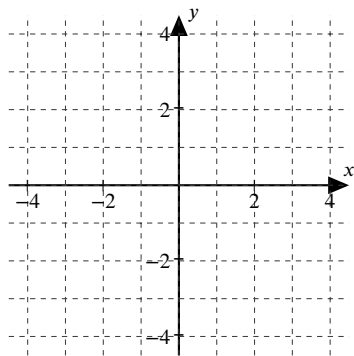
x	
$f(x)$	

c) $h(x) = -1$



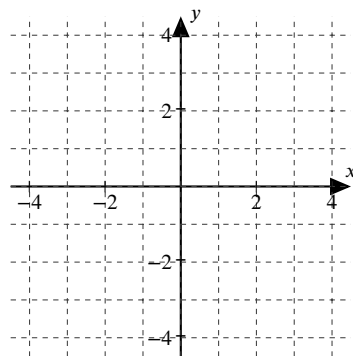
x	
$h(x)$	

b) $g(x) = x$



x	
$g(x)$	

d) $i(x) = 3x - 2$



x	
$i(x)$	

Exercice 6.27 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$7 - x$	

b)

x	
$4x - 7$	

c)

x	
$-\frac{1}{3}x + 2$	

d)

x	
$\frac{4}{5}x$	

e)

x	
13	

f)

x	
$-6 + x$	

Exercice 6.28 Trouver l'expression de deux fonctions affines différentes correspondant à ce tableau des signes :

x		4	
$f(x)$	+	0	-

Exercice 6.29 Remplir le tableau des signes .

a)

x	
3	
$5 - x$	
$2x + 3$	
$3(5 - x)(2x + 3)$	

b)

x	
$3x$	
$-5 + 4x$	
$3x(-5 + 4x)$	

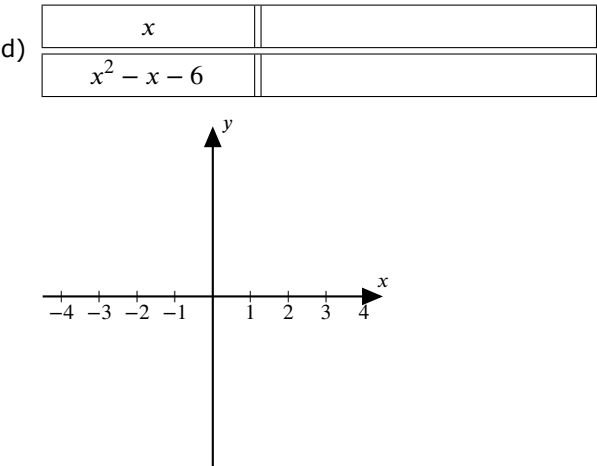
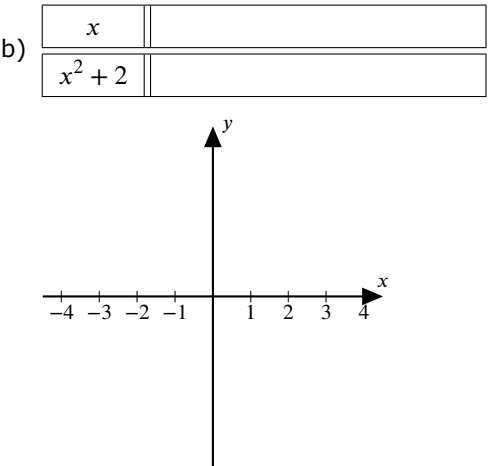
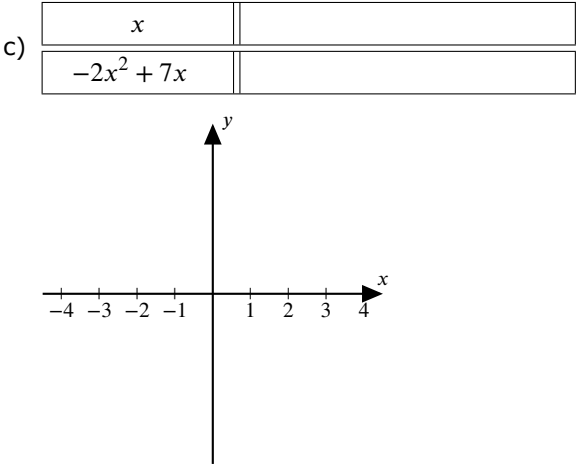
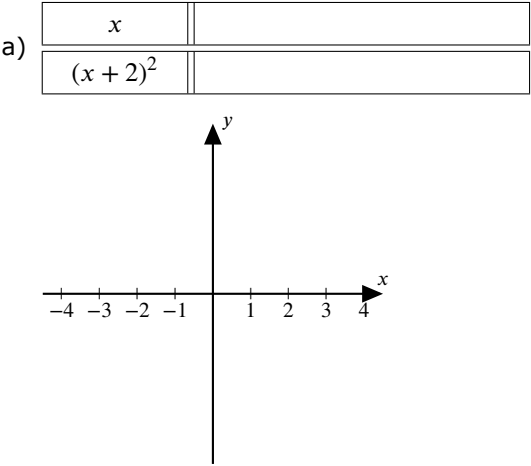
c)

x	
-4	
$x + 4$	
$x - 6$	
$-4(x + 4)(x - 6)$	

d)

x	
$-4x$	
$7x + 1$	
$-4x(7x + 1)$	

Exercice 6.30 Remplir le tableau des signes et faire une esquisse du graphe de la fonction.



Exercice 6.31 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$-x^2 - 16x - 55$	

b)

x	
$13x^2 + 12x - 1$	

c)

x	
$4x^2 + 12x + 9$	

d)

x	
$-5 + x^2$	

e)

x	
$x^2 + x + 9$	

f)

x	
$-9x^2 + 2x$	

g)

x	
$-x^2 - 9$	

h)

x	
$-5x^2$	

Exercice 6.32 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$5 - x^2$	
$2x^2 + 3$	
$(5 - x^2)(2x^2 + 3)$	

b)

x	
$x + 3$	
$x^2 + x - 6$	
$(x + 3)(x^2 + x - 6)$	

Exercice 6.33 Étudier le signe des fonctions suivantes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

a) $5x(3x + 2)(7 - x)$

c) $(x + 7)^3$

b) $-4(x - 8)(5x + 1)(x^2 + 2)$

d) $x^2(-2x + 5)$

Exercice 6.34 Étudier le signe des fonctions suivantes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

a) $9x^3 - 18x^2 - x + 2$

c) $x^3 + x^2 - 2$

b) $16 - x^4$

d) $-25x^3 + 30x^2 - 9x$

Exercice 6.35 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$(5 - x)^3$	

c)

x	
$x^3(x - 2)^2$	

b)

x	
$(3x + 7)^4$	

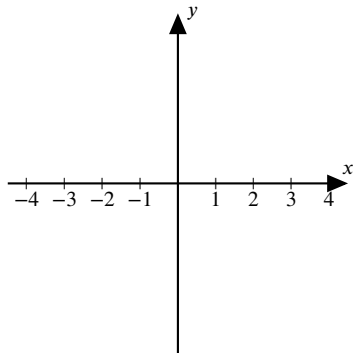
d)

x	
$-3x(x + 4)^4(6 - x)^2$	

Exercice 6.36 Remplir le tableau des signes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

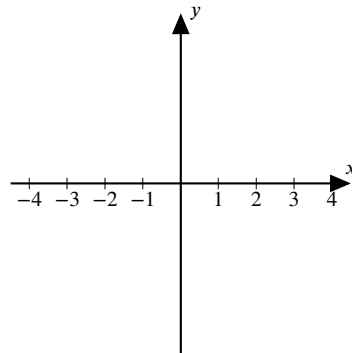
a)

x	
$(x-1)^2(x+2)^2$	



b)

x	
$(x-1)^2(x+2)^5$	



9.7 Fonctions rationnelles

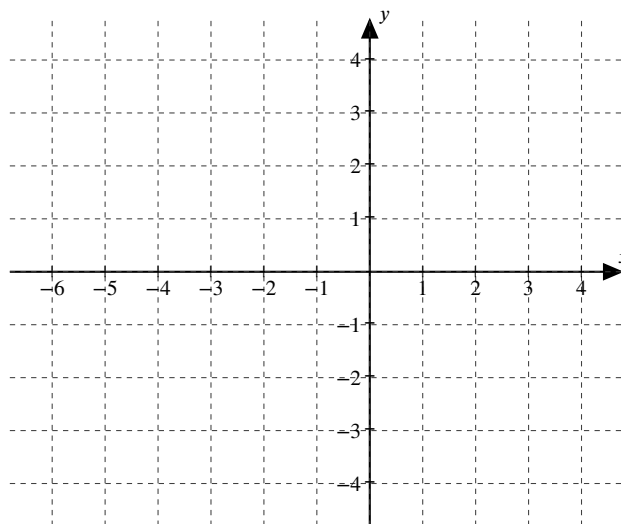
Généralités

Exercice 7.1 Soit la fonction définie par l'expression algébrique suivante :

$$f(x) = \frac{x-1}{2x+2}$$

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous et esquisser le graphe de f :

x	$f(x)$
-5	0,75
-4	0,83
-3	
-2	1,5
-1,5	
-1	
-0,5	-1,5
0	
1	
2	0,17
3	



b) Quel est l'ensemble de définition de f ?

c) Calculer $f(-0,999)$ et $f(-1,001)$.

d) Que se passe-t-il en $x = -1$?

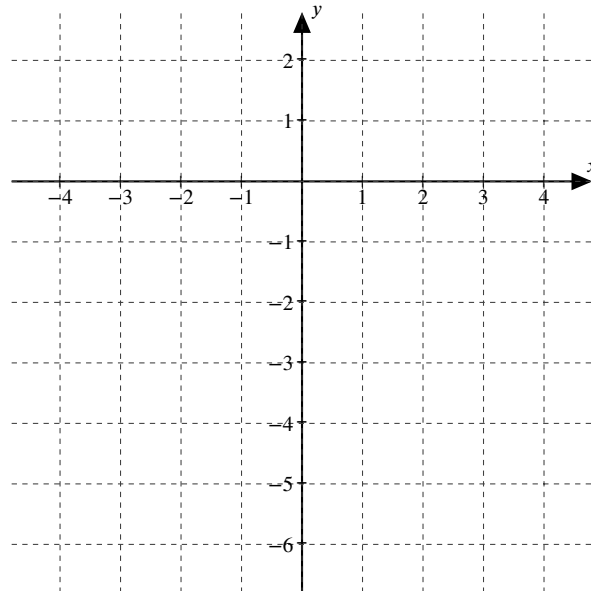
e) Étudier le signe de f .

Exercice 7.2 Soit la fonction définie par l'expression algébrique suivante :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

- a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
- b) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous et esquisser le graphe de f .

x	$f(x)$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



- c) Calculer $f(-1,999)$ et $f(-2,001)$.
- d) Que se passe-t-il en $x = -2$?
- e) Au graphe de quelle fonction, le graphe dessiné au point a) ressemble-t-il ? Quelle différence y a-t-il ?
- f) Factoriser le numérateur et dénominateur de la fonction f . Que peut-on observer ?
- g) Étudier le signe de f .

Exercice 7.3 Déterminer les ensembles de définition des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = \frac{x+3}{(x-2)^2}$

e) $j(x) = \frac{4x^2 + 12x + 9}{x^2 - 8x - 9}$

b) $g(x) = \frac{4x^2 - 36}{7x^2 + 4x}$

f) $k(x) = \frac{7x}{x^3 + 4x^2 - 9x - 36}$

c) $h(x) = 9x^2 + 5x - 4$

g) $l(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - 9x - 36}{7x}$

d) $i(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 + 9}$

h) $m(x) = \frac{x^3 - 125}{6x^3 + 11x^2 + x - 4}$

Simplification**Exercice 7.4** Soit la fraction $\frac{14}{22}$.

- a) Amplifier cette fraction par 2.
- b) Multiplier cette fraction par 2.
- c) Simplifier cette fraction par 2.
- d) Diviser cette fraction par 2.
- e) Dans quels cas n'a-t-on pas changé la valeur de la fraction ?

Exercice 7.5 Simplifier au maximum les fractions suivantes sans l'aide de la machine à calculer, puis vérifier les réponses à l'aide des touches "fractions" de la calculatrice.

- a) $\frac{48}{64}$
- b) $\frac{60}{96}$
- c) $\frac{372}{24}$
- d) $\frac{96}{432}$
- e) $\frac{35}{245}$
- f) $\frac{1540}{176}$

Exercice 7.6 Appliquer les transformations aux fractions rationnelles ci-dessous et réduire les polynômes. Déterminer l'ensemble de définition avant et après transformation.

- a) Amplifier $\frac{x+2}{x-3}$ par $x+1$.
- b) Amplifier $\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}$ par x .
- c) Amplifier $\frac{x+2}{x-3}$ par -2 .

Exercice 7.7 Expliquer pourquoi ces simplifications sont fausses.

- a) $\frac{2x+4}{2x+5} \neq \frac{4}{5}$
- b) $\frac{5x^3}{6x^3+x} \neq \frac{5}{6+x}$

Exercice 7.8 Appliquer les transformations aux fractions rationnelles ci-dessous. Déterminer l'ensemble de définition avant et après transformation.

- a) Simplifier $\frac{x^2-x}{x^4+3x^3-5x^2}$ par x .
- b) Simplifier $\frac{x+1}{x^3+1}$ par $x+1$.

Exercice 7.9 Donner l'ensemble de définition puis simplifier au maximum.

a) $\frac{x^2 + 2x}{5x^3 + 10x^2}$

c) $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

e) $\frac{12x^3(x+3)^2(x-2)^4}{18x^7(x+3)(x-2)^4}$

b) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$

d) $\frac{3x^2 + 15x}{7x^3 + 28x}$

f) $\frac{-51x^6(x^2 + 1)}{34x^2(x^2 + 1)}$

Exercice 7.10 Donner l'ensemble de définition puis simplifier au maximum.

a) $\frac{3y - 12x^2}{1 - 4x}$

d) $\frac{6x^3 - 25x^2 + 21x + 10}{4x^2 - 20x + 25}$

b) $\frac{2 - x}{x - 2}$

e) $\frac{x^3 + 1000}{x^3 + 10x^2 - 100x - 1000}$

c) $\frac{(2 - x)^2}{(x - 2)^4}$

f) $\frac{x^4 + 6x^3 + 9x^2}{x^4 - 18x^2 + 81}$

Opérations de base

Exercice 7.11 Préciser l'ensemble de définition, puis calculer et simplifier :

a) $\frac{2x + 1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - 1}$

d) $\frac{3x + 4}{x - 2} - \frac{x^2 - 4x - 8}{x^2 - 2x}$

b) $\frac{3x + 6}{(x + 2)^2} + 1$

e) $\frac{x^2 - 1}{x + 1} + \frac{x}{x - 1}$

c) $\frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{x + 1}$

f) $\frac{2x^2 - 4x - 1}{x^2 - 2x + 1} - \frac{x - 3}{x - 1}$

Exercice 7.12 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

a) $\frac{7}{2x - 3} + \frac{9}{x + 5}$

d) $\frac{x + 5}{x^2 + 3x + 2} + \frac{10}{x^2 - 4}$

b) $\frac{x - 14}{x - 2} + \frac{x + 2}{x + 14}$

e) $5 - \frac{2x - 15}{x + 3}$

c) $\frac{x + 4}{x - 2} + \frac{x^2 - 4x - 8}{x^2 - 2x}$

f) $\frac{x - 1}{x - 7} - \frac{x + 4}{x + 2}$

Exercice 7.13 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

$$a) \frac{x}{3x+6} - \frac{x^2}{x^2-4}$$

$$d) \frac{2x-1}{x^3-x^2-2x} - \frac{x}{x^3-2x^2}$$

$$b) \frac{6x+7}{x^3+6x^2-7x} - \frac{5}{x^2+6x-7}$$

$$e) \frac{6}{x^2-3x} - \frac{4}{x^2-2x}$$

$$c) \frac{3x}{x^2-x-2} - \frac{2x+3}{x^2+3x+2}$$

$$f) \frac{x+2}{x^3-x} - \frac{x+4}{x^3-2x^2-x+2}$$

Exercice 7.14 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

$$a) \frac{x+2}{x^2+7x+10} + \frac{x^2-15}{x^2-25} - \frac{x-3}{x^2-8x+15}$$

$$b) \frac{x-3}{x^2+6x+8} - \frac{x-2}{x^2+7x+12} + \frac{5}{x^2+5x+6}$$

Exercice 7.15 Préciser l'ensemble de définition, effectuer les opérations et simplifier au maximum.

$$a) \frac{x+1}{3x^2} \cdot \frac{9x}{(x+1)^2}$$

$$b) \frac{x^2-4}{x^2} \cdot \frac{x^3-x}{2x-4}$$

Exercice 7.16 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

$$a) \frac{x^2-2x-3}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^3-27}$$

$$c) \frac{x^2-1}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x^2-4}{2x+2}$$

$$b) \frac{x+7}{2x} \cdot \frac{4x^2}{14x+98}$$

$$d) \frac{x^2+5x+6}{2x^3+x^2-18x-9} \cdot \frac{2x^2-5x-3}{2x+4}$$

Exercice 7.17 Préciser l'ensemble de définition, effectuer les opérations et simplifier au maximum.

$$a) \frac{x-2}{x-1} : \frac{2x-4}{x^2-1}$$

$$c) \frac{x^2+2x-3}{2x} : \frac{x^4-18x^2+81}{x^2-x}$$

$$b) \frac{3x^2}{x^3-1} : \frac{x^3}{x-1}$$

$$d) \frac{x^4+3x^2-4}{x+3} : \frac{x^3+x^2+4x+4}{x}$$

Exercice 7.18 Préciser l'ensemble de définition, puis calculer et simplifier :

$$a) \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-2x}$$

$$b) \frac{x-2}{x^5} : \left(\frac{x^2-4}{x^3} \cdot \frac{2}{x^2+2x} \right)$$

Exercice 7.19 Préciser l'ensemble de définition, puis calculer et simplifier :

$$a) \frac{6x^2+2x}{27x^3+1} \cdot \frac{9x^2-3x+1}{4x^2}$$

$$d) \frac{x}{x+2} + \frac{x+5}{2}$$

$$g) \frac{x-4}{x^2-4} - \frac{1}{3x+6}$$

$$b) \frac{x+4}{x-5} - \frac{x+3}{5-x}$$

$$e) \frac{x^2-6x+8}{x^3-5x^2+2x+8}$$

$$h) \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+5x+4}$$

$$c) \frac{6x^2+12x}{x^2+x-20} : \frac{9x^5+72x^2}{x^2-9x+20}$$

$$f) \frac{x^3-2x^2}{x+3} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^3-4x}$$

$$i) \frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1}$$

Résolution d'équations rationnelles**Exercice 7.20** Préciser l'ensemble de définition, puis résoudre les équations suivantes.

a) $\frac{1-x}{2x} - \frac{x-1}{x} = 0$

d) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+5}{x^2+x-2} = 0$

b) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{2x+18}{x^2-9} = 0$

e) $\frac{2x+1}{x+2} = \frac{-1}{x-1}$

c) $\frac{3x-7}{2x-6} = \frac{1}{2}$

f) $\frac{2}{x-1} + \frac{5-3x}{x-x^2} = 0$

Exercice 7.21 Préciser l'ensemble de définition, puis résoudre les équations suivantes.

a) $\frac{(2x+3)(4x-1)}{7x+2} = 0$

d) $\frac{4}{x^2-3x} = \frac{x-1}{x-3} - 1$

b) $\frac{12}{x} = 7 + \frac{12}{1-x}$

e) $\frac{3-t}{3t} = \frac{1}{2t} - \frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{x} = \frac{1}{6} - \frac{1}{x+5}$

f) $\frac{2-3x}{2x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{7}{3}$

Exercice 7.22 La somme de CHF 144'000.– est partagée entre les 14 héritiers, qui sont les enfants et les petits-enfants du défunt. La moitié de la somme est répartie à parts égales entre les enfants. Les petits-enfants reçoivent chacun CHF 3000.– de moins que les enfants.

Combien y a-t-il d'enfants et de petits-enfants ? Combien chacun reçoit-il ?

Exercice 7.23 Un voyage d'études a un coût fixe CHF 14'520.–. Cette somme est répartie à parts égales entre les participants. Malheureusement, 2 étudiants ont arrêté leurs études en cours d'année, sans avoir payé quoi que ce soit. Le prix par participant a donc dû être majoré de CHF 55.–.

Combien de personnes vont participer à ce voyage ? Combien chacun va-t-il payer ?

Exercice 7.24 Je me suis lancé dans l'élevage de poules. J'en ai acheté pour un montant de CHF 210.–. Après que le renard en a mangé 3, j'ai décidé d'abandonner et de les revendre. Pour ne pas perdre trop d'argent, je les ai vendues CHF 4.– de plus chacune. Du coup, je n'ai perdu qu'un franc.

Combien de poules ai-je achetées et à quel prix ?

Signe d'une fonction rationnelle**Exercice 7.25** Donner l'ensemble de définition et étudier le signe de la fonction.

a) $\frac{x+4}{6-x}$

c) $\frac{-x^2+8x-7}{2x-11}$

b) $\frac{2(x+1)^3}{x^4}$

d) $\frac{x+3}{81-x^4}$

9.8 Inéquations

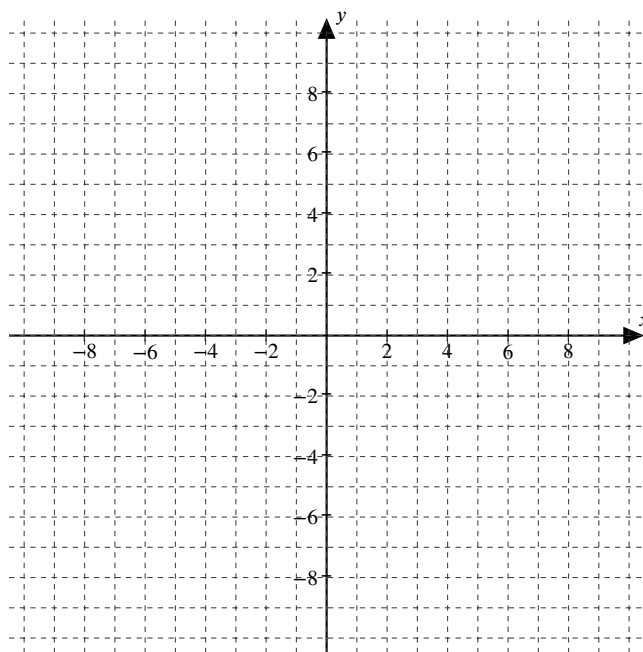
Inéquations du premier degré à une inconnue

Exercice 8.1 Résoudre ces inéquations par voie graphique.

a) $\frac{2}{3}x - 5 \leq -x + 5$

b) $4x + 5 \geq \frac{2}{3}x - 5$

c) $4x + 5 < -x + 5$

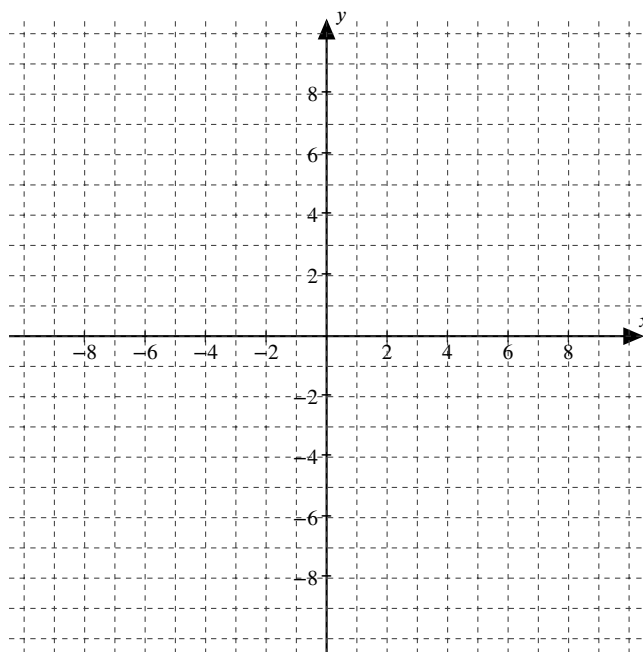


Exercice 8.2 Résoudre ces inéquations par voie graphique.

a) $\frac{1}{2}x + 2 > -x - 4$

b) $\frac{7}{2}x - 4 \leq -x - 4$

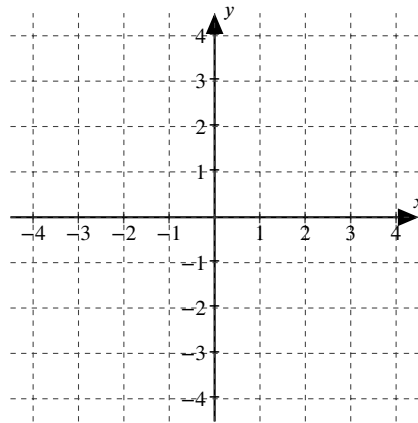
c) $\frac{1}{2}x + 2 > \frac{7}{2}x - 4$



Exercice 8.3 Représenter graphiquement les fonctions définies par les expressions algébriques ci-dessous sur un même graphique.

$$f(x) = -2x + 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x - 2$$



Résoudre ensuite les équations et inéquations suivantes :

a) $f(x) = 0$

c) $f(x) = x$

e) $f(x) > g(x)$

b) $f(x) = g(x)$

d) $f(x) < 0$

f) $f(x) \geq x$

Exercice 8.4 Résoudre algébriquement les inéquations ci-dessous.

a) $-2 \leq 2x$

d) $3x + 5 \leq 4x$

g) $2x > 5x$

b) $-2 \leq -2x$

e) $-3x \geq 3x - 6$

h) $-4x + 1 < -2$

c) $x + 7 > 17$

f) $8x + 3 < 33 + 6x$

i) $2x + 3 \leq -5 - 3x$

Exercice 8.5 Résoudre algébriquement les inéquations ci-dessous.

a) $x - 6 < \frac{8}{5}x$

d) $\frac{2}{3}x \leq -\frac{5x+30}{2}$

g) $\frac{3}{4}\left(12x - \frac{8}{15}\right) \geq 6x - 7$

b) $\frac{2}{3}x < 6(-x + 5)$

e) $2(x - 6) < \frac{8}{5}x + 2$

h) $x^2 - 12x + 36 < x^2 + 4x + 4$

c) $\frac{1}{3}x - 1 \leq \frac{8}{5}x$

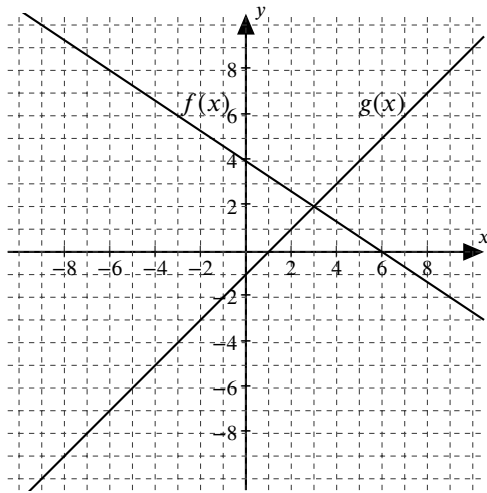
f) $-4x > \frac{24}{7}$

i) $4x + 4 > \frac{-x+30}{3} - 1$

Exercice 8.6

a) Résoudre $f(x) \leq g(x)$
pour $f(x)$ et $g(x)$ représentés ci-dessous.

b) Résoudre cette même inéquation algébriquement.

**Exercice 8.7** Résoudre les inéquations suivantes :

a) $5 - 2x \geq 1$

c) $-(7 - 2x) - 8 \geq 0$

e) $2x - \frac{x-5}{3} > 4 - \frac{2x-2}{2}$

b) $-4x - 5 < x + 5$

d) $1 - 3x \leq \frac{1}{3}(8 + 2x)$

f) $\frac{4-x}{2} - \frac{x-3}{5} \geq x - \frac{x+2}{3}$

Exercice 8.8 Au moment d'acheter une nouvelle grue, une entreprise de construction a le choix entre :

- Le modèle A : CHF 50'000.– à l'achat, CHF 2'000.–/an pour l'entretien,
- Le modèle B : CHF 40'000.– à l'achat, CHF 4'000.–/an pour l'entretien.

Après combien d'années, le modèle A sera-t-il moins cher que le modèle B ?

Exercice 8.9 Les températures sur les échelles de Fahrenheit et de Celsius sont liées par l'égalité suivante :

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Quelles sont les valeurs en degrés Fahrenheit qui correspondent aux températures comprises entre 30 et 40 degrés Celsius ?

Exercice 8.10 Résoudre les inéquations ci-dessous.

a) $2x - 6 < 2(x - 3)$

e) $2x - 6 \leq 2(x - 3)$

b) $2x - 6 < 2x - 3$

f) $2x - 6 \leq 2x - 3$

c) $2x - 6 > 2(x - 3)$

g) $2x - 6 \geq 2(x - 3)$

d) $2x - 6 > 2x - 3$

h) $2x - 6 \geq 2x - 3$

Exercice 8.11 Résoudre algébriquement les inéquations ci-dessous.

- | | |
|--------------------|---------------------------|
| a) $-8x \geq -8$ | e) $-8x \geq -8x + 8$ |
| b) $-8x \geq -8x$ | f) $-8x + 8 \geq -8x$ |
| c) $-8x + 8 > -8x$ | g) $-8x + 8 > -8x + 8$ |
| d) $-8x > -8x + 8$ | h) $-8x + 8 \geq -8x + 8$ |

Autres inéquations

Exercice 8.12 Résoudre les inéquations suivantes :

- | | | | |
|----------------------|--------------------------|---------------------|-------------------|
| a) $x^2 - 9x \leq 0$ | b) $-2x^2 + 7x + 15 < 0$ | c) $x^2 + 4 \geq 0$ | d) $x^2 + 4x < 1$ |
|----------------------|--------------------------|---------------------|-------------------|

Exercice 8.13 Résoudre les inéquations suivantes :

- | | | | |
|--------------|--------------------|--------------------------|-----------------------------|
| a) $x^2 < x$ | b) $x^2 - 3x > -2$ | c) $9(x - 1) < x(x + 3)$ | d) $(x - 2)^2 > 4(x - 1)^2$ |
|--------------|--------------------|--------------------------|-----------------------------|

Exercice 8.14 Résoudre les inéquations ci-dessous :

- | | | |
|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $-2x^3 + 2x^2 + 4x \leq 0$ | c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \geq 0$ | e) $-x^3 + 5x^2 - 3x + 15 > 0$ |
| b) $8x^3 - 27 > 0$ | d) $x^3 + 7x^2 - 4x - 28 < 0$ | f) $10x^2 + 54x \geq 6x^3 + 90$ |

Exercice 8.15 Résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|---|---------------------------------|
| a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0$ | e) $(x^3 - x^2 + x)(2 - x) > 0$ |
| b) $x^3 - 2x^2 - 15x \geq 0$ | f) $-x^3 + 4x < 0$ |
| c) $(x^2 - 4)(9 - x^2)(x^2 - x) \leq 0$ | g) $8x^3 - 4x^2 \leq 2x - 1$ |
| d) $(x + 2)^2(x - 1) < 0$ | h) $x^4 \geq 5x^2 - 4$ |

Exercice 8.16 Un météorologue a déterminé que la température T (en °F) pour une certaine période de 24 heures en hiver est donnée par la formule :

$$T(t) = \frac{1}{20}t(t - 12)(t - 24) \text{ pour } 0 \leq t \leq 24$$

où t est le temps écoulé en heures depuis 6 heures du matin.

- Quand a-t-on $T(t) > 0$?
- Représenter le graphe de la fonction T .
- À quelle heure la température a-t-elle été inférieure à 32°F (= 0°C) ?

Exercice 8.17 Un troupeau de cent cerfs est introduit sur une petite île. Tout d'abord, le troupeau grandit rapidement. Par la suite, les ressources en nourriture baissent et la population diminue. Supposons que le nombre $N(t)$ de cerfs après t années soit donné par la fonction :

$$N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$$

- a) Quand a-t-on $N(t) \geq 0$?
- b) Déterminer quand la population de cerfs va s'éteindre.
- c) Déterminer quand le troupeau de cerfs aura plus de 180 individus.

Exercice 8.18 Préciser l'ensemble de définition, puis résoudre les inéquations suivantes.

- a) $\frac{x-1}{x+3} \leq 0$
- c) $\frac{2x+3}{(x-1)(x+2)} \leq 0$
- b) $\frac{(x-2)(x+2)}{x-1} \geq 0$
- d) $\frac{(x-2)(3-x)}{(4+x)(3x-1)} \leq 0$

Exercice 8.19 Préciser l'ensemble de définition, puis résoudre les inéquations suivantes.

- a) $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2-1} \geq 0$
- e) $\frac{13}{x+4} \leq \frac{15}{2x-3}$
- b) $x > \frac{1}{x}$
- f) $\frac{x-1}{x^3} - \frac{x+1}{x^3-x^2} < \frac{3}{2x^2-x^3-x}$
- c) $\frac{4x-3}{x-1} \geq 2$
- g) $\frac{x^2+10x+16}{x-1} \geq 10$
- d) $\frac{6}{10-7x} < \frac{4}{5-3x}$
- h) $\frac{3x^2+12x+1}{2x^2+6x+1} \geq 2$

Exercice 8.20 Résoudre les inéquations suivantes.

- a) $x^2 + 15x + 44 \leq 0$
- c) $x^4 + 7x^2 + 19 \geq 10 + x^2$
- b) $\frac{7-x}{x} > 0$
- d) $\frac{7-x}{x} > 1$

Ensemble de définition d'une racine carrée

Exercice 8.21 Déterminer l'ensemble de définition.

- a) $\sqrt{x^2-9}$
- c) $\sqrt{(x-9)^3}$
- b) $\sqrt{\frac{1-5x}{x-3}}$
- d) $\sqrt{\frac{1}{x^2+4x+4}}$

10 Solutions

10.1 Réponses - Ensembles et logique

- 1.1**
- a) $\{0 ; 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20 ; 24 ; 28 ; 32 ; 36 ; 40\}$ d) $\{3 ; -1\}$
 b) $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24\}$ e) $\{0,1 ; 1 ; 10 ; 100 ; 1000\}$
 c) $\{B ; A ; N ; E\}$

- 1.2**
- a) $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; \dots\}$
 b) $\{\text{janvier} ; \text{février} ; \dots ; \text{novembre} ; \text{décembre}\}$
 c) $\{\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$
 d) $\left\{\frac{3}{1} ; \frac{6}{2} ; \frac{9}{3} ; \frac{12}{4} ; \dots\right\}^a$
 e) $\{0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; \dots\}$
 f) impossible à définir par extension
 g) $\{1 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001 ; 0,00001 ; \dots\}$

^aRappel : $\frac{3}{1}$ et $\frac{6}{2}$ sont 2 fractions différentes, équivalentes au même nombre rationnel.

- 1.3**
- a) $A = \{5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$ f) $F = \{7 ; 8 ; 9 ; 10\}$
 b) $B = \{0 ; 7 ; 14 ; 21 ; 28 ; \dots\}$ g) $G = \emptyset$
 c) $C = \{6 ; 13 ; 20 ; 27 ; \dots\}$ h) $H = \mathbb{Z}$
 d) $D = \left\{\frac{3}{10} ; \frac{6}{20} ; \frac{9}{30} ; \frac{12}{40} ; \dots\right\}$ i) $I = \{-1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$
 e) $E = \{5 ; 8 ; 10\}$ j) $J = \emptyset$
 k) $K = \{0 ; -8\}$

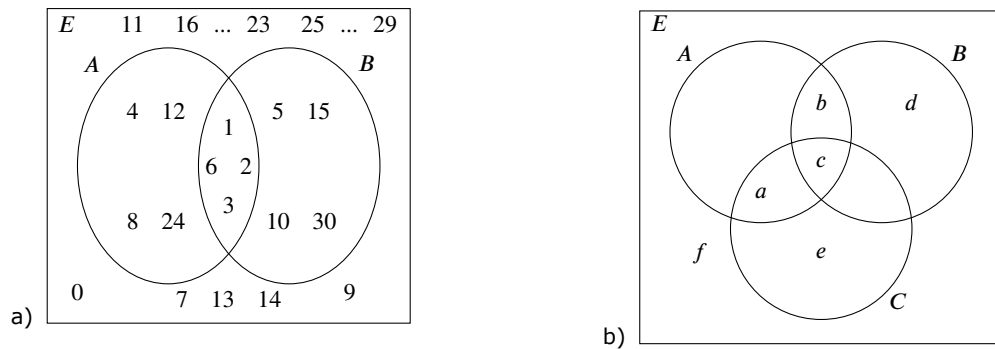
- 1.4**
- a) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{30} \in \mathbb{N}\right\}$ ou $\{x \in \mathbb{N} \mid x = 30k \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$
 b) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\}$ ou $\mathbb{N}^*$
 c) $\left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^* \text{ et } 0 < \frac{a}{b} < 3\right\}$
 d) $\left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^* \text{ et } a = 3b\right\}$
 e) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x-1}{2} \in \mathbb{Z}\right\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1 \text{ pour } k \in \mathbb{Z}\}$ ou $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{2} \notin \mathbb{Z}\right\}$
 f) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{30}{x} \in \mathbb{N}\right\}$ ou $\{x \in \mathbb{N} \mid 30 = kx \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$

- 1.5**
- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ d) $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x = k^3 \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*\}$
 b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ $= \{x \in \mathbb{N}^* \mid \sqrt[3]{x} \in \mathbb{N}^*\}$
 c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ e) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = k^3 \text{ pour } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } k < 6\}$

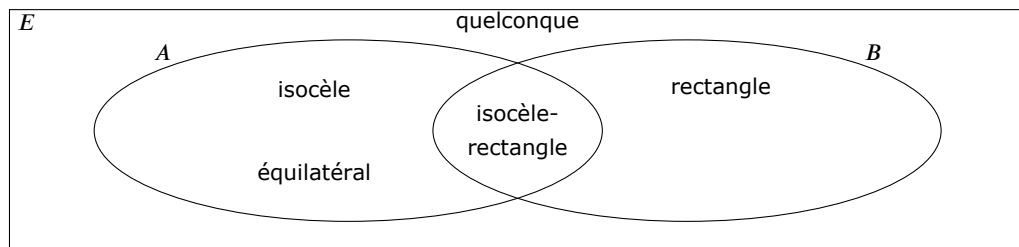
1.6

- a) $\{0; 10; 20; 30; 40; 50; \dots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 10 \cdot k \text{ pour } k \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{10} \in \mathbb{N}\}$
- b) $\{1; 2; 5; 10\} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{10}{x} \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 10 = k \cdot x \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}$
- c) $\{\dots; 0,01; 0,1; 1; 10; 100; \dots\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = 10^k \text{ pour } k \in \mathbb{Z}\}$
- d) $\{0; 1; 4; 9; 16; 25; \dots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = k^2 \text{ pour } k \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$
- e) $\{\dots; -4; -2; 0; 2; 4; \dots\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2 \cdot k \text{ pour } k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}\}$
- f) $\{\dots; -3; -1; 1; 3; 5; \dots\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2 \cdot k + 1 \text{ pour } k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x-1}{2} \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z}\}$

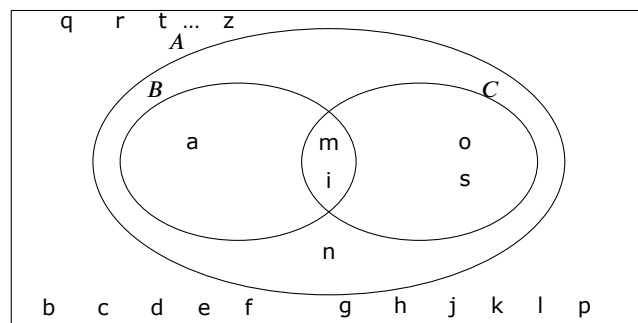
1.7



c)

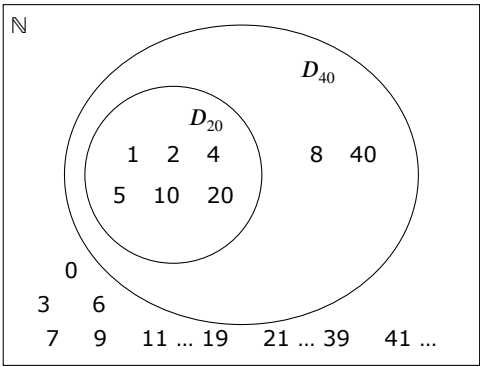


1.8

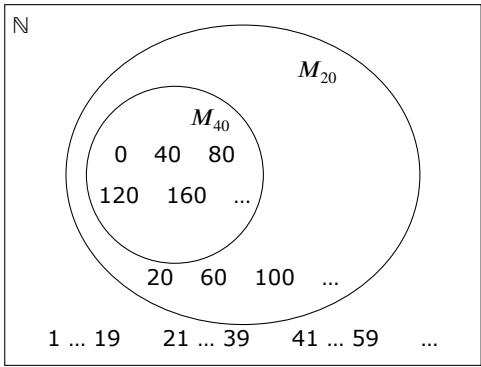


- a) faux b) faux c) vrai d) faux e) vrai f) faux g) vrai h) faux i) faux

a) $D_{20} \subset D_{40}$

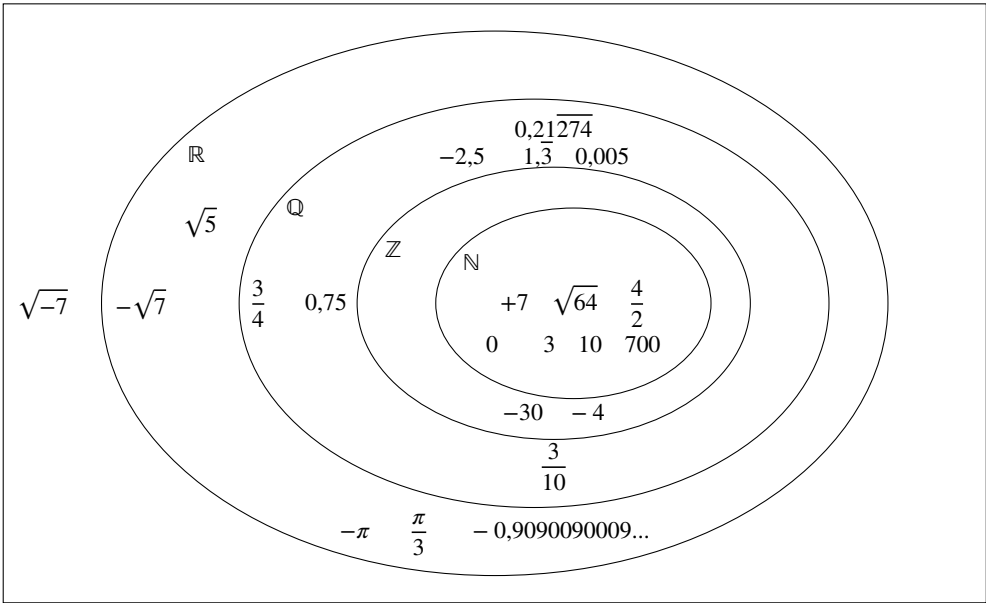


b) $M_{40} \subset M_{20}$



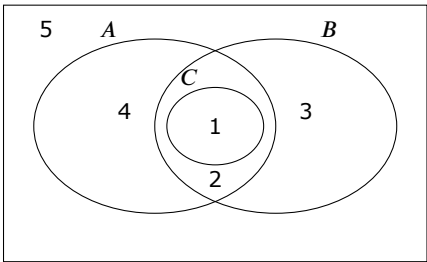
c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

1.9



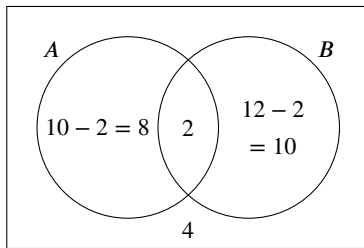
$E = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 \}$
 $A = \{ 1 ; 2 ; 4 \}$
 $B = \{ 1 ; 2 ; 3 \}$
 $C = \{ 1 \}$

1.10

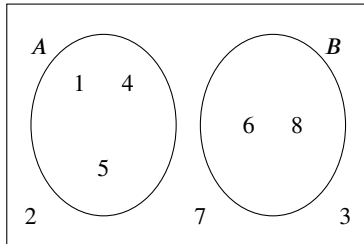


- 1.11 a) $a \in A$ b) vrai c) $A \subset B$ d) $d \notin A$ e) $B \not\subset A$ f) vrai

1.12

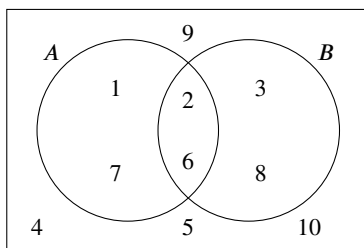


a)

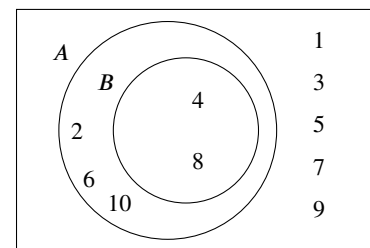


1.13

b)



c)



1.14

- | | | | | |
|------------------|------------------|----------------------|----------------------|--------------|
| a) $\{ 2 ; 3 \}$ | d) $\{ 1 ; 2 \}$ | g) $\{ 2 ; 3 ; 4 \}$ | j) $\{ 1 \}$ | m) $\{ 2 \}$ |
| b) $\{ 3 ; 4 \}$ | e) $\{ 3 \}$ | h) $\{ 2 ; 3 ; 4 \}$ | k) $\{ 1 \}$ | n) $\{ 4 \}$ |
| c) $\{ 1 ; 4 \}$ | f) $\{ 3 \}$ | i) $\{ 1 ; 2 ; 4 \}$ | l) $\{ 1 ; 2 ; 4 \}$ | o) $\{ 2 \}$ |

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A \quad A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- A) a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A d) $A \setminus B$ e) $\overline{A}$

1.15

- B) a) Les élèves qui aiment au moins un de ces légumes.
 b) Les élèves qui n'aiment qu'un seul de ces légumes.
 c) Les élèves qui n'aiment pas au moins un de ces légumes.
 d) Les élèves qui n'aiment aucun de ces légumes.

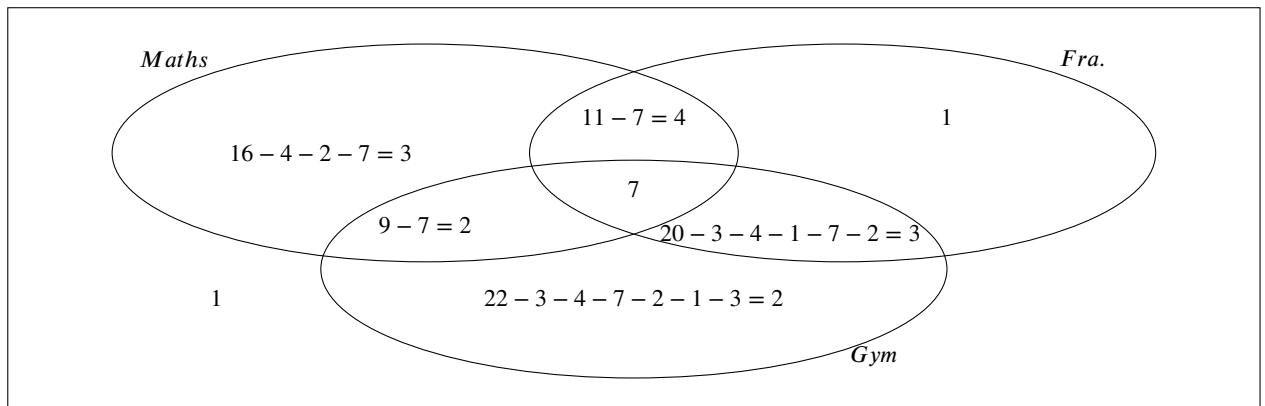
1.16

- | | | | |
|------------------|--------------------|----------------------|-----|
| a) π | $-\sqrt{2}$ | 0,123456789101112... | ... |
| b) $\frac{2}{7}$ | $-4,\overline{15}$ | 0,12 | ... |
| c) -4 | -123 | $-1'000'000$ | ... |

1.17

- | | | |
|----------------------|--------------------------|----------------|
| a) $\{ d ; e ; f \}$ | d) $\{ a ; b ; c ; d \}$ | g) $\{ a \}$ |
| b) $\{ a ; e ; f \}$ | e) $\{ a ; d ; e ; f \}$ | h) $\{ d \}$ |
| c) $\{ b ; c \}$ | f) $\{ e ; f \}$ | i) $\emptyset$ |

1.18



1.19

- a) A b) $\emptyset$ c) A d) E e) A f) A

1.20

- a) A b) B c) $\emptyset$

1.21 Il y a 30 élèves dans la classe dont 11 font de la musique.

1.22 45 élèves n'étudient que le latin, 15 que l'italien et 55 aucune des trois langues.

1.23 a) $\overline{(A \cup B \cup C)} \cup (A \cap B \cap C)$ b) $A \setminus (B \cup C)$ c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B)$

1.24 $[1,68 ; +\infty[$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1,68\}$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid 1,68 \leq x\}$

1.25 $]600 ; 660]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 600 < x \leq 660\}$

1.26 $[13,5 ; 26,5]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 13,5 \leq x \leq 26,5\}$

1.27

Inégalité	Axe	Intervalle
$-4 \leq x < 1$		$[-4 ; 1[$
$x \leq 3$		$] -\infty ; 3]$
$-2 < x \leq 1$		$] -2 ; 1]$
$0 \leq x$		$[0 ; +\infty[$

1.28

- | | | |
|-----------------------|------------------------------|---|
| a) $]4 ; 23[$ | e) $[\pi ; \frac{23}{2}]$ | h) $]1 ; 1,5]$ |
| b) $] -35 ; -2]$ | f) $] -\frac{4}{5} ; 2,4]$ | i) $] -\infty ; 2[$ |
| c) $[-8 ; +\infty[$ | g) $[\frac{1}{2} ; +\infty[$ | j) $\{ \dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 \}$ |
| d) $] -\infty ; 4,5[$ | | k) $\emptyset$ |

1.29

Inégalité	Axe	Intervalle
$-4 < x \leq 1$ ou $x > 3$		$] -4 ; 1] \cup [3 ; +\infty[$
$1 \leq x < 2$ ou $3 < x \leq 4$		$[1 ; 2[\cup]3 ; 4]$
$-3 < x \leq -2$ ou $2 \leq x < 4$		$] -3 ; -2] \cup [2 ; 4[$
$x \leq -3$ ou $x \geq 1$		$] -\infty ; -3] \cup [1 ; +\infty[$

1.30

- | | | |
|---------------------|--------------------|---|
| a) $[-7 ; +\infty[$ | c) $[-7 ; 0]$ | e) $] -\infty ; -7[\cup]3 ; +\infty[$ |
| b) $]0 ; 3]$ | d) $]3 ; +\infty[$ | f) $] -\infty ; 0]$ |

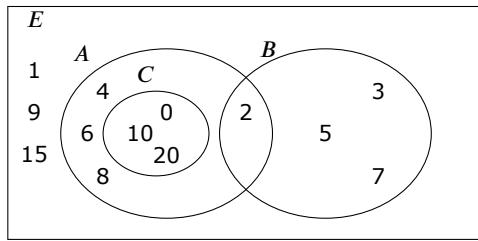
1.31

- | | | |
|--|---------------------|---------------------|
| a) $] -\infty ; 3] \cup]5 ; +\infty[$ | c) $] -\infty ; 3]$ | e) $]3 ; +\infty[$ |
| b) $\emptyset$ | d) $]5 ; +\infty[$ | f) $] -\infty ; 5]$ |

1.32

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$ | b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 3\}$ | c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 3\}$ |
|---|--|--|

1.33



$$C \subset A$$

être un multiple de 10 $\Rightarrow$ être pair

1.34

- a) vrai
b) faux
c) faux (contre-ex. : 2)

- d) faux (contre-ex. : 35)
e) vrai

1.35

- a) vrai
b) faux (contre-ex. : fer-de-lance)
c) faux (contre-ex. : 8)

- d) vrai
e) faux (même si c'est souvent vrai !)

1.36

- a) ne pas être un mammifère $\Rightarrow$ ne pas être un dauphin
b) x n'est pas un multiple de 10 $\Rightarrow$ x n'est pas un multiple de 20
c) ne pas être un rectangle $\Rightarrow$ ne pas être un carré
d) x n'a pas exactement deux diviseurs $\Rightarrow$ x n'est pas un nombre premier
e) être un triangle $\Rightarrow$ ne pas être un quadrilatère
f) x n'est pas divisible par 6 $\Rightarrow$ x n'est pas divisible par 2 **ou** x n'est pas divisible par 3
g) ne pas être au début du dictionnaire $\Rightarrow$ être un mot qui ne commence **ni** par a, **ni** par b

1.37

- a) voler un œuf $\Rightarrow$ voler un bœuf
ne pas voler un bœuf $\Rightarrow$ ne pas voler un œuf
b) être un chat $\Rightarrow$ être gris la nuit
ne pas être gris la nuit $\Rightarrow$ ne pas être un chat
c) être une pierre qui roule $\Rightarrow$ ne pas amasser de la mousse
amasser de la mousse $\Rightarrow$ ne pas être une pierre qui roule
d) être une tête intelligente $\Rightarrow$ se protéger
ne pas se protéger $\Rightarrow$ ne pas être une tête intelligente

1.38

- A) avoir gagné $\Rightarrow$ avoir tiré un jeton bleu ou un jeton jaune
B) Un jeu dans lequel on gagne si l'on tire soit un jeton bleu, soit un jaune, soit un rouge.
C) a, b, f

1.39

- a) Pour tout nombre réel non nul, il existe un unique nombre réel, tel que leur produit soit égal à 1. (C'est $\frac{1}{x}$, l'inverse de x) Exemple : -7 et $-\frac{1}{7}$
b) Un nombre x est pair si et seulement s'il existe un nombre entier k tel que x soit égal au double de k . Exemple : $k = 6$ pour $x = 12$

1.40

- a) $\forall d, e$ droites : d est parallèle à $e \iff \forall P \in d, P \notin e$.
b) $\forall a, b \in \mathbb{N}$: $pgdc(a; b) = 1 \iff ppmc(a; b) = a \cdot b$

- a) Les **carrés** sont des **rectangles** .
 b) Les **rectangles** peuvent être des **carrés** .
 c) $\forall ABCD$ **carré** , $ABCD$ est un **rectangle** .
1.41 d) Tous les **carrés** sont des **rectangles** .
 e) $ABCD$ est un **carré** $\implies ABCD$ est un **rectangle** .
 f) $\exists ABCD$ **rectangle** tel que $ABCD$ est un **carré** .
 g) Les **rectangles** ne sont pas des **carrés** .

- a) faux, contre-exemple : 3 car $\frac{3}{4}$ n'est pas un entier positif.
 b) vrai, par exemple : 40 car $\frac{40}{4}$ est un entier positif.
1.42 c) faux, on pouvait choisir 40 ou 8 ou 44 donc pas unique.
 d) faux, contre-exemple 0 car $0 \cdot y = 0 \neq 1$.
 e) vrai, car $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ et $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$.
 f) faux, contre-exemple 2 car si $2 \cdot y = 1$ alors $y = \frac{1}{2}$ qui n'est pas entier.

- a) Contre-exemple : 0,5 car son double est 1 et $0,5 + 1 = 1,5$ n'est pas un multiple de 3. (ou tout autre nombre positif non entier)
 b) Soit x un nombre réel et y son double. Si $x + y$ est un multiple de 3 alors x est entier.
 c) $H : x \in \mathbb{R}, y = 2x, x + y = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$ $C : x \in \mathbb{N}$
1.43 d) $D : 3k = x + y = x + 2x = 3x \implies k = x \implies x \in \mathbb{N}$
 e) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = 2x$, si $x \notin \mathbb{N}$ alors $\nexists k \in \mathbb{N}$ tel que $x + y = 3k$.
 f) Soit $x \in \mathbb{N}$ et $y = 2x$, alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $x + y = 3k$.
 La somme d'un nombre entier positif et de son double est un multiple de 3.
 g) $x + y = x + 2x = 3x$ et $x \in \mathbb{N}$

- a) **H** : Soit $x \in \mathbb{Z}$
C : $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$
 Faux : si $x = 2$, son inverse $= \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
 b) **H** : Soit $x \in \mathbb{Z}$
C : $\frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$
 Faux : si $x = 1$, son inverse $= \frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{Z}$

- 1.44** c) **H** : Soit $x, y \in \mathbb{Q}^*$
C : $x : y \in \mathbb{Q}$
D : $\exists p, q, r, s \in \mathbb{Z}^*$, tels que $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{r}{s}$
 $x : y = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r} \in \mathbb{Q}$ #

- d) **H** : Soit x, y impairs
C : $x - y$ est pair
D : $\exists m, n \in \mathbb{N}$, tels que $x = 2m + 1$ et $y = 2n + 1$
 $\implies x - y = (2m + 1) - (2n + 1) = 2m - 2n = 2(m - n)$ est pair. #

- a) triangles : $n = 3$ somme des angles = $180 \cdot (3 - 2) = 180^\circ$
 quadrilatères : $n = 4$ somme des angles = $180 \cdot (4 - 2) = 360^\circ$
H : un polygone à n côtés **C** : la somme des angles = $180 \cdot (n - 2)$

- b) exemples : faire les dessins de deux triangles rectangles, mesurer et calculer.

H : un triangle rectangle

C : le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés

1.45

- c) $30 = 3 \cdot 10$ et $7770 = 777 \cdot 10$

H : un nombre entier avec 0 pour le chiffre des unités

C : c'est un multiple de 10

- d) $3 \cdot 10 = 30$ et $777 \cdot 10 = 7770$

H : un multiple de 10 **C** : son chiffre des unités est 0

- a) carré de 10 cm de côté aire = 100 cm^2
 carré de $10 \cdot 2 = 20$ cm de côté aire = $400 = 4 \cdot 100 \text{ cm}^2$
 carré de 3 cm de côté aire = 9 cm^2
 carré de $3 \cdot 2 = 6$ cm de côté aire = $36 = 4 \cdot 9 \text{ cm}^2$

H : Soit un carré de côté x et un deuxième carré de côté $2x$.

C : Si A est l'aire du premier carré, alors l'aire du deuxième carré vaut $4 \cdot A$.

D : Aire du premier carré : $A = x^2$.

Aire du deuxième carré : $(2x)^2 = 4x^2 = 4 \cdot A$

#

- b) carré d'aire = 100 cm^2 côtés = $\sqrt{100} = 10 \text{ cm}$
 carré d'aire = $4 \cdot 100 = 400 \text{ cm}^2$ côtés = $\sqrt{400} = 20 = 2 \cdot 10 \text{ cm}$
 carré d'aire = 9 cm^2 côtés = $\sqrt{9} = 3 \text{ cm}$
 carré d'aire = $4 \cdot 9 = 36 \text{ cm}^2$ côtés = $\sqrt{36} = 6 = 2 \cdot 3 \text{ cm}$

H : Soit un carré d'aire A et un deuxième carré d'aire $4 \cdot A$.

C : Les dimensions du deuxième carré sont le double de celles du premier.

D : Notons x la longueur des côtés du premier carré.

Côtés du premier carré : $x = \sqrt{A}$

Côtés du deuxième carré : $\sqrt{4 \cdot A} = 2\sqrt{A} = 2x$

#

- c) $3 \cdot 4 = 12$ qui est pair. $10 \cdot 11 = 110$ qui est pair.

H : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m = n + 1$.

C : $n \cdot m$ est pair

D : Si n est pair $\implies \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k \implies n \cdot m = 2km$ est pair.

Si n est impair $\implies m$ pair $\implies \exists k \in \mathbb{N}, m = 2k$

$\implies n \cdot m = 2kn$ est pair.

#

- d) $(-\frac{1}{5}) + \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{19}{15}$

H : Soit $x, y \in \mathbb{Q}$

C : $x + y \in \mathbb{Q}$

D : $\exists p, r \in \mathbb{Z}, q, s \in \mathbb{Z}^*$ tels que, $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{r}{s}$

$x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s}{q \cdot s} + \frac{q \cdot r}{q \cdot s} = \frac{p \cdot s + q \cdot r}{q \cdot s} \in \mathbb{Q}$

#

10.2 Réponses - Introduction aux fonctions

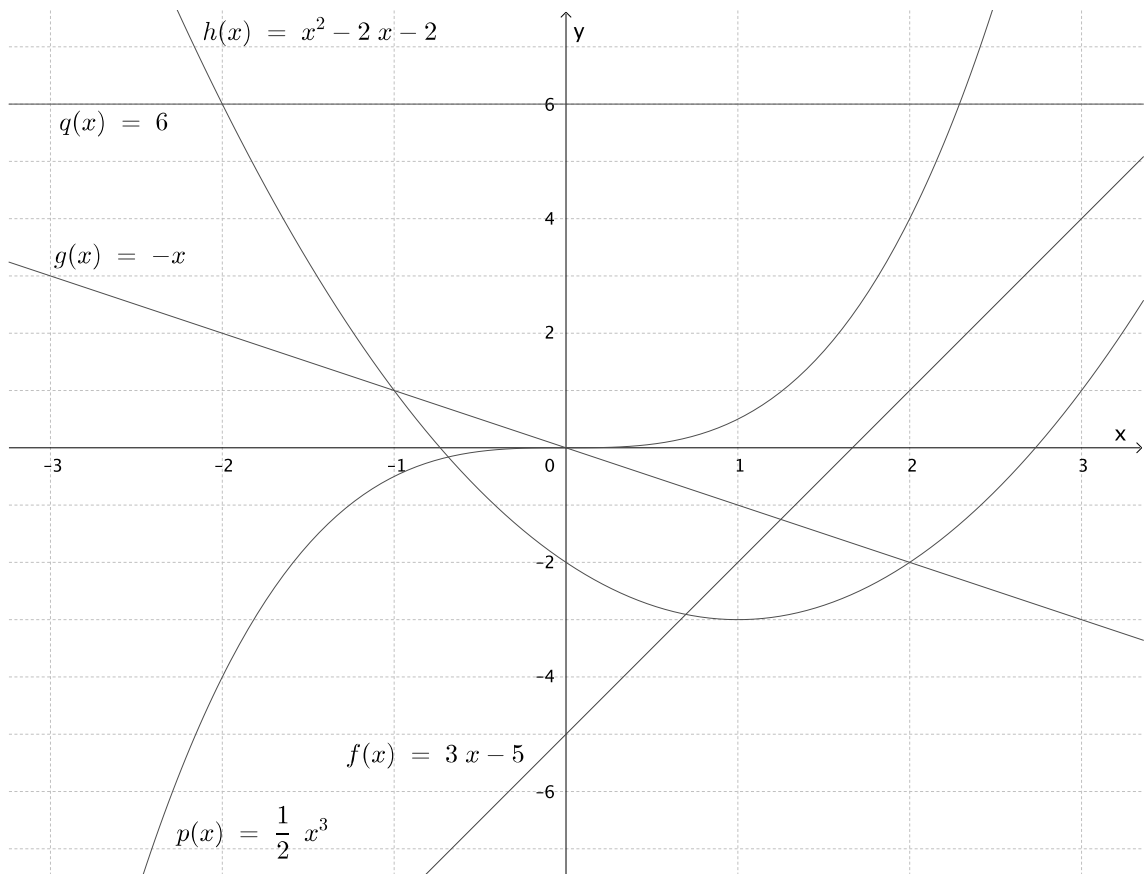
-
- | | | | |
|------------|--------------------|------|-------|
| 2.1 | a) $f(x) = 2x + 5$ | b) 7 | c) -2 |
|------------|--------------------|------|-------|
-
- | | | | |
|------------|----------------------|-------|---------|
| 2.2 | a) $f(x) = 2(x + 5)$ | b) 12 | c) -4,5 |
|------------|----------------------|-------|---------|
-
- | | | | |
|------------|-----------------------|-------|-----------|
| 2.3 | a) $f(x) = (x - 7)^2$ | b) 36 | c) 6 et 8 |
|------------|-----------------------|-------|-----------|
-
- | | | | |
|------------|---------------------|-------|------------------------------|
| 2.4 | a) $f(x) = x^2 - 7$ | b) -6 | c) $-\sqrt{8}$ et $\sqrt{8}$ |
|------------|---------------------|-------|------------------------------|
-
- | | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| 2.5 | non
oui | oui
oui | oui
non |
|------------|------------|------------|------------|
-
- | | | | |
|------------|-----|-----|--|
| 2.6 | oui | non | cela dépend comment est défini le graphe aux points d'abscisses entières |
|------------|-----|-----|--|
-

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 3x - 5$	-14	-11	-8	-5	-2	1	4
$g(x) = -x$	3	2	1	0	-1	-2	-3
$h(x) = x^2 - 2x - 2$	13	6	1	-2	-3	-2	1
$p(x) = \frac{1}{2}x^3$	$-\frac{27}{2}$	-4	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{27}{2}$
$q(x) = 6$	6	6	6	6	6	6	6

b)

2.7



2.8 a) $\mathbb{R}$ $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ $[4; +\infty[$ b) -3 4 4 c) 27 $-\frac{4}{5}$ n'existe pas

2.9 a) 0,5 b) -3 et -1 c) 1 d) 0

2.10 a) -2 et 1 b) -1 et 2 c) 16 d) -2

2.11 a) $\mathbb{R}$ b) -9 c) -3 et 3 d) -1 et 1 e) -5 f) $[-9; +\infty[$

2.12 h, q
 f, r
 g, p

2.13 $f : A, B, E, F, H$

$g : F, G$

$h : A, B, G$

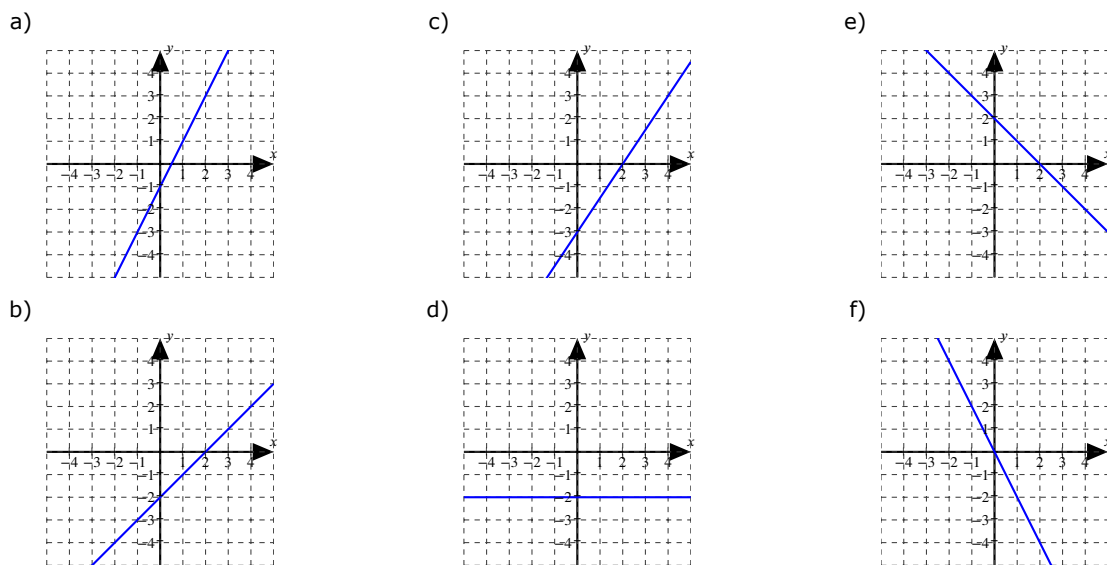
$p : B, C, D, F, G, H$

10.3 Réponses - Degrés 0 et 1

3.1

- a) 0 b) 5 c) -1 d) 1 e) -2 f) 3
- La fonction est de degré 4.

3.2



- B) $\frac{1}{2}$ 2 2 - 2 0
- C) -1 -2 -3 -2 2 0
- D) 2 1 $\frac{3}{2}$ 0 -1 -2

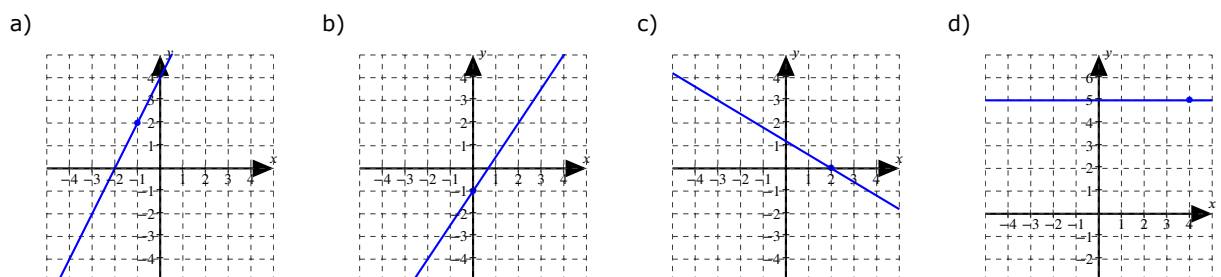
3.3

- a) 7 b) 3 c) 1 d) 0 e) $2u + 3$ f) $4t + 3$

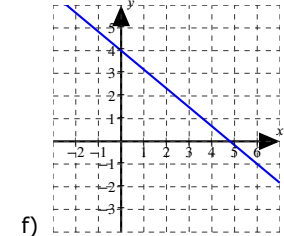
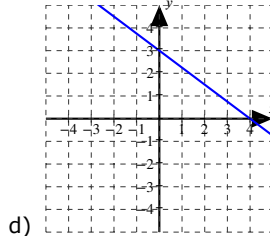
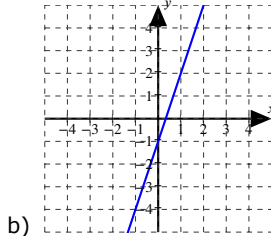
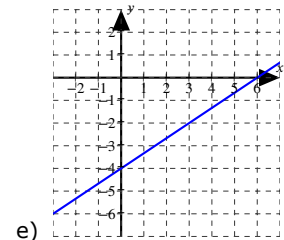
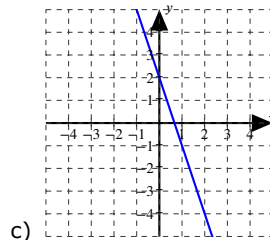
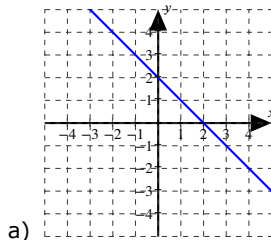
3.4

- A) $-\frac{1}{5}$ 1 $\frac{5}{3}$ 0 B) 2 0 -3 3

3.5



3.6



3.7

a) $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$

c) $f(x) = \frac{5}{2}x - 4$

b) $f(x) = -2x + 7$

d) $f(x) = -4x + 8$

3.8

a) $y = 7x - 3$

b) $y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$

c) $y = 2$

d) $x = 3$

e) $y = \frac{3}{2}x$

a) $m = -\frac{3}{8}$

b) $y = 5x - 2$

c) $y = -3x$

3.9

d) Oui, les deux droites ont la même pente qui vaut $\frac{1}{2}$.

e) Non, car l'équation de la droite est $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ et on a $-\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{5}{2} = 1$.

3.10

a) $\mathcal{S} = \{4\}$

b) $\mathcal{S} = \{-4\}$

c) $\mathcal{S} = \{2\}$

d) $\mathcal{S} = \{5\}$

e) $\mathcal{S} = \{0\}$

f) $\mathcal{S} = \{1\}$

3.11

a) $\mathcal{S} = \left\{\frac{26}{5}\right\}$

b) $\mathcal{S} = \{10\}$

c) $\mathcal{S} = \left\{\frac{7}{3}\right\}$

d) $\mathcal{S} = \{8\}$

e) $\mathcal{S} = \{22\}$

f) $\mathcal{S} = \left\{\frac{169}{25}\right\}$

g) $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

h) $\mathcal{S} = \{20\}$

i) $\mathcal{S} = \{63\}$

3.12

a) $\mathcal{S} = \{12\}$

b) $\mathcal{S} = \{-2\}$

c) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

d) $\mathcal{S} = \{1\}$

e) $\mathcal{S} = \{0\}$

f) $\mathcal{S} = \emptyset$

3.13

a) $\mathcal{S} = \{-23\}$

c) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{8}\right\}$

e) $\mathcal{S} = \left\{\frac{16}{5}\right\}$

b) $\mathcal{S} = \{0\}$

d) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

f) $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

3.14

a) $\frac{5}{4}$

b) -5

c) 2

d) 37

3.15

a) $-\frac{35}{2}$

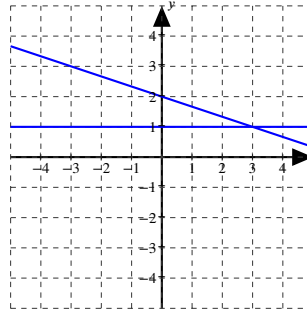
b) 5

c) -7

d) 8

$$\mathcal{S} = \{3\}$$

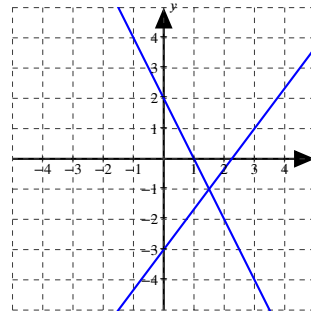
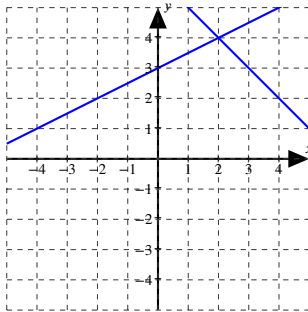
3.16



a) $I(2; 4)$

b) $I\left(\frac{3}{2}; -1\right)$

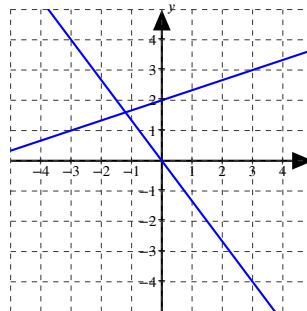
3.17



3.18 $\left(\frac{40}{7}; \frac{20}{7}\right)$

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{6}{5}\right\}$$

3.19



3.20 a) $x \mapsto -\frac{1}{10}x + 60$

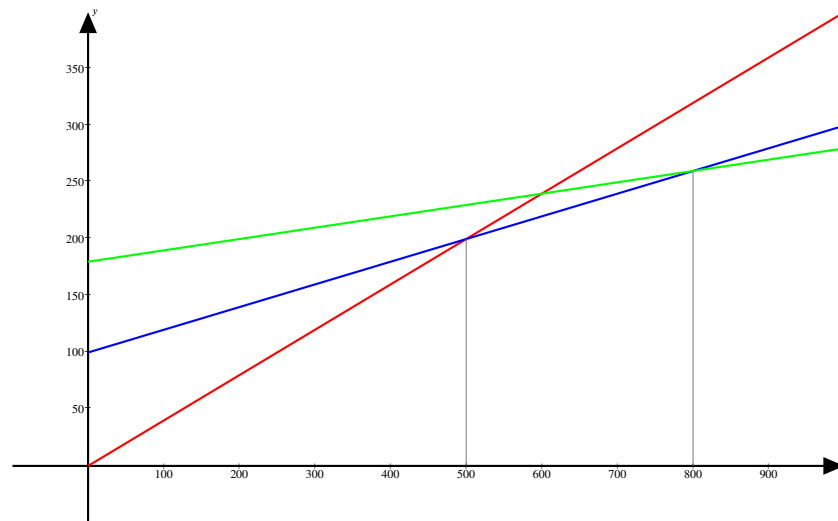
b) Capacité du réservoir : 60 litres
Consommation de la voiture : 10 litres/100 km

3.21 a) $x \mapsto \frac{2}{25}x + 40$ où x : nb de hl consommés Jean devra payer : 105,60 Frs.

b) Redevance fixe : 40.– Frs Taxe variable : 80 cts/1000 l

a)

3.22



b) 500 navets / jour

c) 800 navets / jour

A) père : $f(x) = \frac{20}{3}x$ fils : $g(x) = 4x + 30$

B)

- a) 30 m
- b) Le père a gagné avec 2,5 secondes d'avance.
- c) 10 m
- d) Vitesse du père : $\sim 6,67$ m/s, vitesse du fils : 4 m/s.

3.23

e) Oui, à 75 m de la ligne de départ.

C)

- a) 40 m
- b) père : $\sim 16,7$ sec fils : 20 sec Le père a gagné avec $\sim 3,3$ secondes d'avance.
- c) fils : 90 m donc 10 m d'écart
- d) Vitesse du père : 6 m/s, vitesse du fils : 3 m/s.
- e) Oui, après $\sim 13,3$ sec donc à 80 m de la ligne de départ.

3.24 9.– Frs/livre

Le 2^{ème} est plus avantageux à partir d'un tirage de 2000 exemplaires.a) achat : $f(x) = 0,3x + 6850$ carsharing : $g(x) = 0,7x + 300$

3.25 b) achat : 8'650.– Frs/an carsharing : 4'500.– Frs/an

c) 16'375 km/an

10.4 Réponses - Degré 2

4.1

a) $4x^2 - 7x + 8$ c) $3x^2 + 12x - 12$ e) $19x - y$ b) $-x^3 + x^2 - 3x$ d) $-16x^2 - \frac{9}{11}x + 6$

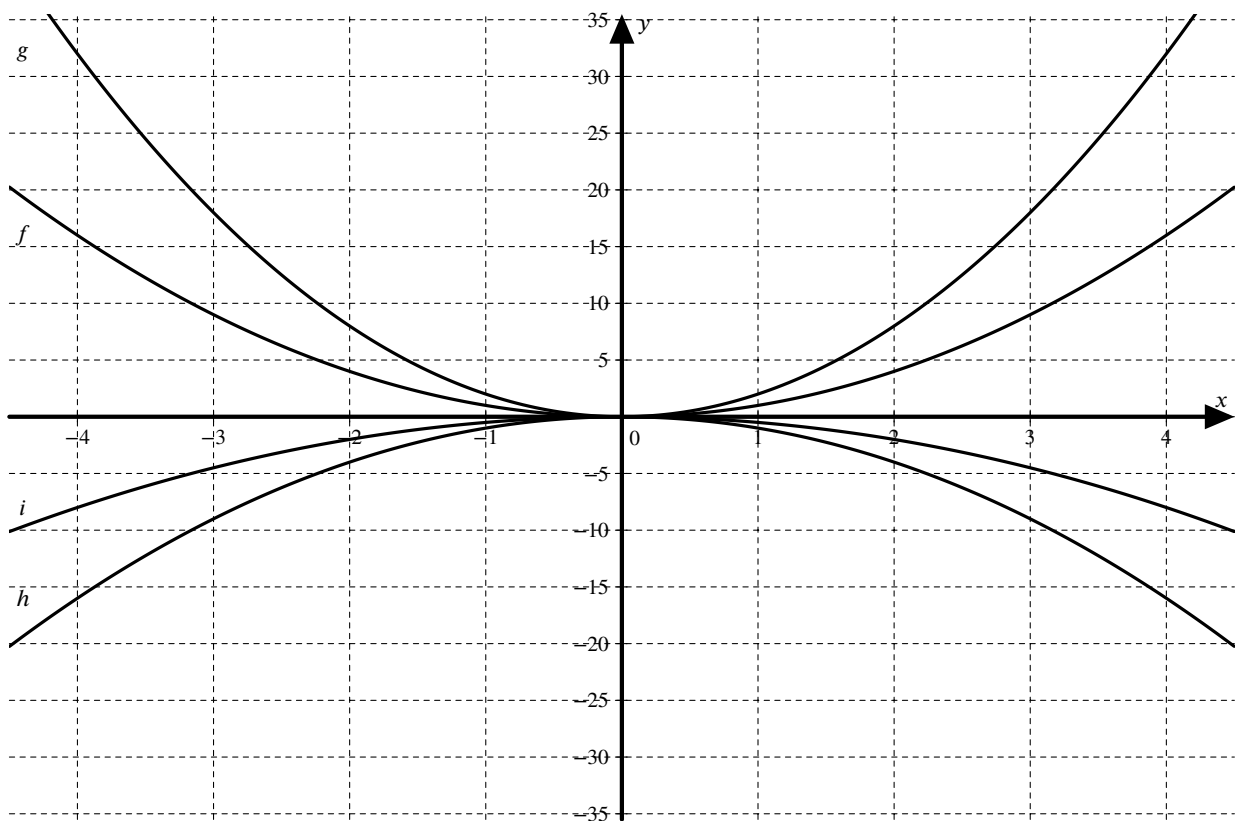
f) 0

4.2	a) $4x + 4$	d) $4x^2 - 23x + 15$	g) $2a^2 - a + 2$
	b) $10x - 80$	e) $-10x^2 + 90x - 140$	h) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
	c) $x^6 - 2x^3 - 35$	f) $-2u^2 - 9u - 12$	i) $4z^{10} + 4z^5 + 1$
4.3	a) $16x^2 - 39x + 35$	b) $-6x^4 - 17x^3 - 4x$	c) $-15x^6$
	a) $P(x) + Q(x) = 3x + 3$ $P(x) - Q(x) = x + 5$ $P(x) \cdot Q(x) = 2x^2 + 2x - 4$	b) $P(x) + Q(x) = 2x^2 + x - 5$ $P(x) - Q(x) = 2x^2 - x - 9$ $P(x) \cdot Q(x) = 2x^3 + 4x^2 - 7x - 14$	
4.5	a) $3x^2 - 9x + 3$	e) $8x^2(7x^2 - 3x + 10)$	i) $y(-x + 1)$
	b) $5x^2 + 10x$	f) $x(3x + 8)$	j) $y^2(y^3 - 1)$
	c) $-6x^5 + 9x^4 + 3x^3 + 6x^2$	g) $9x(4x - 3)$	k) $2a^4(a^6 - 4)$
4.6	d) $ax^2 - 4ax + a$	h) $8x^2(6x + 1)$	l) $\frac{1}{3}x(y^2 + 2y + 5)$
			m) $2x^2(x^4 + 2x^2 + 3)$
4.7	a) $2(x^2 - 3x + 5)$	c) $3(x^2 - 8x + 2)$	e) $-10(x^2 + \frac{1}{2}x - 2)$
	b) $-(x^2 + 2x - 5)$	d) $3(x^2 + 7x + \frac{20}{3})$	f) $\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 4)$
			g) $\frac{1}{12}(x^2 - 33x - 60)$
4.8	a) $x^2 + 4x + 4$	d) $9a^2 - 6ab^2 + b^4$	g) $(x - 10)^2$
	b) $4x^2 - 12x + 9$	e) $(x + 5)^2$	h) $(x + \frac{1}{2})^2$
	c) $a^2 + 2ab + b^2$	f) $(10x - 1)^2$	i) $(x + 14y)^2$
4.9	a) $x^2 - 4$	d) $a^2 - 2$	g) $(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$
	b) $9x^2 - y^6$	e) $(x + 5)(x - 5)$	h) $(x + \frac{3}{7})(x - \frac{3}{7})$
	c) $9 - x^2$	f) $(10x + 13)(10x - 13)$	i) $(2x + 15y)(2x - 15y)$
4.10	a) $x^2 + 8x + 16$	d) $9x^2 - 24x + 16$	g) $x^2y^2 + 2xyz^3 + z^6$
	b) $x^2 - 22x + 121$	e) $9y^2 - x^2$	h) $64 - x^2$
	c) $x^2 - 12x + 36$	f) $x^{14} - 2x^7 + 1$	i) $64x^2 - 80x + 25$
4.11	a) $(x + 3)(x - 3)$	c) $6(x + 1)(x - 1)$	e) $8(x - 7)^2$
	b) $(x + 1)^2$	d) $(2x - 9)^2$	f) $(4x + 3)^2$
4.12	a) $5(x - 1)^2$	d) $-2(2y + 1)^2$	g) $5(2x + 3)(2x - 3)$
	b) $-3(x - 3)^2$	e) $5(x + 1)(x - 1)$	h) $(x - 1)(x + 3)$
	c) $-(a - b)^2$	f) $x(x - 2)(x + 2)$	i) $(1 + x^2)^2$
4.13	a) $x^2 + 5x + 6$	c) $x^2 - x - 6$	e) $x^2 - 7x + 6$
	b) $x^2 + x - 6$	d) $x^2 - 5x + 6$	f) $x^2 + 5x - 6$
			g) $x^2 + x - 110$
	a) $x^2 - 2x - 15$	d) $x^2 - 9x + 20$	g) $x^2 - 6x + 5$
	b) $x^2 + 3x - 10$	e) $x^2 + x - 12$	h) $x^2 + 6x + 5$
	c) $x^2 - x - 6$	f) $x^2 + 4x - 5$	i) $x^2 - 4x - 5$

4.14	a) $(x-4)(x-2)$	d) $(x-6)(x-2)$	g) $(x-12)(x+11)$	j) $(z+10)(z-9)$
	b) $(x-4)(x+3)$	e) $(x-2)(x-3)$	h) $(x+6)(x+4)$	k) $(z-10)(z+9)$
	c) $(y-6)(y-1)$	f) $(y+3)(y+4)$	i) $(x-12)(x+2)$	l) $(z-45)(z+2)$
4.15	a) $\frac{1}{2}(x-4)(x-2)$	e) $(x-2)(x-4)$	i) $15(x+10)(x-10)$	m) $10(3x+1)^2$
	b) $3(2a+3)^2$	f) $(3x+200)^2$	j) $x(3x+1)(3x-1)$	n) $-(x-4)(x-9)$
	c) $-(x+2)(x-8)$	g) $x(x-4)^2$	k) $2(2x-1)^2$	o) $\frac{1}{10}(x+12)(x-12)$
	d) $2(2t-5)(2t+5)$	h) $2(x+1)(x+16)$	l) $-4(2a-3)^2$	
4.16	a) $(2x+3)(x+5)$	d) $(2x+7)(x-4)$	g) $(17x-1)(x+17)$	
	b) $(9x-1)(x+1)$	e) $(3x-1)(x+1)$	h) $2(2x-7)(x+4)$	
	c) $(5y+6)(y-12)$	f) $(4t-1)(t+2)$	i) $(3x+7)(x-5)$	
4.17	a) $(x-3)(x-5)$	b) $(x+7)(x-2)$	c) $(2x-7)(x+5)$	d) $(3x+2)(x-5)$
4.18	a) $\mathcal{S} = \left\{-1; 1\right\}$	d) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$	g) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$	j) $\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right\}$
	b) $\mathcal{S} = \left\{-10\right\}$	e) $\mathcal{S} = \left\{7\right\}$	h) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{9}; \frac{1}{9}\right\}$	k) $\mathcal{S} = \left\{-4; 9\right\}$
	c) $\mathcal{S} = \left\{\frac{9}{4}\right\}$	f) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{7}\right\}$	i) $\mathcal{S} = \left\{-2\right\}$	l) $\mathcal{S} = \left\{-6; 3\right\}$
4.19	a) $\mathcal{S} = \left\{-4; -8\right\}$	d) $\mathcal{S} = \left\{-6; -5\right\}$	g) $\mathcal{S} = \left\{-15; -3\right\}$	
	b) $\mathcal{S} = \left\{-6; -1\right\}$	e) $\mathcal{S} = \left\{10; 1\right\}$	h) $\mathcal{S} = \left\{-4; 8\right\}$	
	c) $\mathcal{S} = \left\{1; 9\right\}$	f) $\mathcal{S} = \left\{-9; 2\right\}$	i) $\mathcal{S} = \left\{1; \frac{1}{3}\right\}$	
4.20	a) $\mathcal{S} = \left\{2; -\frac{3}{2}\right\}$	d) $\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{15}; \sqrt{15}\right\}$	g) $\mathcal{S} = \emptyset$	
	b) $\mathcal{S} = \left\{4; 1\right\}$	e) $\mathcal{S} = \left\{-4\right\}$	h) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{6}; 0\right\}$	
	c) $\mathcal{S} = \left\{0; \frac{5}{2}\right\}$	f) $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{5}; -3\right\}$	i) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$	
4.21	a) $\mathcal{S} = \left\{\frac{-5-\sqrt{17}}{2}; \frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right\}$	c) $\mathcal{S} = \left\{1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\right\}$		
	b) $\mathcal{S} = \left\{-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}\right\}$	d) $\mathcal{S} = \emptyset$		
4.22	a) $\mathcal{S} = \left\{-3; -\frac{1}{3}\right\}$	c) $\mathcal{S} = \left\{-2; -\frac{1}{5}\right\}$	e) $\mathcal{S} = \left\{-1; \frac{8}{3}\right\}$	g) $\mathcal{S} = \left\{-13; 14\right\}$
	b) $\mathcal{S} = \left\{-5; -2\right\}$	d) $\mathcal{S} = \left\{-10\right\}$	f) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{7}{2}; \frac{5}{4}\right\}$	h) $\mathcal{S} = \left\{1; 3\right\}$
4.23	a) $(x-1)(3x-2)$	c) $(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})$		
	b) $(2x-5)^2$	d) non factorisable ($\Delta < 0$)		
4.24	a) $(3x+1)(2x-1)$	c) $(10x-3)(2x-7)$	e) $(3x+2)^2$	
	b) $(5x-3)(x+4)$	d) $(x+9)(4x-3)$	f) $(7x-2)(x-1)$	

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$g(x) = 2x^2$	32	18	8	2	0	2	8	18	32
$h(x) = -x^2$	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16
$i(x) = -\frac{1}{2}x^2$	-8	-4,5	-2	-0,5	0	-0,5	-2	-4,5	-8

4.25

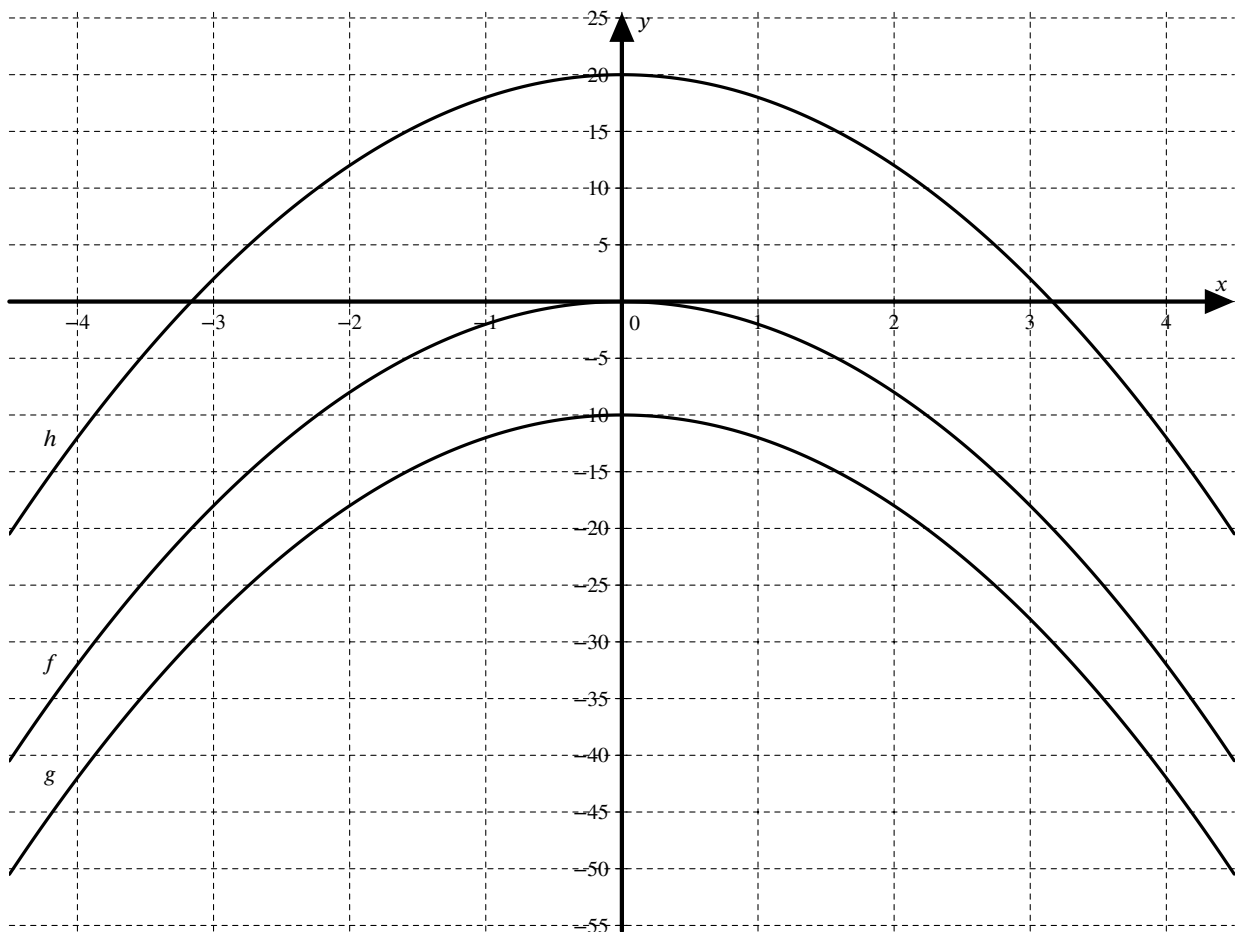


Que peut-on observer de particulier ?

- Leur expression est de la forme ax^2 . Les coefficients b et c sont nuls.
- Toutes ces paraboles passent par l'origine.
- Elles sont symétriques par rapport à l'axe Oy .
- Si $a > 0$, la parabole "sourit". si $a < 0$, la parabole "est triste".
- Faire varier le a change la courbure de la parabole.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = -2x^2$	-32	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	-32
$g(x) = -2x^2 - 10$	-42	-28	-18	-12	-10	-12	-18	-28	-42
$h(x) = -2x^2 + 20$	-12	2	12	18	20	18	12	2	-12

4.26



Que peut-on observer de particulier ?

- $a = -2$ pour toutes les paraboles. Elles sont toutes "tristes". Elles ont la même courbure.
- Leur expression est de la forme $-2x^2 + c$. Le coefficient b est nul.
- Elles sont symétriques par rapport à l'axe Oy .
- Faire varier c translate verticalement la courbe.
- c est l'ordonnée à l'origine de la parabole.

4.27

a) La parabole est convexe.

$Z_1(-3; 0)$, $Z_2(3; 0)$ et $H(0; -9)$

b) La parabole est concave.

$Z(1; 0)$ et $H(0; -1)$

c) La parabole est concave.

$Z_1(-1; 0)$, $Z_2\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ et $H(0; 5)$

d) La parabole "est triste".

$Z_1(1; 0)$, $Z_2(2; 0)$ et $H(0; -2)$

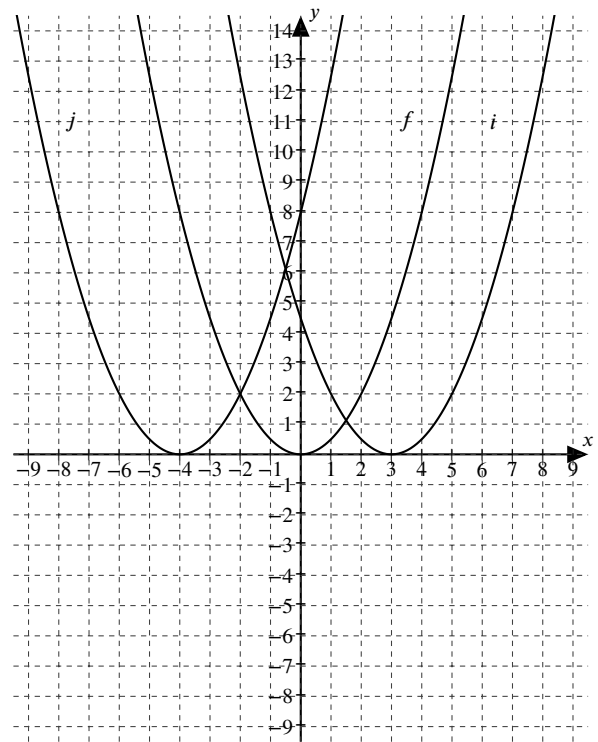
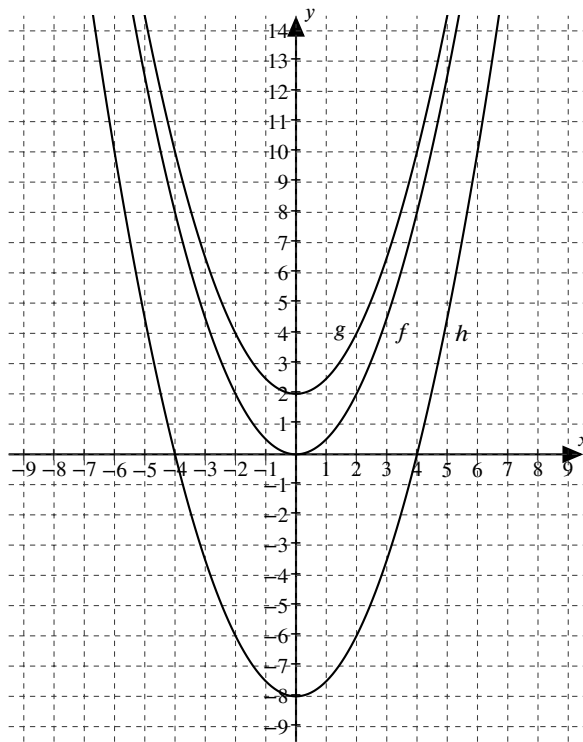
e) La parabole est convexe.

$Z_1(0; 0)$, $Z_2\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ et $H(0; 2)$

f) La parabole est concave.

$Z_1(1; 0)$, $Z_2\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ et $H(0; -4)$

4.28



4.29

- a) $H(0; 11)$
 $MIN(-6; -25)$
 $Z_1(-11; 0)$
 $Z_2(-1; 0)$

- b) $H(0; 0)$
 $MIN(-2; -4)$
 $Z_1(-4; 0)$
 $Z_2(0; 0) = H$

- c) $H(0; 1)$

$$MIN\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

$$\Delta = -3,$$

pas de zéro

- d) $H(0; 2)$

$$MIN\left(\frac{1}{4}; \frac{15}{8}\right)$$

$$\Delta = -15,$$

pas de zéro

- e) $H(0; 3)$

$$MIN(3; -0) = Z_1 =$$

$$Z_2$$

- f) $H\left(0; -\frac{5}{4}\right)$

$$MIN\left(2; -\frac{9}{4}\right)$$

$$Z_1(-1; 0)$$

$$Z_2(5; 0)$$

- g) $H(0; 20)$

$$MAX(4; 36)$$

$$Z_1(-2; 0)$$

$$Z_2(10; 0)$$

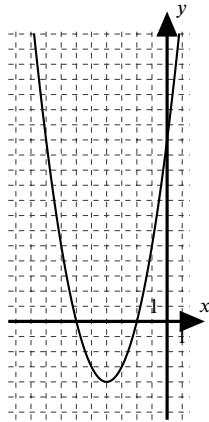
- h) $H(0; -5)$

$$MIN(0; -5)$$

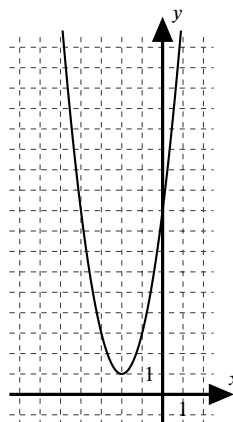
$$Z_1(-\sqrt{5}; 0)$$

$$Z_2(\sqrt{5}; 0)$$

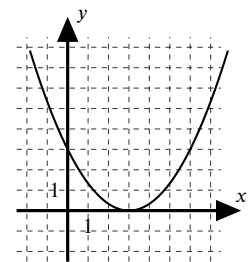
- a) O. à l'o. : 12
Zéros : -6 et -2
Sommet : $S(-4; -4)$
Orientation : convexe



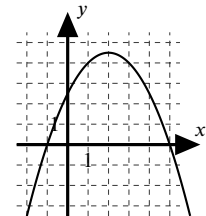
- c) O. à l'o. : 9
Zéros : aucun
Sommet : $S(-2; 1)$
Orientation : convexe



- e) O. à l'o. : 3
Zéros : 3
Sommet : $S(3; 0)$
Orientation : convexe

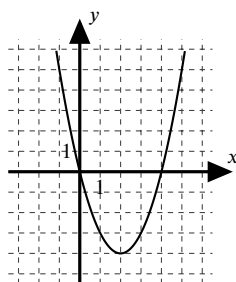


- f) O. à l'o. : $\frac{5}{2}$
Zéros : -1 et 5
Sommet : $S(2; \frac{9}{2})$
Orientation : concave

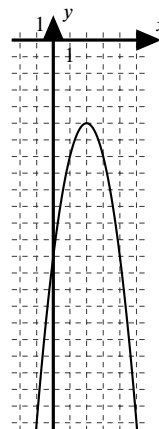


4.30

- b) O. à l'o. : 0
Zéros : 0 et 4
Sommet : $S(2; -4)$
Orientation : convexe



- d) O. à l'o. : -13
Zéros : aucun
Sommet : $S(2; -5)$
Orientation : concave



4.31

- a) $Z_1(-4; 0)$, $Z_2(2; 0)$, $MIN(-1; -9)$, $H(0; -8)$
b) $Z_1 = Z_2 = MIN(-1; 0)$, $H(0; 1)$
c) $Z_1 = Z_2 = MAX(-1; 0)$, $H(0; -1)$
d) $Z_1 = Z_2 = MIN(1; 0)$, $H(0; 1)$

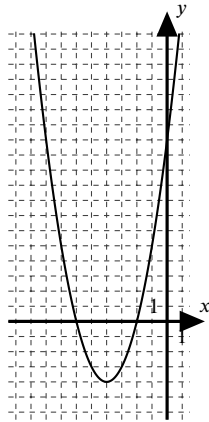
- e) $Z_1(1; 0)$, $Z_2(5; 0)$, $MAX(3; 8)$, $H(0; -10)$
f) $Z_1(-1; 0)$, $Z_2(-5; 0)$, $MIN(-3; -8)$, $H(0; 10)$
g) $Z_1(-3; 0)$, $Z_2(4; 0)$, $MAX(\frac{1}{2}; \frac{147}{4})$, $H(0; 36)$
h) $Z_1 = Z_2 = MAX = H(0; 0)$

4.32 a) $S(24; -576)$ b) $Z_1(6; 0)$ et $Z_2(-14; 0)$ c) $y = 3x^2$ d) $S(-6; 12)$

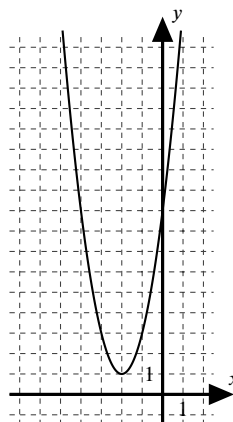
4.33 a) Pas de zéro

b) $S(6; -4)$ c) $y = \frac{1}{2}(x + 6)^2$ d) $Z_1(2; 0)$ et $Z_2(-14; 0)$

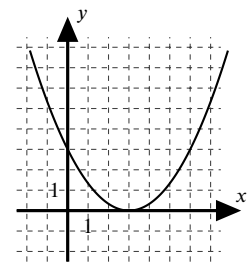
- a) O. à l'o. : 12
Zéros : -6 et -2
Sommet : $S(-4; -4)$
Orientation : convexe



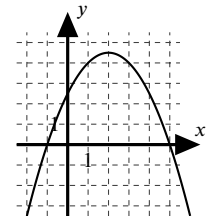
- c) O. à l'o. : 9
Zéros : aucun
Sommet : $S(-2; 1)$
Orientation : convexe



- e) O. à l'o. : 3
Zéros : 3
Sommet : $S(3; 0)$
Orientation : convexe

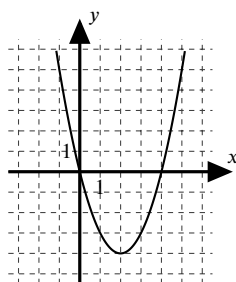


- f) O. à l'o. : $\frac{5}{2}$
Zéros : -1 et 5
Sommet : $S(2; \frac{9}{2})$
Orientation : concave

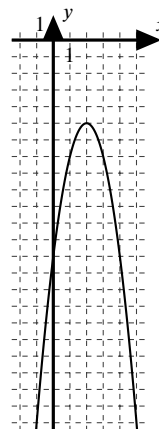


4.34

- b) O. à l'o. : 0
Zéros : 0 et 4
Sommet : $S(2; -4)$
Orientation : convexe



- d) O. à l'o. : -13
Zéros : aucun
Sommet : $S(2; -5)$
Orientation : concave



4.35 a) $\frac{1}{4}(x+2)(x-4)$ b) $-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$ c) $\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$ d) $(x+1)^2$

4.36 a) $(3; -2)$ et $(-2; 18)$ b) $(1; 8)$ et $(\frac{2}{3}; 7)$ c) Aucun

4.37 a) $(3; 9)$ et $(5; 33)$ b) $(6; -6)$ c) $(3; 12)$ et $(-2; 2)$

4.38 $240 = 4x^2 + 112x$ La largeur du trottoir est de 2 m.

4.39 $320(x+5)^2 = 500x^2$ Les dimensions des premières dalles sont 20 cm x 20 cm.

4.40 $330(4-t) = 4,9t^2$ $h = 70,27\text{m}$

4.41 $P(x) = x(35 - x)$ La valeur maximale du produit est 306,25.

4.42 $P(x) = x(x + 12)$ La valeur minimale du produit est -36.

4.43 $A(y) = y\left(250 - \frac{3}{4}y\right)$ Le champ mesure 125 m sur environ 166,7 m.

4.44 $A(x) = 27x - 2x^2$ $x = \frac{27}{4}$ 6,75 cm de chaque côté.

a) Si $30 \leq x \leq 90$ $P(x) = 60 - 0,5(x - 30) = 75 - 0,5x$

4.45 b) $R(x) = 75x - 0,5x^2$ Pour 75 participants.

10.5 Réponses - Systèmes d'équations

5.1 a) $\mathcal{S} = \{(2; 3)\}$ b) $\mathcal{S} = \{(-1; -9)\}$ c) $\mathcal{S} = \{(-18; 21)\}$

5.2 a) $\mathcal{S} = \{(7; 12)\}$ b) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{76}{53}; \frac{28}{53}\right)\right\}$ c) $\mathcal{S} = \{(-6; 3)\}$

5.3 a) $\mathcal{S} = \{(1; -1)\}$ c) $\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{5}{12}; -\frac{7}{6}\right)\right\}$ e) $\mathcal{S} = \{(1; 0)\}$
 b) $\mathcal{S} = \{(-3; 3)\}$ d) $\mathcal{S} = \{(3; -1)\}$ f) $\mathcal{S} = \{(4; -1)\}$

5.4 a) $\mathcal{S} = \{(x; y) \mid x + 2y = 5\} = \{(5 - 2y; y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ c) $\mathcal{S} = \{(x; y) \mid 2x - 3y = 5\} = \left\{\left(x; \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$
 b) $\mathcal{S} = \emptyset$

5.5 a) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{6}; -\frac{21}{2}\right)\right\}$ c) $\mathcal{S} = \{(x; y) \mid x + y = -2\} = \{(x; -x - 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
 b) $\mathcal{S} = \emptyset$

5.6 a) $\mathcal{S} = \emptyset$ b) $\mathcal{S} = \{(3; 2)\}$ c) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{7}{12}; \frac{4}{9}\right)\right\}$

5.7 Il y a 35 poules et 15 lapins.

5.8 Pinocchio a dit 7 mensonges.

5.9 Le prix du kilomètre parcouru est de CHF 3,40 et la prise en charge de CHF 6,-.

5.10 Jean doit prévoir CHF 105,60. La redevance fixe est de CHF 40,- et la taxe variable de CHF 0,80/1'000 l.

5.11 Il y a 5,4 kg de couleur A et 6,6 kg de B.

5.12 Les solutions contiennent respectivement 15% et 10% de sel.

5.13 Les capitaux ont une valeur de CHF 100'000,- et CHF 10'000,-.

5.14

a) $\mathcal{S} = \{(24; 3); (-24; -3)\}$	d) $\mathcal{S} = \{(11; 5)\}$	g) $\mathcal{S} = \{(-2; 2); (-\frac{31}{2}; 11)\}$
b) $\mathcal{S} = \{(13; 8); (-\frac{19}{3}; -\frac{34}{3})\}$	e) $\mathcal{S} = \{(9; 2); (-5; 16)\}$	h) $\mathcal{S} = \{(2; -5); (-5; 2)\}$
c) $\mathcal{S} = \{(3; 10); (17; -4)\}$	f) $\mathcal{S} = \{(3; 2); (-1; -4)\}$	i) $\mathcal{S} = \{(4; -1); (1; -4)\}$

5.15

a) $\mathcal{S} = \{(-10; -5); (-10; 5); (10; -5); (10; 5)\}$	c) $\mathcal{S} = \{(1; 1); (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})\}$
b) $\mathcal{S} = \{(-2; -1); (-2; 11); (4; 5 - \sqrt{39}); (4; 5 + \sqrt{39})\}$	

5.16

a) $\mathcal{S} = \{(2; 3; 14)\}$	c) $\mathcal{S} = \{(20; -10; 0)\}$	e) $\mathcal{S} = \{(-4; -6; 1)\}$
b) $\mathcal{S} = \{(6; -10; 1)\}$	d) $\mathcal{S} = \{(2; -4; 3)\}$	f) $\mathcal{S} = \{(0; 7; 0)\}$

5.17

a) $\mathcal{S} = \{(\frac{1}{2}; 2; -\frac{1}{3})\}$	c) $\mathcal{S} = \{(5; 1; -\frac{4}{3})\}$	e) $\mathcal{S} = \{(\frac{1}{3}; 0; 8)\}$
b) $\mathcal{S} = \{(\frac{4}{5}; -3; \frac{3}{2})\}$	d) $\mathcal{S} = \{(1; 6; 10)\}$	f) $\mathcal{S} = \{(5; 10; 15)\}$

5.18

a) $\mathcal{S} = \{(5; 1; -5)\}$	b) $\mathcal{S} = \{(3; 0; -2)\}$	c) $\mathcal{S} = \{(-2; -3; 4)\}$
-----------------------------------	-----------------------------------	------------------------------------

5.19 Prix par hectolitre : 140 Frs pour le froment, 90 Frs pour le seigle et 50 Frs pour l'avoine.

5.20 220 montées, 60 descentes, 460 allers-retours

5.21 blanc : 250 g, brun : 500 g et noir : 50 g

5.22 25 cm x 15 cm x 15 cm

5.23 248

5.24

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$	c) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$
b) $y = x^2 + 3x$	d) pas de parabole / une droite : $y = -2x + 5$

5.25 a) $y = x^2 - 4x + 7$

b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{11}{2}$

10.6 Réponses - Degrés 3 et plus

6.1 a) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$ b) $\mathcal{S} = \{2\}$ c) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{4}; 1; 9\right\}$ d) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{4}; 1; 3; -3\right\}$

a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

d) $8x^3 - 27$

g) $27x^3 + 9x^2 + x + \frac{1}{27}$

6.2 b) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

e) $8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$

h) $x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 1$

c) $x^3 + 8$

f) $1000c^3 - 300c^2 + 30c - 1$

i) $x^{30}y^{12} + 3x^{20}y^8 + 3x^{10}y^4 + 1$

6.3 a) $(x-1)(x^2+x+1)$
b) $(4+5y)(16-20y+25y^2)$
c) $(x+1)^3$

d) $(x-5)^3$
e) $(2x+3)^3$
f) $(5x-1)(25x^2+5x+1)$

g) $(x-5)(x^2+5x+25)$
h) $(4x+3)(16x^2-12x+9)$
i) Ce n'est pas un prod. rem.

6.4 a) $25x^2 + 40x + 16$
b) $25x^4 + 40x^2 + 16$
c) $25x^6 + 40x^3 + 16$

d) $z^2 - 225$
e) $z^4 - 225$
f) $z^{20} - 225$

g) $x^2 + 19x - 66$
h) $x^4 + 19x^2 - 66$
i) $x^2y^2 + 19xy - 66$

a) $(x^2+25)(x-5)(x+5)$

f) $(x+1)(x-1)(x^2+9)$

b) $(x+2)(x-2)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$

g) $5(x+3)(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

6.5 c) $(x^2+11)(2x^2+1)$

h) $-x^3(7x^2+6)(x+1)(x-1)$

d) $(3x+2)^2(3x-2)^2$

i) $\frac{1}{3}(x^2+9)(x-3)(x+3)$

e) $(z+3)(z-3)(z^2+1)$

6.6 a) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

c) $\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right\}$

e) $\mathcal{S} = \{0; -3\}$

b) $\mathcal{S} = \{-1\}$

d) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; -1\right\}$

f) $\mathcal{S} = \{-1; 1; -3; 3\}$

a) $(x+5)(x^2+3)$

f) $(2w+3)(w-5)(w^2+5w+25)$

b) $(x+6)(x+2)(x-2)$

g) $-x^3(x+8)(2x+3)(4x^2-6x+9)$

6.7 c) $(5z-8)(z-1)(z+1)$

h) $\frac{1}{11}(x+2)(x+11)(x-11)$

d) $(x+8)(x+1)(x^2-x+1)$

e) $(x+1)(x+2)(x^2-2x+4)$

i) $10y^2(3y-2)(2y-1)(2y+1)$

a) $\mathcal{S} = \{0; 2\}$

d) $\mathcal{S} = \{0; 2\}$

g) $\mathcal{S} = \{2-\sqrt{2}; 0; 2+\sqrt{2}\}$

6.8 b) $\mathcal{S} = \{-2; 2; 3\}$

e) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{3}; 0; 5\right\}$

h) $\mathcal{S} = \emptyset$

c) $\mathcal{S} = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$

f) $\mathcal{S} = \{-1; 0; 1; 9\}$

i) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

6.9 $P(n) = n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

Parmi les trois facteurs, il y a au moins un multiple de 2 et un multiple de 3.

6.10 $z = -x - y$ $x^3 + x^3 + z^3 = x^3 + y^3 + (-x - y)^3 = -3x^2y - 3xy^2 = 3xy(-x - y) = 3xyz$

6.11 a) $P(x) = (2x^2 + x + 3)(x + 1) + 2$

b) $P(x) = (4x^2 - 8x + 23)(x^2 + 2x - 3) + (-63x + 77)$

6.12 a) $(x^2 - 3x + 1)(x - 5)$

c) $(5x^2 + 3x + 5)(x^2 - 1) + (3x + 4)$

b) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 7)(x^2 + 2x - 1) + (20x - 8)$

d) $(3x^3 + 7x^2 - 5x + 1)(2x^2 - 3x + 2) + (x + 3)$

6.13 a) $(x^2 - 5x + 6)(3x^2 + 8x + 4)$

c) $\left(-\frac{2}{3}\right)(3x^3 + x^2 - 1) + \left(\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{1}{3}\right)$

b) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{15}{8}\right)(2x - 3) + \frac{85}{8}$

6.14 $F(x) = (5x^2 - 3x + 1)(x^2 + 1) - x + 1 = 5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 2$

6.15 a) $(3x^3 - 2x^2 - 4x + 2)(x - 2) + 9$

c) $(3x^2 - 2x + 2)(x + 2) + 4$

b) $(x^2 - 3x + 1)(x - 5)$

d) $(x^3 + 3x^2 + x + 3)(x - 3) + 2$

6.16 $x^5 - 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) \Rightarrow \text{reste nul}$

6.17 $\lambda = -6$ ou $\lambda = 4$

$\lambda = 4 : x^3 - 2x^2 - 2x + 8$

$\lambda = -6 : x^3 + 8x^2 + 18x + 18$

6.18 $P(x) = x(x+1)(x-1)(x-4) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x$ ou un multiple de ce polynôme.

6.19 $P(x) = -\frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x$

6.20 $P(x) = 3x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 12x$

6.21 a) $(x-3)(x+5)(x^2 + x + 1)$

c) $(2x+1)(x-2)(x+3)$

b) $(3x-1)(x-1)(x+2)$

d) $(x+2)^2(x-2)(x+1)(x-1)^2$

6.22 a) $\mathcal{S} = \{-4; -3; 4\}$

c) $\mathcal{S} = \{-4; 3\}$

e) $\mathcal{S} = \{-3; 2\}$

b) $\mathcal{S} = \{1; 3; 5\}$

d) $\mathcal{S} = \{2; 3; 4\}$

f) $\mathcal{S} = \{-1; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{7}\}$

$x = 5$ et $x = 10 \pm \sqrt{50}$.

6.23 On élimine la solution négative et celle qui dépasse la moitié de la largeur de la feuille.
Il ne reste donc que $x = 5$ cm.

6.24

a)

x		-2		3		4	
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-

b)

x		-2		3		4	
$g(x)$	-	0	-	0	+	0	-

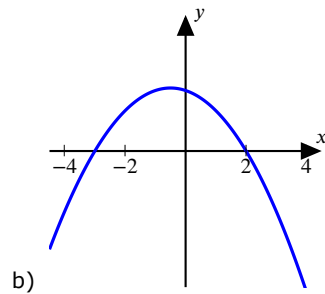
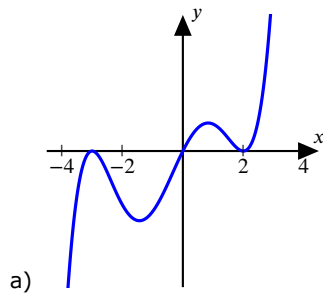
c)

x							
$h(x)$		$+$					

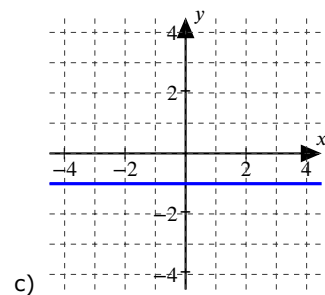
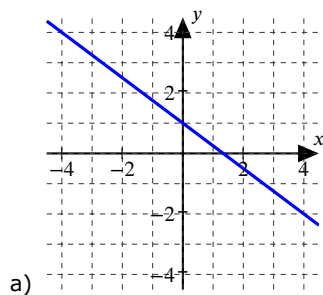
d)

x		-3		0		4	
$i(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$

6.25

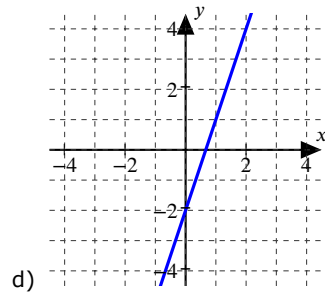
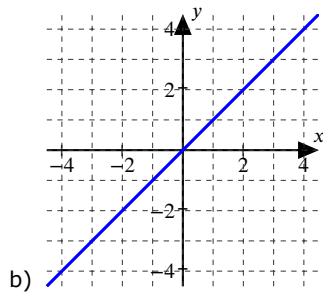


6.26



x		$\frac{4}{3}$	
$f(x)$	+	0	-

x	
$h(x)$	-



x		0	
$g(x)$	-	0	+

x		$\frac{2}{3}$	
$i(x)$	-	0	+

6.27

a)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>$7 - x$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		7		$7 - x$	+	0	-
x		7							
$7 - x$	+	0	-						
b)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>$\frac{7}{4}$</td><td></td></tr><tr><td>$4x - 7$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x		$\frac{7}{4}$		$4x - 7$	-	0	+
x		$\frac{7}{4}$							
$4x - 7$	-	0	+						
c)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>$-\frac{1}{3}x + 2$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		6		$-\frac{1}{3}x + 2$	+	0	-
x		6							
$-\frac{1}{3}x + 2$	+	0	-						

d)

x		0	
$\frac{4}{5}x$	-	0	+

e)

x			
13		+	

f)

x		6	
$-6 + x$	-	0	+

6.28 Par exemple $f(x) = 4 - x$ ou $f(x) = 8 - 2x$ ou $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ ou ...

6.29

a)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>$-\frac{3}{2}$</td><td></td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>$3(5-x)(2x+3)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		$-\frac{3}{2}$		5		$3(5-x)(2x+3)$	-	0	+	0	-
x		$-\frac{3}{2}$		5									
$3(5-x)(2x+3)$	-	0	+	0	-								

b)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$\frac{5}{4}$</td><td></td></tr><tr><td>$3x(-5+4x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x		0		$\frac{5}{4}$		$3x(-5+4x)$	+	0	-	0	+
	x		0		$\frac{5}{4}$								
$3x(-5+4x)$	+	0	-	0	+								

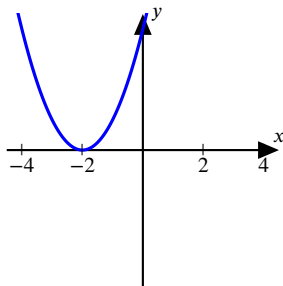
c)

x		-4		6	
$-4(x+4)(x-6)$	$-$	0	$+$	0	$-$

d)

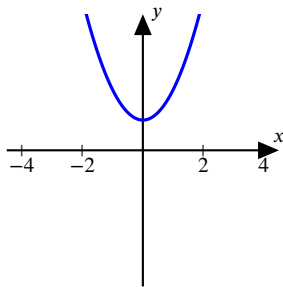
x		$-\frac{1}{7}$		0	
$-4x(7x+1)$	-	0	+	0	-

a)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>-2</td><td></td></tr><tr><td>$(x+2)^2$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table>	x		-2		$(x+2)^2$	$+$	0	$+$
x		-2							
$(x+2)^2$	$+$	0	$+$						

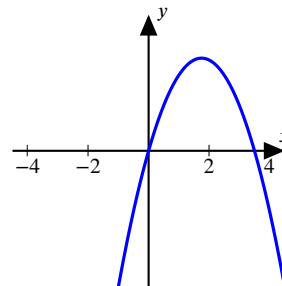


6.30

b)	<table><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>$x^2 + 2$</td><td>+</td></tr></table>	x		$x^2 + 2$	+
	x				
$x^2 + 2$	+				

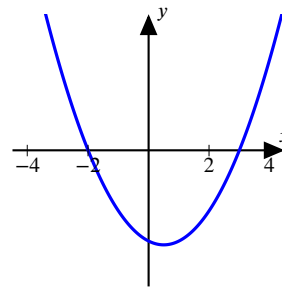


c)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$\frac{7}{2}$</td><td></td></tr><tr><td>$-2x^2 + 7x$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		0		$\frac{7}{2}$		$-2x^2 + 7x$	-	0	+	0	-
	x		0		$\frac{7}{2}$								
$-2x^2 + 7x$	-	0	+	0	-								



d)

x		-2		3	
$x^2 - x - 6$	$+$	0	$-$	0	$+$



6.31

a)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>-11</td><td></td><td>-5</td><td></td></tr><tr><td>$-x^2 - 16x - 55$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		-11		-5		$-x^2 - 16x - 55$	-	0	+	0	-
x		-11		-5									
$-x^2 - 16x - 55$	-	0	+	0	-								

b)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>$\frac{1}{13}$</td><td></td></tr><tr><td>$13x^2 + 12x - 1$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x		-1		$\frac{1}{13}$		$13x^2 + 12x - 1$	+	0	-	0	+
	x		-1		$\frac{1}{13}$								
$13x^2 + 12x - 1$	+	0	-	0	+								

c)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>$-\frac{3}{2}$</td><td></td></tr><tr><td>$4x^2 + 12x + 9$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x		$-\frac{3}{2}$		$4x^2 + 12x + 9$	+	0	+
	x		$-\frac{3}{2}$						
$4x^2 + 12x + 9$	+	0	+						

d)

x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
$-5+x^2$	+	0	-	0	+

e)	<table><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>$x^2 + x + 9$</td><td>+</td></tr></table>	x		$x^2 + x + 9$	+
	x				
$x^2 + x + 9$	+				

f)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$\frac{2}{9}$</td><td></td></tr><tr><td>$-9x^2 + 2x$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		0		$\frac{2}{9}$		$-9x^2 + 2x$	-	0	+	0	-
	x		0		$\frac{2}{9}$								
$-9x^2 + 2x$	-	0	+	0	-								

g)	<table><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>$-x^2 - 9$</td><td>-</td></tr></table>	x		$-x^2 - 9$	-
	x				
$-x^2 - 9$	-				

h)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>$-5x^2$</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		0		$-5x^2$	-	0	-
	x		0						
$-5x^2$	-	0	-						

6.32

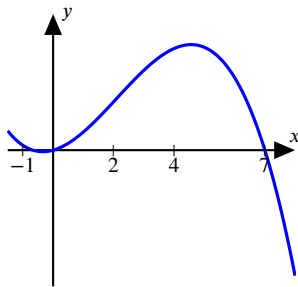
a)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>$-\sqrt{5}$</td><td></td><td>$\sqrt{5}$</td><td></td></tr><tr><td>$(5-x^2)(2x^2+3)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$(5-x^2)(2x^2+3)$	-	0	+	0	-
	x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$								
$(5-x^2)(2x^2+3)$	-	0	+	0	-								

b)	<table><tr><td>x</td><td></td><td>-3</td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>$(x+3)(x^2+x-6)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table>	x		-3		2		$(x+3)(x^2+x-6)$	$-$	0	$-$	0	$+$
	x		-3		2								
$(x+3)(x^2+x-6)$	$-$	0	$-$	0	$+$								

6.33

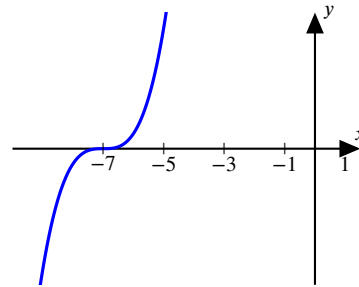
a)

x		$-\frac{2}{3}$		0		7	
$5x(3x+2)(7-x)$	+	0	-	0	+	0	-



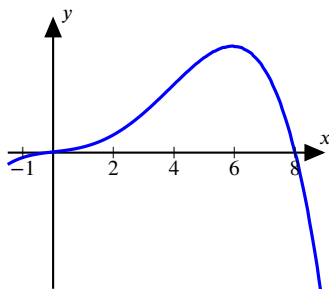
c)

x		-7		
$(x+7)^3$	-	0	+	



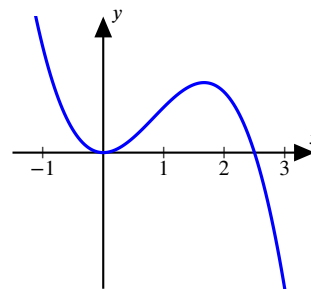
b)

x		$-\frac{1}{5}$		8	
$-4(x-8)(5x+1)(x^2+2)$	-	0	+	0	-



d)

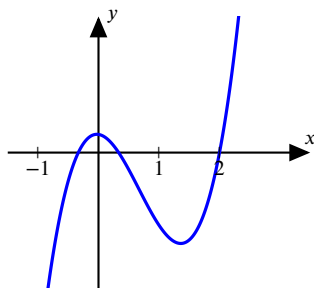
x		0		$\frac{5}{2}$	
$x^2(-2x+5)$	+	0	+	0	-



6.34

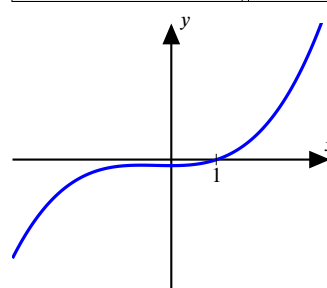
a)

x		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		2	
$(3x+1)(3x-1)(x-2)$	-	0	+	0	-	0	+



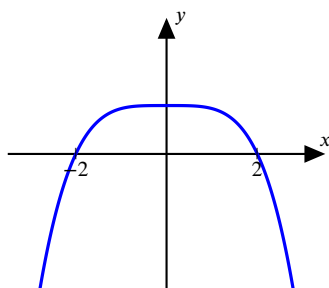
c)

x		1		
$(x-1)(x^2+2x+2)$	-	0	+	



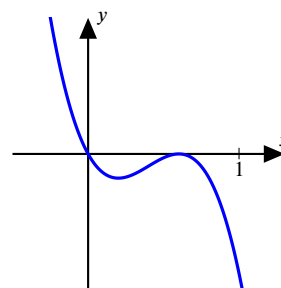
b)

x		-2		2	
$(2+x)(2-x)(4+x^2)$	-	0	+	0	-



d)

x		0		$\frac{3}{5}$	
$-x(5x-3)^2$	+	0	-	0	-



6.35

a)

x		5	
$(5-x)^3$	+	0	-

c)

x		0		2	
$x^3(x-2)^2$	-	0	+	0	+

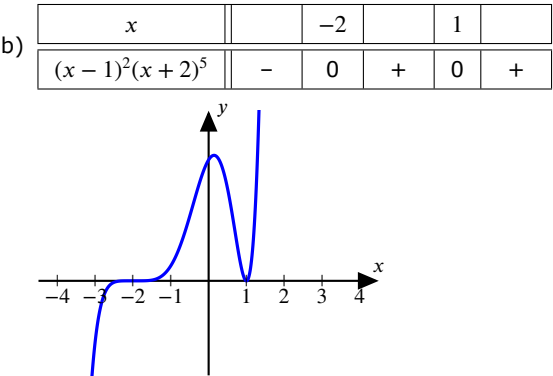
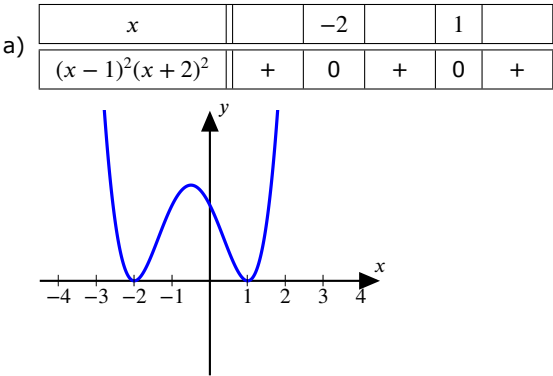
b)

x		$-\frac{7}{3}$	
$(3x+7)^4$	+	0	+

d)

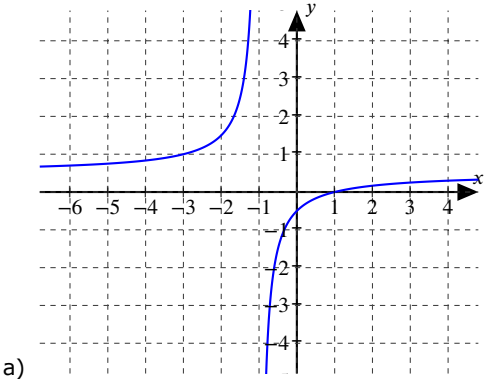
x		-4		0		6	
$-3x(x+4)^4(6-x)^2$	+	0	+	0	-	0	-

6.36



10.7 Réponses - Fonctions rationnelles

7.1



- a) $f(-3) = 1$ $f(-1,5) = 2,5$ $f(-1)$ non défini $f(0) = -0,5$ $f(1) = 0$ $f(3) = 0,25$
- b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- c) $f(-0,999) = -999,5$ et $f(-1,001) = 1000,5$
- d) La fonction n'est pas définie lorsque $x = -1$. Il y a un saut de $+\infty$ à $-\infty$. C'est une asymptote verticale.

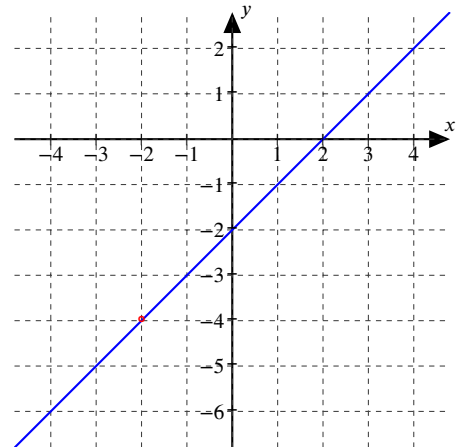
e)

		-1		1	
$f(x)$	+		-	0	+

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-6	-5	-	-3	-2	-1	0	1	2



7.2

c) $f(-1,999) = -3,999$ et $f(-2,001) = -4,001$

d) La fonction n'est pas définie lorsque $x = -2$. Elle s'approche de -4 sans l'atteindre. Il y a un trou $(-2; -4)$.

e) $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2}$. Si on simplifie cette fraction, il reste $x-2$.

f) Il est identique au graphe de la fonction affine $g(x) = x - 2$, sauf pour $x = -2$.

g)

	-2	2
$f(x)$	-	- 0 +

7.3

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

d) $D_i = \mathbb{R}$

g) $D_l = \mathbb{R}^*$

b) $D_g = \mathbb{R}^* \setminus \left\{-\frac{4}{7}\right\}$

e) $D_j = \mathbb{R} \setminus \{9; -1\}$

h) $D_m = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; -\frac{4}{3}; -1\right\}$

c) $D_h = \mathbb{R}$

f) $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3; -4\}$

7.4

a) $\frac{28}{44}$

c) $\frac{7}{11}$

e) en amplifiant et en simplifiant

b) $\frac{28}{22} = \frac{14}{11}$

d) $\frac{14}{44} = \frac{7}{22}$

7.5

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{31}{2}$

d) $\frac{2}{9}$

e) $\frac{1}{7}$

f) $\frac{35}{4}$

7.6

a) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}$

b) $\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 3x}$

c) $\frac{-2x - 4}{-2x + 6}$

Avant : $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Avant : $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Avant : $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Après : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$

Après : $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

Après : $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

7.7

a) Par exemple, pour $x = 1$: $\frac{6}{7} \neq \frac{4}{5}$

b) Par exemple, pour $x = 10$: $\frac{5000}{6010} \neq \frac{5}{16}$ Il faut factoriser pour pouvoir simplifier.

7.8

a) $\frac{x-1}{x^3 + 3x^2 - 4x}$

b) $\frac{1}{x^2 - x + 1}$

Avant : $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0; 1\}$

Avant : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Après : $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0; 1\}$

Après : $D = \mathbb{R}$

7.9

a) $\frac{1}{5x}, D_f = \mathbb{R}^* \setminus \{2\}$

c) $\frac{x+1}{x-1}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$

e) $\frac{2(x+3)}{3x^4}, D_f = \mathbb{R}^* \setminus \{-3; 2\}$

b) $\frac{x-2}{x+2}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

d) $\frac{3(x+5)}{7(x^2+4)}, D_f = \mathbb{R}^*$

f) $-\frac{3x^4}{2}, D_f = \mathbb{R}^*$

7.10

a) $3x$
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$

c) $\frac{1}{(x-2)^2}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

e) $\frac{x^2 - 10x + 100}{(x-10)(x+10)}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{-10; 10\}$

b) $-1, D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

d) $\frac{(3x+1)(x-2)}{2x-5}, D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$

f) $\frac{x^2}{(x-3)^2}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

7.11

a) $\frac{2}{x-1}$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

c) $\frac{x}{(x+1)^2}$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

e) $\frac{x^2 - x + 1}{x-1}$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

b) $\frac{x+5}{x+2}$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

d) $\frac{2(x+2)^2}{x(x-2)}$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$

f) $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2}$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

7.12

a) $\frac{25x+8}{(2x-3)(x+5)}$

d) $\frac{x^2+13x}{(x+1)(x+2)(x-2)} = \frac{x(x+13)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$

b) $\frac{2x^2-200}{(x-2)(x+14)} = \frac{2(x+10)(x-10)}{(x-2)(x+14)}$

e) $\frac{3(x+10)}{(x+3)}$

c) $\frac{2x^2-8}{x(x-2)} = \frac{2(x+2)}{x}$

f) $\frac{4x+26}{(x+2)(x-7)} = \frac{2(2x+13)}{(x+2)(x-7)}$

7.13

a) $\frac{-2x^2-2x}{3(x+2)(x-2)} = \frac{-2x(x+1)}{3(x+2)(x-2)}$

d) $\frac{x^2-2x}{x^2(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

b) $\frac{x+7}{x(x-1)(x+7)} = \frac{1}{x(x-1)}$

e) $\frac{2}{(x-3)(x-2)}$

c) $\frac{x^2+7x+6}{(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{x+6}{(x-2)(x+2)}$

f) $\frac{-4}{x(x-1)(x-2)}$

7.14

a) $\frac{x^3+2x^2-25x-50}{(x+5)(x+2)(x-5)} = 1$

b) $\frac{5x+15}{(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{5}{(x+2)(x+4)}$

7.15

a) $D = \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$
 $\frac{3}{x(x+1)}$

b) $D = \mathbb{R}^* \setminus \{2\}$
 $\frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{2x}$

7.16

a) $\frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+3x+9)}$

c) $\frac{(x-1)(x-2)}{2(x+2)}$

b) $\frac{x}{7}$

d) $\frac{1}{2}$

7.17

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 2\}$
 $\frac{x+1}{2}$

c) $D = \mathbb{R}^* \setminus \{-3; 3; 1\}$
 $\frac{(x-1)^2}{2(x+3)(x-3)^2}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 0\}$
 $\frac{3}{x(x^2+x+1)}$

d) $D = \mathbb{R}^* \setminus \{-3; -1\}$
 $\frac{x(x-1)}{x+3}$

7.18

a) $x-1$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 2\}$

b) $\frac{1}{2x}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$

7.19

a) $\frac{1}{2x}$ $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; 0\right\}$	d) $\frac{x^2 + 9x + 10}{2(x+2)}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$	g) $\frac{2(x-5)}{3(x+2)(x-2)}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
b) $\frac{2x+7}{x-5}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$	e) $\frac{1}{x+1}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2; 4\}$	h) $\frac{(x+1)^2}{x+4}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; -1\}$
c) $\frac{2(x-5)}{3x(x+5)(x^2-2x+4)}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; -2; 0; 4; 5\}$	f) x $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; 0; 2\}$	i) $\frac{1-x}{x(x+1)}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$

7.20

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathcal{S} = \{1\}$	c) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ $\mathcal{S} = \{2\}$	e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ $\mathcal{S} = \emptyset$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$ $\mathcal{S} = \{-5\}$	d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ $\mathcal{S} = \{-3\}$	f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ $\mathcal{S} = \emptyset$

7.21

a) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{7}\right\}$ $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right\}$	d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$ $\mathcal{S} = \{2\}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{7}; 4\right\}$	e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathcal{S} = \{6\}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 0\}$ $\mathcal{S} = \{-3; 10\}$	f) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$ $\mathcal{S} = \left\{\frac{21 - \sqrt{73}}{23}; \frac{21 + \sqrt{73}}{23}\right\}$

7.22 6 enfants qui reçoivent CHF 12'000.– chacun et 8 petits-enfants qui reçoivent chacun CHF 9'000.–.

7.23 22 participants qui paieront CHF 660.– chacun.

7.24 14 poules à CHF 15.– chacune.

7.25

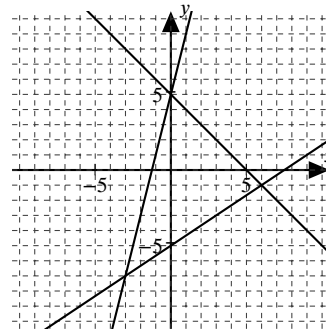
a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{6\}$	c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{11}{2}\right\}$																												
<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td></td> <td>-4</td> <td></td> <td>6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$\frac{x+4}{6-x}$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td> </td> <td>-</td> </tr> </table>	x		-4		6		$\frac{x+4}{6-x}$	-	0	+		-	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td></td> <td>1</td> <td></td> <td>11/2</td> <td></td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$\frac{-x^2+8x-7}{2x-11}$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td> </td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </table>	x		1		11/2		7		$\frac{-x^2+8x-7}{2x-11}$	+	0	-		+	0	-
x		-4		6																									
$\frac{x+4}{6-x}$	-	0	+		-																								
x		1		11/2		7																							
$\frac{-x^2+8x-7}{2x-11}$	+	0	-		+	0	-																						
b) $D_f = \mathbb{R}^*$	d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$																												
<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td></td> <td>-1</td> <td></td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$\frac{2(x+1)^3}{x^4}$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td> </td> <td>+</td> </tr> </table>	x		-1		0		$\frac{2(x+1)^3}{x^4}$	-	0	+		+	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td></td> <td>-3</td> <td></td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$\frac{x+3}{81-x^4}$</td> <td>+</td> <td> </td> <td>+</td> <td> </td> <td>-</td> </tr> </table>	x		-3		3		$\frac{x+3}{81-x^4}$	+		+		-				
x		-1		0																									
$\frac{2(x+1)^3}{x^4}$	-	0	+		+																								
x		-3		3																									
$\frac{x+3}{81-x^4}$	+		+		-																								

10.8 Réponses - Inéquations

a) $\mathcal{S} =]-\infty; 6]$

8.1 b) $\mathcal{S} = [-3; +\infty[$

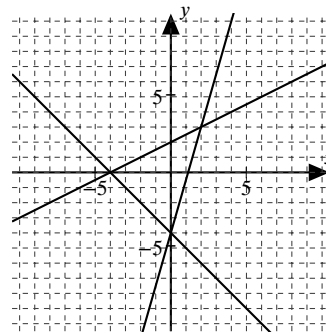
c) $\mathcal{S} =]-\infty; 0]$



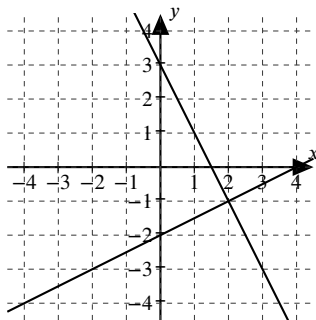
a) $\mathcal{S} =]-4; +\infty[$

8.2 b) $\mathcal{S} =]-\infty; 0]$

c) $\mathcal{S} =]-\infty; 2]$



8.3



a) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

b) $\mathcal{S} = \{2\}$

c) $\mathcal{S} = \{1\}$

d) $\mathcal{S} = \left[\frac{3}{2}; +\infty[\right.$

e) $\mathcal{S} =]-\infty; 2[$

f) $\mathcal{S} =]-\infty; 1]$

8.4

a) $\mathcal{S} = [-1; +\infty[$

b) $\mathcal{S} =]-\infty; 1]$

c) $\mathcal{S} =]10; +\infty[$

d) $\mathcal{S} = [5; +\infty[$

e) $\mathcal{S} =]-\infty; 1]$

f) $\mathcal{S} =]-\infty; 15[$

g) $\mathcal{S} =]-\infty; 0[$

h) $\mathcal{S} = \left] \frac{3}{4}; +\infty[\right.$

i) $\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{8}{5} \right]$

8.5

a) $\mathcal{S} =]-10; +\infty[$

b) $\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{9}{2} \right[$

c) $\mathcal{S} = \left[-\frac{15}{19}; +\infty[\right.$

d) $\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{90}{19} \right]$

e) $\mathcal{S} =]-\infty; 35[$

f) $\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{6}{7} \right[$

g) $\mathcal{S} = \left[-\frac{11}{5}; +\infty[\right.$

h) $\mathcal{S} =]2; +\infty[$

i) $\mathcal{S} = \left[\frac{15}{13}; +\infty[\right.$

8.6

a) $\mathcal{S} = [3; +\infty[$

b) $-\frac{2}{3}x + 4 \leq x - 1 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow \mathcal{S} = [3; +\infty[$

8.7

a) $\mathcal{S} =]-\infty; 2]$

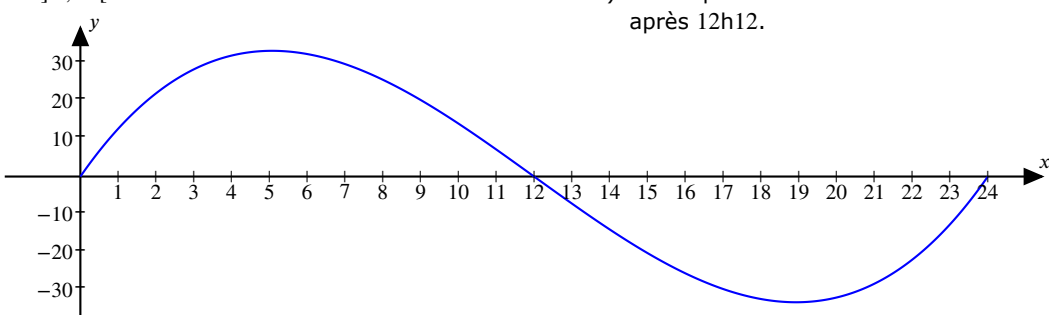
b) $\mathcal{S} =]-2; +\infty[$

c) $\mathcal{S} = \left[\frac{15}{2}; +\infty[\right.$

d) $\mathcal{S} = \left[-\frac{5}{11}; +\infty[\right.$

e) $\mathcal{S} = \left] \frac{5}{4}; +\infty[\right.$

f) $\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{98}{41} \right]$

8.8	x : nombre d'années depuis l'achat $2000x + 50'000 < 4000x + 40'000$		$\mathcal{S} =]5; +\infty[$ Dès la sixième année.
8.9	$\frac{5}{9}(F - 32) > 30 \implies F > 86$	$\frac{5}{9}(F - 32) < 40 \implies F < 104$	Entre 86 et 104 degrés Fahrenheit.
8.10	a) $\mathcal{S} = \emptyset$ b) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$	c) $\mathcal{S} = \emptyset$ d) $\mathcal{S} = \emptyset$	e) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ f) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ g) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ h) $\mathcal{S} = \emptyset$
8.11	a) $\mathcal{S} =]-\infty; 1]$ b) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$	c) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ d) $\mathcal{S} = \emptyset$	e) $\mathcal{S} = \emptyset$ f) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ g) $\mathcal{S} = \emptyset$ h) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
8.12	a) $\mathcal{S} = [0; 9]$ b) $\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]5; +\infty[$	c) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ d) $\mathcal{S} =]-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}[$	
8.13	a) $\mathcal{S} =]0; 1[$ b) $\mathcal{S} =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$	c) $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ d) $\mathcal{S} =]0; \frac{4}{3}[$	
8.14	a) $\mathcal{S} = [-1; 0] \cup [2; +\infty[$ b) $\mathcal{S} =]\frac{3}{2}; +\infty[$	c) $\mathcal{S} = [1; +\infty[$ d) $\mathcal{S} =]-\infty; -7[\cup]-2; 2[$	e) $\mathcal{S} =]-\infty; 5[$ f) $\mathcal{S} =]-\infty; -3] \cup [\frac{5}{3}; 3]$
8.15	a) $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]-1; 1[$ b) $\mathcal{S} = [-3; 0] \cup [5; +\infty[$ c) $\mathcal{S} =]-\infty; -3] \cup [-2; 0] \cup [1; 2] \cup [3; +\infty[$ d) $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]-2; 1[$	e) $\mathcal{S} =]0; 2[$ f) $\mathcal{S} =]-2; 0[\cup]2; +\infty[$ g) $\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{1}{2}]$ h) $\mathcal{S} =]-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; +\infty[$	
8.16	a) $t \in]0; 12[$  b)		
	c) La température est inférieure à 32°F avant 10h et après 12h12.		
8.17	a) $\mathcal{S} = [-5; 5]$ b) La population va s'éteindre après 5 ans.	c) La population de cerfs est supérieure à 180 individus entre 2,24 ans et 4 ans.	
8.18	a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $\mathcal{S} =]-3; 1]$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathcal{S} = [-2; 1[\cup [2; +\infty[$ c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$, $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup [-\frac{3}{2}; 1[$	d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; \frac{1}{3}\}$ $\mathcal{S} =]-\infty; -4[\cup]\frac{1}{3}; 2] \cup [3; +\infty[$	

8.19

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \mathcal{S} =]-1; -\frac{1}{2}] \cup]1; +\infty[$

b) $D = \mathbb{R}^*, \mathcal{S} =]-1; 0[\cup]1; +\infty[$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \mathcal{S} =]-\infty; \frac{1}{2}] \cup]1; +\infty[$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{10}{7}; \frac{5}{3} \right\}, \mathcal{S} =]-\infty; 1[\cup \left] \frac{10}{7}; \frac{5}{3} \right[$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -4; \frac{3}{2} \right\}, \mathcal{S} =]-\infty; -4[\cup \left] \frac{3}{2}; 9 \right]$

f) $D = \mathbb{R}^* \setminus \{1\}, \mathcal{S} = \left] 0; \frac{1}{4} \right[$

g) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \mathcal{S} =]1; +\infty[$

h) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2} \right\}, \mathcal{S} = \left] \frac{-3 - \sqrt{7}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{7}}{2} \right[$

8.20

a) $\mathcal{S} = [-11; -4]$

b) $\mathcal{S} =]0; 7[$

c) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

d) $\mathcal{S} = \left] 0; \frac{7}{2} \right[$

8.21

a) $D_f =]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$

b) $D_f = \left[\frac{1}{5}; 3 \right[$

c) $D_f = [9; +\infty[$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Références

- [1] S. Amaudruz : Algèbre 1M. Gymnase du Bugnon.
- [2] S. Amaudruz : Logique et ensembles 1M, 2013.
- [3] H. Bovet : Algèbre. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2001.
- [4] H. Bovet : Théorie des ensembles, 2002.
- [5] CRM : Fondamentum de mathématiques - Notions élémentaires. Num. 27 de Monographies de la CRM. CRM, 2400 Le Locle, g d'encre édn, 2015.
- [6] J.-P. Javet : Notions élémentaires d'algèbre et de trigonométrie 1MStand. <http://www.javmath.ch>, 2019-2020.
- [7] M. Marville : Quelques notions de logique. Gymnase du Bugnon.
- [8] M. Nicollerat : Algèbre 1M. Gymnase du Bugnon.
- [9] M. Nicollerat : Vocabulaire sur les ensembles. Gymnase du Bugnon.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch

sarah.delmonico@eduvaud.ch