

3C

Mathématiques

Semestre 2

Sarah Delmonico

Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2023-2024

Table des matières

4	Inférence statistique	2
4.1	Loi normale	2
4.1.1	Définitions et notations	2
4.1.2	Représentation graphique	3
4.1.3	Calculs de probabilités avec la table numérique	4
4.1.4	Recherche de quantiles avec la table numérique	6
4.1.5	Normalisation et cote Z	7
4.2	Théorème Central Limite (TCL)	9
4.2.1	Enoncé du TCL pour la moyenne d'un échantillon	9
4.2.2	Exemples	10
4.3	Intervalles de confiance	12
4.3.1	Exemple d'introduction	12
4.3.2	Calcul d'un intervalle de confiance pour estimer une moyenne	13
4.3.3	Choix de la taille de l'échantillon	16
4.4	Tests d'hypothèse pour une moyenne	18
4.4.1	Exemple 1	18
4.4.2	Exemple 2	21
4.4.3	Exemple 3	22
5	Géométrie	24
5.1	Périmètres	24
5.2	Aires de triangles	25
5.3	Aires de figures variées	26
5.4	Solides	27
5.4.1	Développements de solides	27
5.4.2	Volumes de solides	28
6	Exercices	29
6.4	Inférence statistique	29
6.4.1	Théorème central limite	34
6.4.2	Intervalles de confiance	37
6.4.3	Tests d'hypothèse	39
6.5	Géométrie	41
7	Solutions	47
7.4	Solutions - Inférence statistique	47
7.5	Solutions - Géométrie	53

Note des auteurs : La présente brochure reprend en grande partie des fascicules d'autres auteurs. Le chapitre *Inférence statistique* est repris et adapté du cours *Statistiques inférentielles* de F. Ferrez et C. Mermoud du gymnase de Burier (2018). Le chapitre *Géométrie* est repris et adapté du cours de Sébastien Comtesse, li même inspiré du cours d'Olivier Isely tous deux du gymnase d'Yverdon.

Nous remercions les auteures de nous avoir partagé leur travail et de nous avoir autorisé de l'inclure à la présente brochure.

4 Inférence statistique

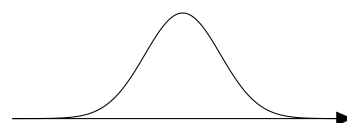
L'inférence statistique, ou statistiques inférentielles, ont pour but de déterminer les caractéristiques d'une population en utilisant les caractéristiques d'un échantillon provenant de cette population.

Il ne sera jamais possible de déterminer de manière exacte et certaine les caractéristiques de la population, mais il sera possible de les estimer plus ou moins précisément, en maîtrisant les risques de se tromper.

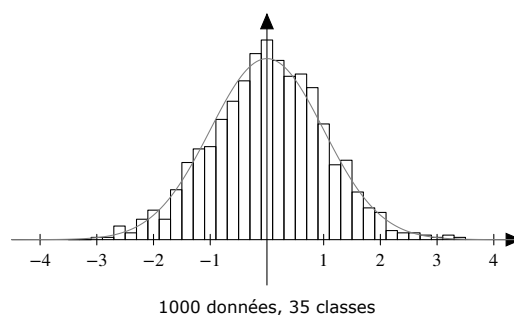
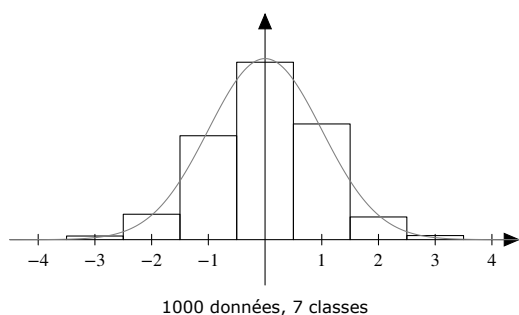
4.1 Loi normale

4.1.1 Définitions et notations

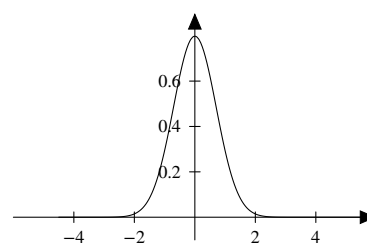
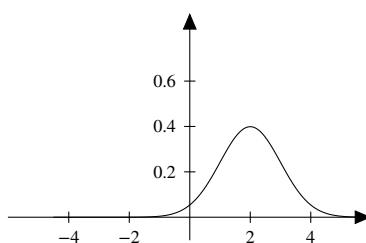
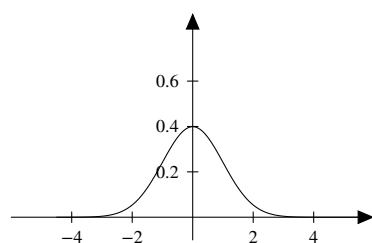
Dans de nombreux contextes, une variable statistique continue se distribue selon une courbe en cloche, appelée la courbe de Gauss.



Cette courbe en cloche correspond à la courbe de fréquence **théorique** de notre variable statistique. Si l'on disposait d'un échantillon extrêmement grand, et que l'on regroupait nos données en classes très petites, le polygone des fréquences que l'on obtiendrait ressemblerait à cette courbe.



La distribution d'une variable suivant une loi normale ressemble toujours à une cloche, mais sa position et sa forme sont déterminées par la moyenne et la variance (ou l'écart-type) de la variable.



Propriétés :

- La loi normale est symétrique autour de la moyenne μ .
- L'aire sous la courbe vaut toujours 1.

4.1.2 Représentation graphique

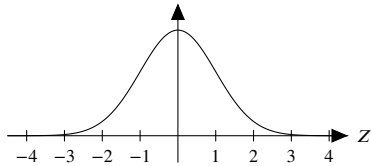
On considère une variable normale centrée réduite $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

(centrée : moyenne $\mu = 0$, réduite : variance $\sigma^2 = 1$)

Sur la courbe de Gauss, on représente sur l'axe horizontal la valeur de la variable Z .

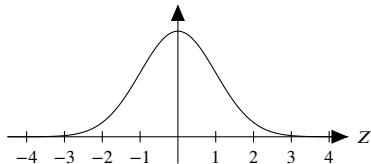
La probabilité d'obtenir certaines valeurs pour Z est donnée par l'aire sous la portion de courbe correspondante.

Exemples :



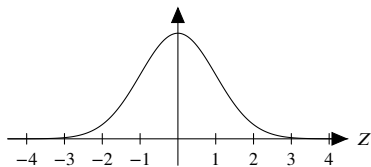
$$Z = 1$$

$$P(Z = 1) =$$



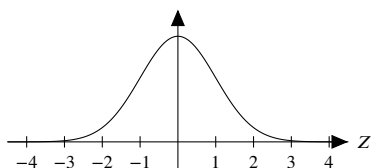
$$Z < 0$$

$$P(Z < 0) =$$



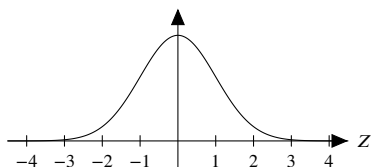
$$-1 < Z \leq 2 \text{ (noté aussi } Z \in]-1 ; 2])$$

$$P(-1 < Z \leq 2) = 0,8185 = 81,85\%.$$



$$|Z| > 1,5 \text{ (noté aussi } Z \in]-\infty ; -1,5[\cup]1,5 ; +\infty[)$$

$$P(|Z| > 1,5) = 0,1336 = 13,36\%.$$

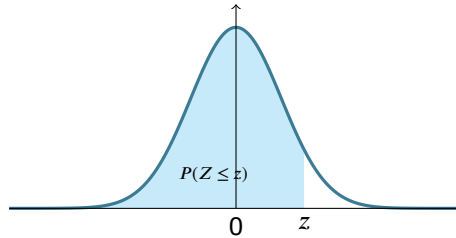


$$Z \in \mathbb{R} \text{ (noté aussi } Z \in]-\infty ; +\infty[)$$

$$P(Z \in \mathbb{R}) =$$

4.1.3 Calculs de probabilités avec la table numérique

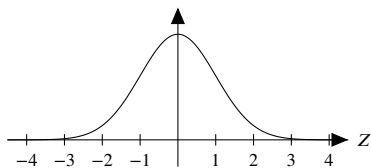
La table numérique de la loi normale centrée réduite (voir p.23) donne la probabilité d'obtenir pour la variable $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$ une valeur inférieure ou égale à une valeur donnée $z \geq 0$:



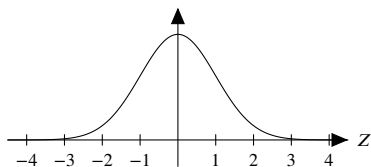
Toutes les probabilités s'obtiennent en se ramenant à des calculs du type $P(Z \leq z)$, grâce aux deux propriétés de la loi normale :

- symétrie autour de 0
- aire totale = 1 = 100%

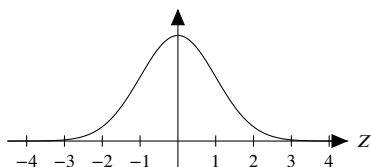
Exemples :



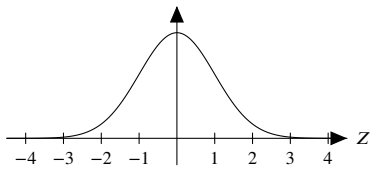
$$P(Z \leq 1,25) =$$



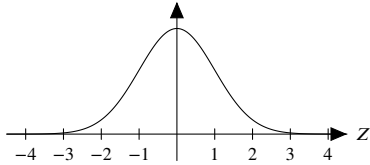
$$P(Z > 1,25) =$$



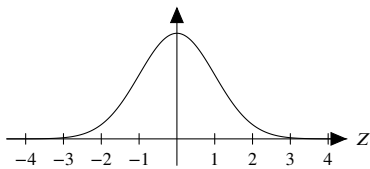
$$P(Z < -0,5) =$$



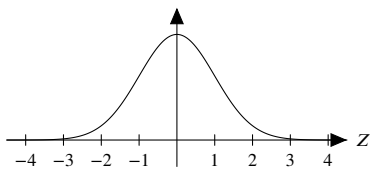
$$P(Z > -0,5) =$$



$$P(1 < Z < 2) =$$



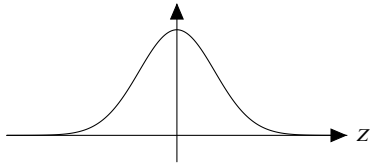
$$P(-1,34 < Z < 2,11) =$$



$$P(|Z| > 1,65) =$$

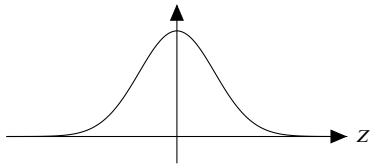
4.1.4 Recherche de quantiles avec la table numérique

Exemples :

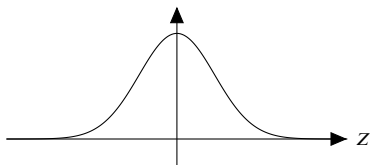


Déterminer a tel quel $P(Z \leq a) = 75\%$

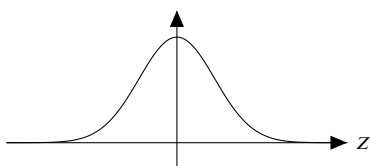
Remarque : $a = Q_3$ (troisième quartile).



Déterminer b tel quel $P(Z \geq b) = 10\%$



Déterminer c tel quel $P(|Z| < c) = 80\%$



Déterminer d tel quel $P(|Z| \geq d) = 5\%$

4.1.5 Normalisation et cote Z

Si une variable X suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 , alors la cote Z de cette variable suit une loi normale centrée réduite :

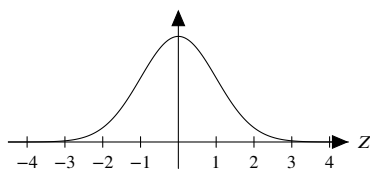
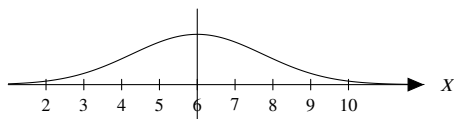
$$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

Lorsqu'on transforme une variable normale X en une variable normale centrée réduite Z , on dit qu'on **normalise** la variable X .

Comme on ne dispose pas d'une table numérique pour toutes les lois normales, on passera systématiquement par la cote Z lorsqu'on devra calculer des probabilités.

Exemples :

- a) Soit $X \sim \mathcal{N}(6; 9)$. Calculer $P(X \leq 4)$.



- b) Soit $X \sim \mathcal{N}(-1; 0,01)$. Calculer $P(X > 0)$.

- c) Soit $X \sim \mathcal{N}(3'000; 40'000)$.

Déterminer a tel que $P(X > a) = 2\%$.

Examples :

Un maraîcher observe que le poids de ses tomates suit une loi normale de moyenne 200 g et d'écart-type 40 g.

- a) Quelle est la probabilité que le poids d'une tomate soit supérieur à 250 g ?
- b) Quelle est la probabilité que le poids d'une tomate se situe à moins de 20 g du poids moyen ?
- c) Le maraîcher garantit un poids minimal pour les tomates qu'il vend. Sachant qu'il n'y a que 5% de ses tomates qui ne peuvent pas être vendues à cause de leur poids, déterminer quel est le poids minimal garanti.

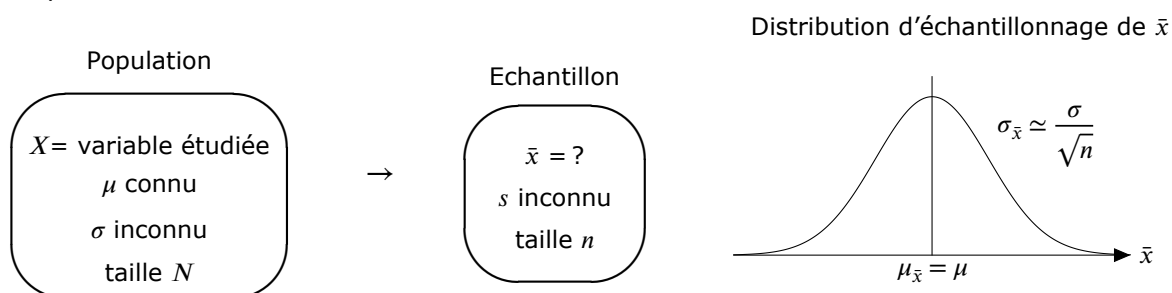
4.2 Théorème Central Limite (TCL)

Lorsqu'on étudie une certaine variable statistique sur une population de taille N , on va très souvent calculer la moyenne de cette variable sur un échantillon de taille n (avec $n < N$). Il sera alors utile de savoir de quelle manière se distribue cette moyenne par rapport aux caractéristiques réelles (et souvent inconnues) de la population (appelées les **paramètres** de la population).

4.2.1 Enoncé du TCL pour la moyenne d'un échantillon

Dans une population de taille N , on étudie une variable X de moyenne μ et de variance σ^2 .

On prélève sans remise un échantillon aléatoire de taille n et on s'intéresse à la distribution d'échantillonnage de la moyenne $\bar{X}$.



Si X suit une loi normale ☐ ou si $n \geq 30$, alors $\bar{X}$ suit également une loi normale.

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma_{\bar{x}}^2) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\bar{x}} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{si } n < \frac{N}{20} \text{ (petit échantillon, ou } N \text{ inconnu)} \\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{sinon (grand échantillon)} \end{cases}$$

Remarques :

Le facteur de correction $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ vient du fait qu'on prélève un échantillon sans remise dans une population de taille finie N .

Dans la pratique, on en tient compte seulement pour les grands échantillons lorsque $n \geq \frac{N}{20}$, sinon on considère son influence comme négligeable.

Lorsqu'on prend des mesures, comme par exemple dans le cadre d'expériences de laboratoire, il n'y a pas de population à proprement parler et donc pas de facteur de correction à calculer.

Il ne faut pas confondre l'écart-type de la population, noté σ , et l'écart-type de $\bar{x}$, noté $\sigma_{\bar{x}}$!

4.2.2 Exemples

Mise en situation

Afin d'estimer le salaire moyen des anciens étudiants d'une université, on effectue un sondage auprès d'un échantillon de personnes en leur demandant leur salaire mensuel.

En interrogeant 10 personnes, on obtient un salaire mensuel moyen $\bar{x} = 7312$ francs.

En interrogeant 100 personnes, on obtient $\bar{x} = 7611$ francs.

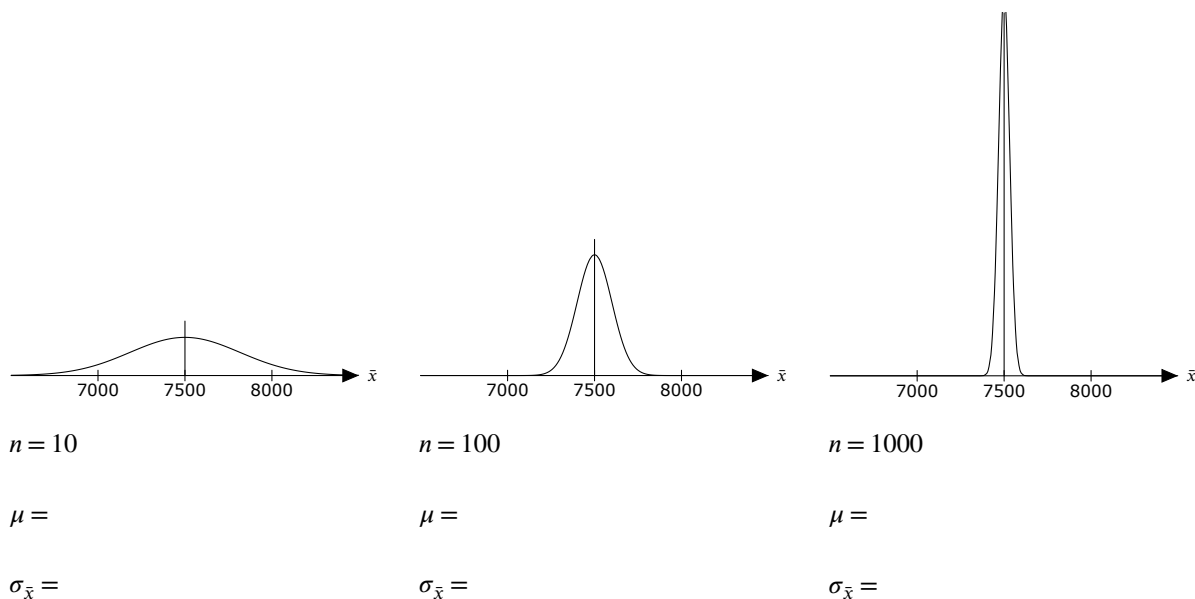
Enfin, en interrogeant 1000 personnes, on obtient $\bar{x} = 7468$ francs.

Intuitivement, quelle estimation du salaire moyen est la plus précise ?

Cette intuition s'explique par le Théorème Central Limite :

Supposons que le salaire moyen de tous les anciens étudiants de cette université soit de 7500 francs par mois, avec un écart-type de 1000 francs.

D'après le TCL, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma_{\bar{x}}^2)$



On voit bien que plus l'échantillon est grand, plus le risque d'obtenir une moyenne éloignée de 7500 est car la variance (et l'écart-type) de $\bar{x}$ devient plus

Exemple de résolution d'exercice

Dans un supermarché, on a pu mesurer que les clients dépensaient en moyenne 250 francs le 24 décembre, avec un écart-type de 70 francs.

A la sortie du supermarché, on effectue un sondage auprès de 50 clients, en leur demandant le montant de leurs achats. On calcule ensuite la moyenne $\bar{x}$ des 50 réponses collectées.

On dénote par X le montant des achats des clients.

- a) La variable X suit-elle une loi normale?

- b) La variable $\bar{X}$ suit-elle une loi normale?

- c) Quelle est la probabilité que la moyenne obtenue par ce sondage soit supérieure à 270 francs ?

- d) Quelle est la probabilité que la moyenne obtenue par ce sondage se situe à moins de 10 francs de la vraie moyenne ?

- e) Si l'on néglige les valeurs ayant moins de 0,3% de chances de se produire, entre quelles valeurs devrait se situer $\bar{x}$?

4.3 Intervalles de confiance

4.3.1 Exemple d'introduction

Supposons que l'on cherche à estimer la taille moyenne μ des femmes suisses.

On demande donc à 1000 femmes suisses choisies au hasard leur taille, et on en calcule la moyenne : $\bar{x} = 164,2$ cm.

Peut-on alors affirmer que $\mu = 164,2$, donc que la taille moyenne de toutes les femmes suisses vaut 164,2 cm ?

Il est évidemment impossible de connaître la valeur de la vraie moyenne μ sans avoir interrogé toutes les femmes suisses. On peut par contre estimer que :

la taille moyenne des femmes suisses vaut environ 164,2 cm

Une telle estimation s'appelle une **estimation ponctuelle** (par une seule valeur).

Le problème avec une estimation ponctuelle est qu'on ne sait rien sur l'erreur que l'on risque de commettre. La vraie moyenne μ s'éloigne-t-elle de quelques millimètres, de quelques centimètres ou de quelques dizaines de centimètres de cette mesure ?

On va donc préférer estimer μ par un **intervalle de confiance** :

Après quelques calculs, on pourra par exemple affirmer que

il y a 95% de chances que la taille moyenne de toutes les femmes suisses se situe entre 163,4 cm et 165,0 cm

Autrement dit,

il y a 95% de chances que la taille moyenne de toutes les femmes suisses se situe au maximum à 0,8 cm de notre estimation ponctuelle (164,2 cm)

4.3.2 Calcul d'un intervalle de confiance pour estimer une moyenne

Exemple : Reprenons l'exemple des 1000 femmes mesurant en moyenne 164,2 cm, et supposons que l'on connaisse l'écart-type de la taille des femmes suisses : $\sigma = 12.3$ cm.

On décide de calculer un intervalle de confiance à un **niveau de confiance de 95%**.

Rappel du TCL Si X suit une loi normale ou si $n \geq 30$:

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma_{\bar{x}}^2) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\bar{x}} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{si } n < \frac{N}{20} \text{ (petit échantillon ou } N \text{ inconnu)} \\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{sinon (grand échantillon)} \end{cases}$$

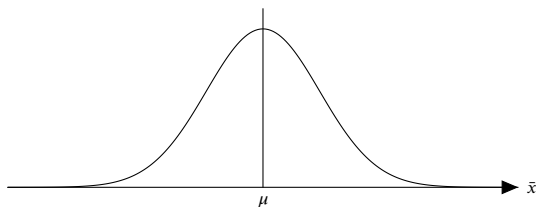
Que représente la variable X dans ce cas ?

D'après le TCL, $\bar{x}$ suit bien une loi normale, car

S'agit-il d'un petit échantillon ou d'un grand échantillon ?

.....

Calcul de $\sigma_{\bar{x}}$:



Calcul de la marge d'erreur pour un intervalle à 95% :

Il y a 95% de chances que la zone colorée sous la courbe contienne la valeur 164,2 cm.

Autrement dit, il y a 95% de chances que la valeur obtenue pour $\bar{x}$ (164,2 cm), se situe à moins de de la vraie moyenne μ .

Il y a donc aussi de chances que la vraie moyenne μ (inconnue) se situe à moins de de $\bar{x}$!

On peut donc construire un intervalle de confiance pour μ :

Interprétation :

.....

Quel est le risque d'erreur de cet intervalle ?

Interprétation :

.....

Ce risque d'erreur s'appelle le **seuil** de l'intervalle de confiance.

Exemple : Une ville comptant 17'000 ménages souhaite estimer le montant moyen qu'ils dépensent chaque année au restaurant.

Pour ceci, elle interroge 1570 ménages. Le montant moyen dépensé par cet échantillon est de 1807 francs par année, avec un écart-type corrigé de 556 francs.

Construire un intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 90% pour estimer le montant moyen dépensé par l'ensemble des ménages de cette ville.

Remarque importante

Ici, on ne connaît pas l'écart-type de la population. On va donc l'estimer en utilisant les données de l'échantillon.

L'écart-type de l'échantillon, noté s , n'est pas un bon estimateur pour σ . On va donc utiliser l'écart-type corrigé, noté $\hat{\sigma}$, qui se calcule comme suit :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}$$

- Résumé des données connues :

Population
N
μ
σ

Echantillon
n
$\bar{x}$
$\hat{\sigma}$

- Vérification des conditions d'application du TCL
- Petit échantillon ou grand échantillon ?
- Calcul ou estimation de $\sigma_{\bar{x}}$
- Calcul de la marge d'erreur
- Calcul de l'intervalle de confiance
- Interprétation :

.....

.....

.....

.....

Remarque : Pour calculer la marge d'erreur, et donc l'intervalle de confiance, on peut aussi utiliser les tables numériques du formulaire à la page 18.

4.3.3 Choix de la taille de l'échantillon

Supposons que l'on souhaite estimer la moyenne d'âge des étudiants d'une université par un intervalle de confiance.

L'intervalle se construit avec la formule suivante :

$$I = [\bar{x} - \underbrace{\sigma_{\bar{x}} \cdot q}_E; \bar{x} + \underbrace{\sigma_{\bar{x}} \cdot q}_E]$$

On observe que :

- Plus l'intervalle est , plus l'estimation est précise.
- La taille de l'intervalle ne dépend pas de , mais seulement de
- Si l'on diminue la marge d'erreur E , l'intervalle devient plus
- Si l'on augmente le niveau de confiance, q devient plus , et donc la marge d'erreur
- Si l'on augmente la taille n de l'échantillon, $\sigma_{\bar{x}}$ devient plus , et donc la marge d'erreur

Pour garantir une certaine précision dans notre estimation, on peut vouloir fixer une taille maximale pour l'intervalle de confiance.

Pour garantir que l'intervalle ne devienne pas trop grand, on peut jouer sur deux critères :

- **le niveau de confiance :**

Pour diminuer la marge d'erreur, on doit le niveau de confiance.

Inconvénient :

- **la taille de l'échantillon :**

Pour diminuer la marge d'erreur, on doit la taille de l'échantillon.

Inconvénient :

Revenons à l'estimation de l'âge moyen des étudiants de cette université.

Si l'on souhaite garder un niveau de confiance de 95%, et si l'on sait que des études antérieures ont donné un écart-type σ de 5,7 ans pour la population, quelle doit être la taille minimale de notre échantillon pour que la largeur de l'intervalle de confiance ne dépasse pas 3 ans ?

On veut que $E =$

Formule pour le calcul de la marge d'erreur : $E =$

4.4 Tests d'hypothèse pour une moyenne

4.4.1 Exemple 1

Un enseignant de sport observe depuis des années que le temps que mettent ses élèves pour courir 5 km suit une loi normale $\mathcal{N}(28; 2,25)$. Au début d'une année scolaire, il décide de faire courir ses élèves chaque semaine pour tenter d'améliorer leur endurance. A la fin de l'année, il mesure le temps que mettent ses 23 élèves pour courir 5 km, et obtient une moyenne de 27 minutes.

Peut-il affirmer que sa classe est meilleure que les élèves qu'il a eu au cours des dernières années, ou la différence est-elle trop petite pour être significative ?

Pourrait-elle simplement venir des variations normales des performances des élèves ? Autrement dit, est-il plausible d'obtenir une moyenne de 27 minutes dans un échantillon, alors que la vraie moyenne est de 28 minutes ?

Pour répondre à cette question, on va procéder à un **test d'hypothèse**, ou **test de comparaison**.

1. Formulation des hypothèses

On pose l'**hypothèse nulle**, qui est l'hypothèse sous laquelle on peut faire des calculs statistiques.

H_0 : Le temps que mettent les élèves de cette classe
suit une loi de moyenne minutes.

On pose également l'**hypothèse alternative**

H_1 : Le temps que mettent les élèves de cette classe
suit une loi de moyenne minutes.

Remarques :

- Le but de ce test est de H_0 , afin de H_1 .
- Comme on teste $\mu = 28$ contre $\mu < 28$, il s'agit d'un test
(d'un seul côté). Si on voulait tester $\mu = 28$ contre $\mu \neq 28$, on procéderait à un test
(des deux côtés).

2. Seuil de signification du test

Comme dans le cas d'un intervalle de confiance, on doit choisir quel niveau de confiance on souhaite, et quel risque d'erreur on accepte.

Le **seuil** d'un test statistique représente le risque d'erreur.

C'est le risque de H_0 alors que cette hypothèse est

Posons comme seuil $\alpha = \dots\dots\dots$

Remarques : Dans un test d'hypothèse, on peut fixer le risque de H_0 alors qu'elle est, mais on ne maîtrise pas le risque de H_0 alors qu'elle est

3. Calcul du score du test

Rappel du TCL

Si X suit une loi normale ou si $n \geq 30$:

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma_{\bar{X}}^2) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\bar{X}} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{si } n < \frac{N}{20} \text{ (petit échantillon ou } N \text{ inconnu)} \\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{sinon (grand échantillon)} \end{cases}$$

D'après le TCL, $\bar{X}$ suit bien une loi normale, car

S'agit-il d'un petit échantillon ou d'un grand échantillon ?

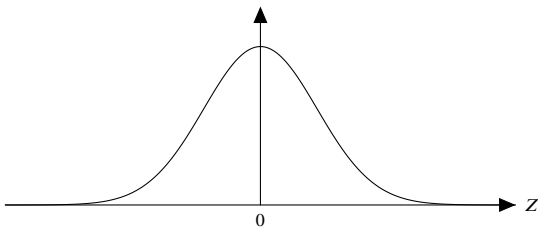
.....

Calcul de $\sigma_{\bar{X}}$:

$$\Rightarrow \bar{X} \sim$$

Score du test :

4. **Décision et conclusion**



.....

.....

Interprétation

.....

.....

.....

4.4.2 Exemple 2

Une machine remplit des bouteilles de sirop d'érable.

Le producteur veut contrôler le réglage de la machine pour s'assurer que le volume de sirop de chaque bouteille est bien de 540 ml en moyenne, comme l'indique l'étiquette. Il prélève donc 100 bouteilles au hasard, et obtient une moyenne de 541.5 ml, avec un écart-type corrigé de 5 ml.

Effectuer un test d'hypothèse au seuil de signification de 5% pour vérifier le réglage de la machine.

1. Formulation des hypothèses

H_0 :

H_1 :

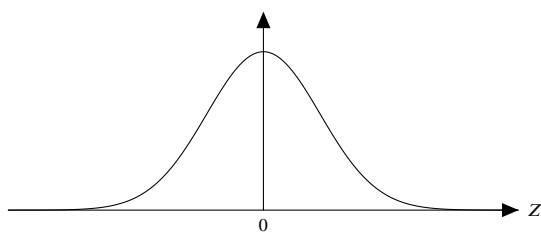
2. Seuil de signification du test : $\alpha =$ **3. Calcul du score du test**

$\sigma_{\bar{x}} =$

$t =$

Remarque

Comme on utilise $\hat{\sigma}$ pour estimer σ , le score de test t suit en réalité une loi de Student, mais si $n \geq 30$, cette loi ressemble suffisamment à la loi normale pour que l'on puisse utiliser la table de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

4. Décision et conclusion

.....

.....

Quels sont les risques de faire ajuster inutilement la machine ?

4.4.3 Exemple 3

On veut tester la durée, en kilomètres, d'un nouveau type de pneus de voiture.

La durée des pneus actuels suit une loi normale de moyenne 50'000 km. Sur 32 nouveaux pneus testés, on obtient une moyenne de 52'311 km, avec un écart-type corrigé de 9'780 km.

Au seuil de signification de 1%, peut-on affirmer que le nouveau type de pneus a une meilleure durée que l'ancien ?

1. Formulation des hypothèses

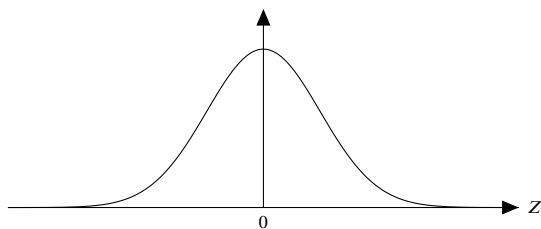
H_0 :

H_1 :

2. Seuil de signification du test : $\alpha =$ **3. Calcul du score du test**

$\sigma_{\bar{x}} =$

$t =$

4. Décision et conclusion

.....

.....

.....

.....

.....

.....

FONCTION DE RÉPARTITION DE LA LOI NORMALE STANDARD

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

z	0.841	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291
$\Phi(z)$	0.8000	0.9000	0.9500	0.9750	0.9800	0.9900	0.9950	0.9975	0.9990	0.9995

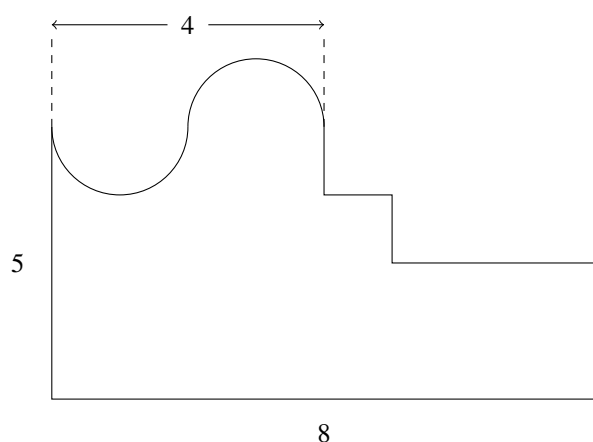
5 Géométrie

5.1 Périmètres

Pour trouver les longueurs de côtés d'une figure, on peut :

- Exploiter une symétrie dans la figure
- Utiliser le théorème de Pythagore
- Utiliser le théorème de Thalès

Exemple :



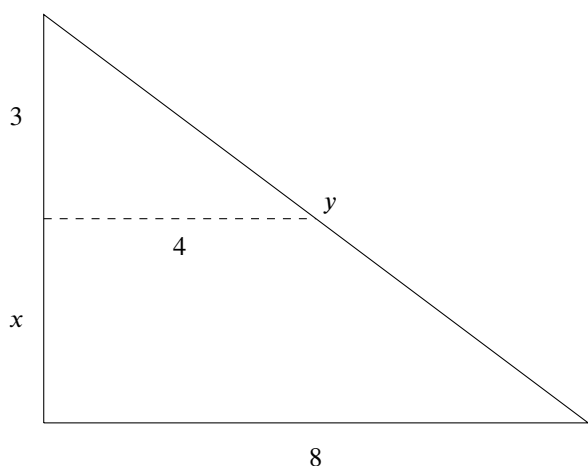
Les deux demi-cercles ont un rayon de 1. Le périmètre de chaque demi-cercle vaut $\pi \cdot 1$.

Pour le reste de la figure, on utilise la symétrie. La longueur totale des segments verticaux vaut $2 \cdot 5$. La longueur totale des segments horizontaux vaut $8 + 4$.

En tout, le périmètre de la figure vaut :

$$2\pi + 10 + 12 = 22 + 2\pi$$

Exemple :



Par le théorème de Thalès, $\frac{3+x}{8} = \frac{3}{4}$, donc $x = 3$.

Le côté de longueur y est l'hypoténuse du grand triangle. Par le théorème de Pythagore, on a

$$y^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow y^2 = 100$$

Donc $y = 10$.

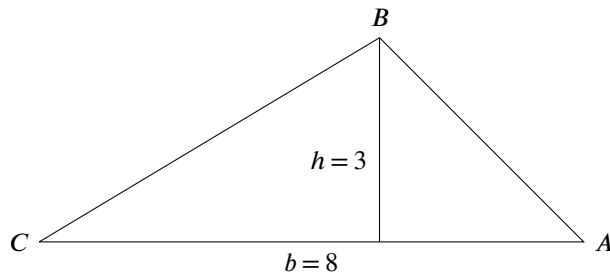
Donc le périmètre vaut $6 + 8 + 10 = 24$

Remarque : Parfois, il peut être pertinent d'ajouter des segments à une figure afin de faire apparaître des triangles. En particulier, tout polygone peut être décomposé en un nombre fini de triangles.

5.2 Aires de triangles

Théorème 5.1 L'aire d'un triangle se calcule avec la formule $\frac{\text{base} \cdot \text{hauteur}}{2}$

Exemple :

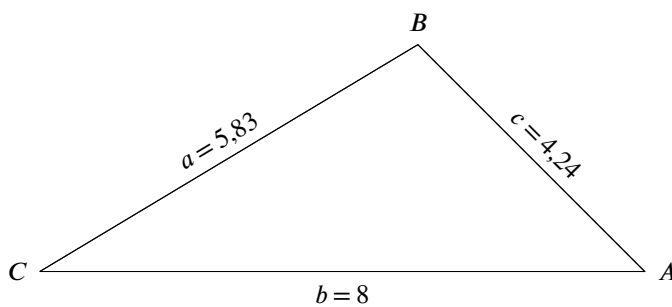


Donc l'aire vaut $\frac{8 \cdot 3}{2} = 12$

Théorème 5.2 (Formule de Héron) Soit T un triangle dont les côtés sont de longueurs a , b et c . Alors l'aire de T vaut

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{où} \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Exemple :



$$p = \frac{5,83 + 4,24 + 8}{2} \cong 9,04$$

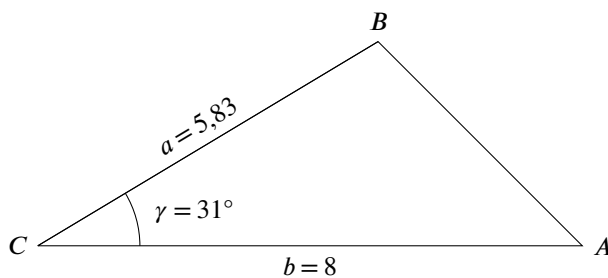
Donc l'aire vaut

$$\sqrt{9,04(9,04 - 5,83)(9,04 - 4,24)(9,04 - 8)} \cong 12$$

Théorème 5.3 (de l'aire) Soit ABC un triangle tel que les côtés a et b sont adjacents au sommet C . Soit γ l'angle en C . Alors l'aire du triangle ABC vaut

$$\frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$$

Exemple :



Donc l'aire vaut

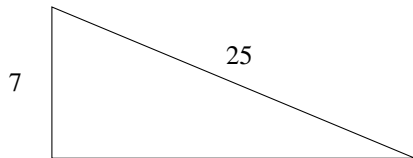
$$\frac{1}{2} \cdot 5,83 \cdot 8 \cdot \sin(31) \cong 12$$

5.3 Aires de figures variées

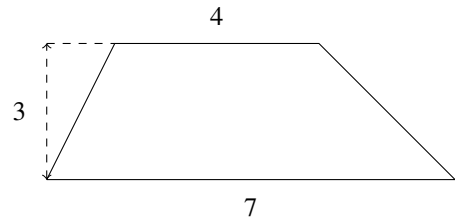
Théorème 5.4 *Tous les polygones peuvent se décomposer en un nombre fini de triangles. On peut alors additionner l'aire de chaque triangle pour obtenir celle du polygone.*

Exemple : Calculer les aires des figures suivantes.

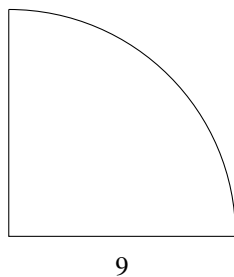
a)



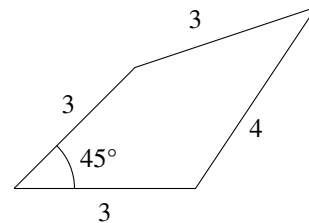
c)



b)



d)

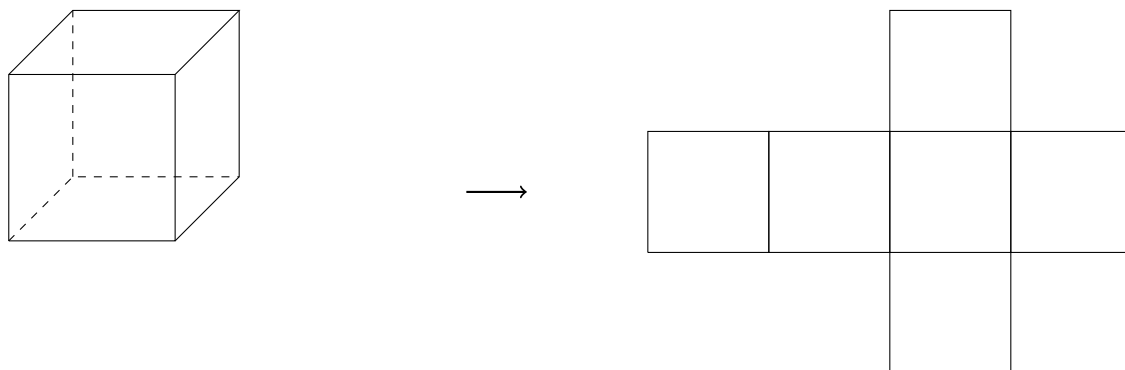


5.4 Solides

5.4.1 Développements de solides

Définition 5.1 Tout polyèdre peut être représenté par un schéma en deux dimensions, appelé **développement du solide**. Un développement s'obtient en « dépliant » les faces du polyèdre.

Exemple :



5.4.2 Volumes de solides

Théorème 5.5 Volume d'un prisme ou d'un cylindre :

$$\text{Volume} = \text{Aire de la base} \cdot \text{Hauteur}$$

Volume d'un cône ou d'une pyramide :

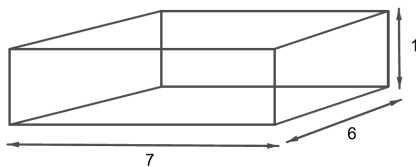
$$\text{Volume} = \frac{\text{Aire de la base} \cdot \text{Hauteur}}{3}$$

Volume d'une sphère :

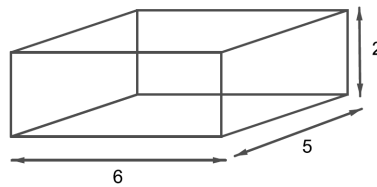
$$\text{Volume} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Exemple : Calculer les volumes des solides suivants. Les mesures indiquées sont en centimètres.

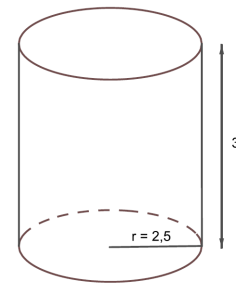
a)



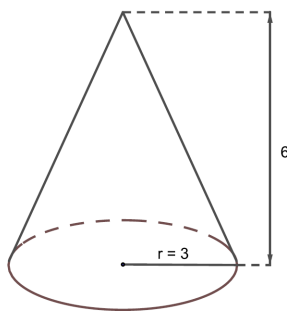
b)



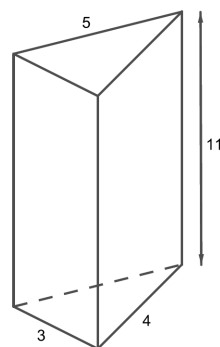
c)



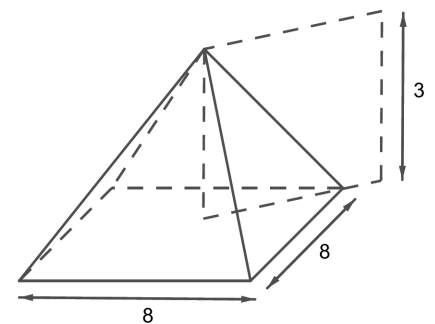
d)



e)



f)



6 Exercices

6.4 Inférence statistique

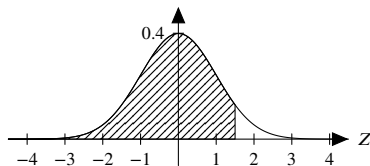
Loi normale

Exercice 4.1 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.

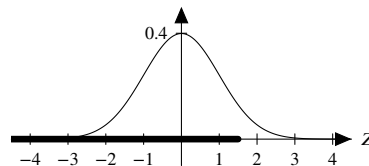
Associer chaque écriture symbolique à la bonne représentation graphique.

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| (i) $Z = 1,5$ | (iv) $P(Z \geq 1,5)$ |
| (ii) $Z \leq 1,5$ | (v) $P(Z < 1,5)$ |
| (iii) $-1 \leq Z \leq 1,5$ | (vi) $P(-1 \leq Z \leq 1,5)$ |

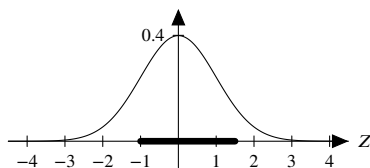
a)



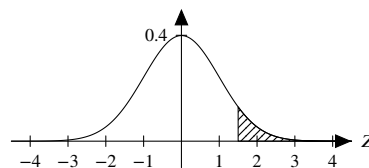
d)



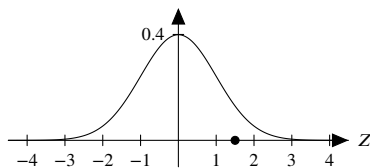
b)



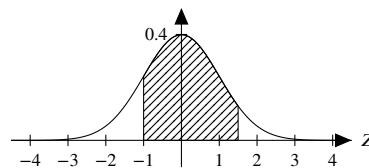
e)



c)

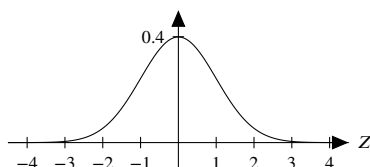
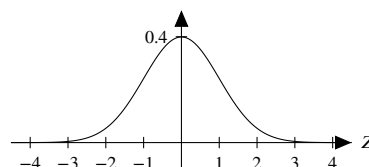


f)

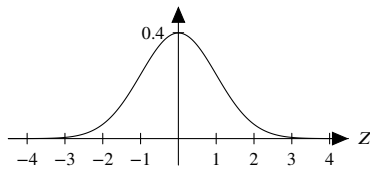


Exercice 4.2 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.

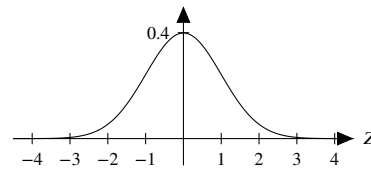
Traduire chaque écriture symbolique par une représentation graphique sur la courbe de Gauss.

a) $Z = -1$ b) $Z > 2$ 

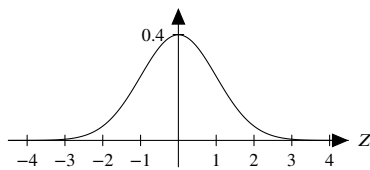
c) $Z < 0$



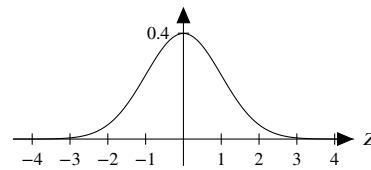
g) $P(Z > 2)$



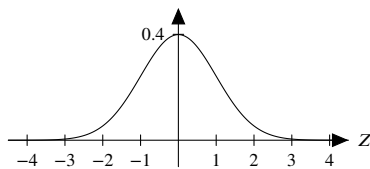
d) $-1 \leq Z \leq 1$



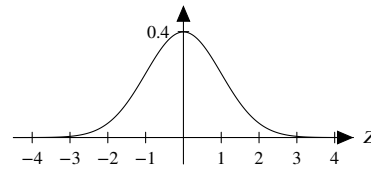
h) $P(Z < 0)$



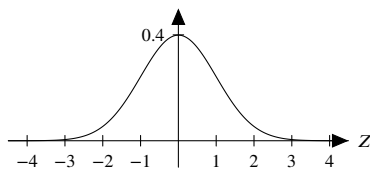
e) $Z \in]-\infty; -1,5[\cup]1; +\infty[$



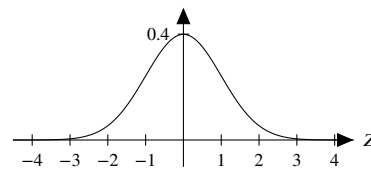
i) $P(-1 \leq Z \leq 1)$



f) $P(Z = -1)$

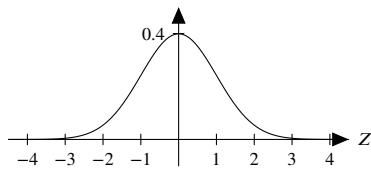


j) $P(Z \in]-\infty; -1,5[\cup]1; +\infty[)$



Exercice 4.3 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$. On sait que $P(Z > 1) \cong 15,87\%$.

a) Représenter cette probabilité sur la courbe de Gauss.



b) En déduire les probabilités suivantes, en s'aidant si nécessaire d'un schéma :

1) La probabilité que Z prenne une valeur inférieure à -1 :

$$P(Z < -1) \cong$$

2) La probabilité que Z prenne une valeur supérieure à -1 :

$$P(Z > -1) \cong$$

3) La probabilité que Z prenne une valeur située entre -1 et 1 :

$$P(-1 < Z < 1) \cong$$

4) La probabilité que Z prenne une valeur située entre 0 et 1 :

$$P(0 < Z < 1) \cong$$

5) La probabilité que la valeur de Z soit située à plus de 1 de la valeur 0 :

$$P(|Z| > 1) = P(Z \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[) \cong$$

Exercice 4.4 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

Utiliser la table de la loi normale pour estimer les probabilités suivantes.

a) $P(Z = 0,5)$

e) $P(Z < -2,33)$

i) $P(-0,5 < Z < 0)$

b) $P(Z > 1,25)$

f) $P(Z > -1,25)$

j) $P(|Z| < 2,5)$

c) $P(Z > 2,5)$

g) $P(-2,33 < Z < 1,25)$

k) $P(|Z| > 0,5)$

d) $P(Z < 2,5)$

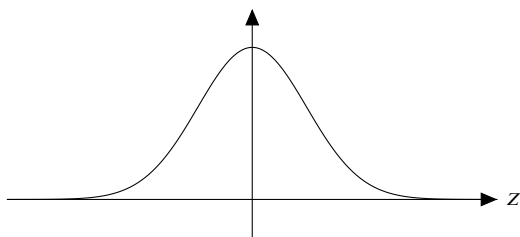
h) $P(1,25 < Z < 2,5)$

l) $P(Z \in]-\infty; 0[\cup]0,5; +\infty[)$

Exercice 4.5 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

Représenter graphiquement chaque situation, puis en utilisant la table de la loi normale, déterminer la valeur de a , b , c , d , e et f .

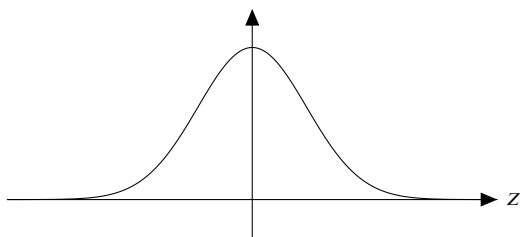
a)



$$P(Z > a) = 10\%$$

$$\Rightarrow a =$$

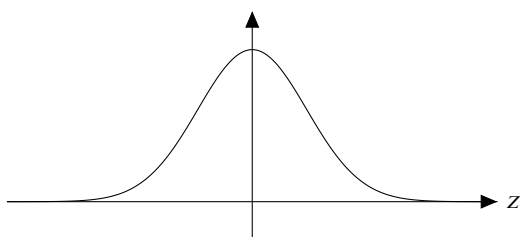
b)



$$P(Z > b) = 1\%$$

$$\Rightarrow b =$$

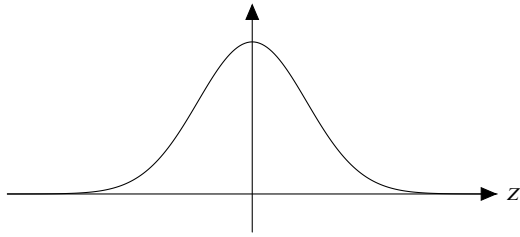
c)



$$P(|Z| > c) = 10\%$$

$$\Rightarrow c =$$

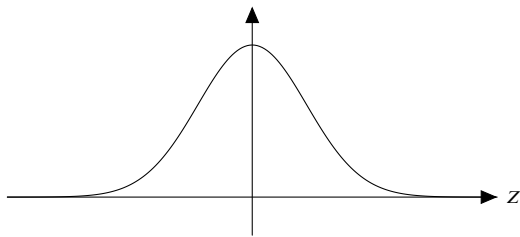
d)



$$P(|Z| > d) = 1\%$$

$$\Rightarrow d =$$

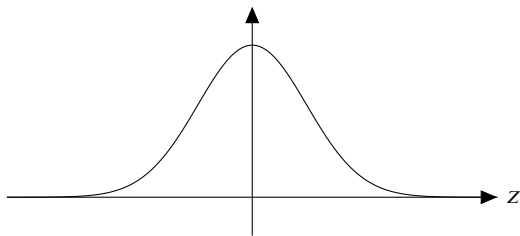
e)



$$P(-e < Z < e) = 95\%$$

$$\Rightarrow e =$$

f)



$$P(-f < Z < f) = 99,9\%$$

$$\Rightarrow f =$$

Exercice 4.6 Calculer les probabilités en utilisant la table.

- a) $P(X > 60)$ avec $X \sim \mathcal{N}(50; 16)$
- b) $P(X \geq 3,9)$ avec $X \sim \mathcal{N}(4; 0,09)$
- c) $P(X < 325)$ avec $X \sim \mathcal{N}(500; 10'000)$
- d) $P(-1 < X < 2)$ avec $X \sim \mathcal{N}(1,5; 4)$
- e) $P(20 < X < 28)$ avec $X \sim \mathcal{N}(24; 25)$
- f) $P(|X| > 1)$ avec $X \sim \mathcal{N}(0; 10)$

Exercice 4.7 a) $X \sim \mathcal{N}(0; 9)$ et $P(X \geq c) = 10\%$

- b) $X \sim \mathcal{N}(5; 1)$ et $P(X \leq c) = 30\%$
- c) $X \sim \mathcal{N}(100; 100)$ et $P(X > c) = 80\%$
- d) $X \sim \mathcal{N}(-6; 4)$ et $P(X < c) = 95\%$
- e) $X \sim \mathcal{N}(0; 16)$ et $P(|X| \geq c) = 1\%$
- f) $X \sim \mathcal{N}(0; 20)$ et $P(-c < X < c) = 97\%$

Exercice 4.8 Dans un hôpital, on suppose que l'âge du personnel infirmier suit un modèle normal, de moyenne 42 ans et d'écart-type 7 ans.

- a) Quel pourcentage du personnel infirmier a moins de 30 ans ?
- b) Quel pourcentage du personnel infirmier a entre 39 et 56 ans ?
- c) Quel âge a Nicole, infirmière dans cet hôpital, si l'on sait que seulement 20% du personnel infirmier est plus âgé qu'elle ?

Exercice 4.9 La durée de vie, en heures, des piles produites par un fabricant se distribue selon un modèle normal : $X \sim \mathcal{N}(110; 100)$.

- a) Quelle est la probabilité qu'une pile dure plus de 125 heures ?
- b) Quelle est la probabilité qu'une pile dure entre 95 et 125 heures ?
- c) La garantie stipule que si la pile ne dure pas assez longtemps, le fabricant s'engage à la remplacer gratuitement. À combien d'heures doit-il fixer le seuil de durée garantie pour ne remplacer que 5% des piles vendues ?

Exercice 4.10 Louis prend tous les jours le train pour venir au Gymnase. En moyenne, il met 16 minutes pour faire le trajet entre chez lui et la gare, avec un écart-type de 3 minutes. On suppose que la distribution du temps de trajet suit un modèle normal.

- a) Si Louis part de chez lui à 7h15 alors que le train part à 7h35, quelle est la probabilité qu'il manque son train ?
- b) A quelle heure Louis doit-il partir de chez lui pour que la probabilité qu'il manque son train soit réduite à 1% ?

Exercice 4.11 On suppose que la distribution du quotient intellectuel (QI) suit un modèle normal : $X \sim \mathcal{N}(100; 225)$.

- a) Quel pourcentage de la population a un QI compris entre 92 et 108 ?
- b) On dit qu'une personne souffre de déficience mentale si son QI est inférieur à 70. Quelle proportion de la population devrait donc souffrir de déficience mentale ?
- c) Julien prétend que 80% de la population a un QI inférieur au sien. Quelle devrait être la valeur de son QI ?

Exercice 4.12 Dans une université, les examens d'admission en médecine sont notés au dixième sur une échelle de 1 à 6. On suppose que la distribution des résultats suit un modèle normal de moyenne 4,12 et d'écart-type 2,7.

- a) Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard ait une note supérieure à 5 ?
- b) Si l'université n'admet que 33% des candidats, à quelle note doit-elle fixer le seuil pour choisir les candidats admis ?

Exercice 4.13 Le tableau suivant donne la répartition de 500 garçons de 3 ans en fonction de leur taille.

Taille en cm	Nombre de garçons	Fréquence (%)
< 90	22	
[90 ; 92[	47	
[92 ; 94[	84	
[94 ; 96[	113	
[96 ; 98[	109	
[98 ; 100[	75	
[100 ; 102[	35	
≥ 102	15	
Total	500	

- Compléter la dernière colonne du tableau.
- Représenter les données par un histogramme en pourcentage.
- Calculer la moyenne, la médiane, la variance et l'écart-type de cet échantillon.
- D'après la forme de l'histogramme et les valeurs calculées, quel modèle peut-on utiliser pour décrire la taille d'un enfant de 3 ans ?
- Utiliser ce modèle pour calculer la probabilité qu'un enfant mesure plus de 97 cm.
- D'après ce modèle, combien mesure au maximum un enfant de 3 ans faisant partie des 10% les plus petits ?

6.4.1 Théorème central limite

Exercice 4.14 Le revenu annuel moyen des 3'000 médecins d'une région est de 200'000 francs, avec un écart-type de 20'000 francs.

On prélève un échantillon aléatoire de 100 médecins parmi ces 3'000 médecins.

- Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des revenus de ces 100 médecins suit une loi normale ?
- Calculer les paramètres de cette loi normale.
- Quelle est la probabilité que le revenu moyen de ces 100 médecins vaille exactement 200'000 francs ?
- Quelle est la probabilité que le revenu moyen de ces 100 médecins soit compris entre 195'000 francs et 205'000 francs ?
- Quelle est la probabilité qu'il y ait un écart d'au moins 2'000 francs entre le revenu moyen de ces 100 médecins et celui des 3'000 médecins de cette région ?

Exercice 4.15 Une entreprise fabrique des câbles d'acier.

On désire vérifier si le diamètre X des câbles est conforme aux normes, à savoir une distribution normale de moyenne 0,90 cm et un écart-type de 0,06 cm. Pour ce faire, on prélève au hasard dans la production 36 câbles dont on mesure le diamètre.

- a) Pourquoi peut-on considérer que le diamètre moyen de ces 36 câbles suit une loi normale ?
- b) Calculer les paramètres de cette loi normale.
- c) On obtient un diamètre moyen de 0,88 cm pour ces 36 câbles. Calculer la probabilité d'obtenir un résultat au moins aussi éloigné des 0,90 cm théoriques.
- d) D'après le résultat précédent, diriez-vous que les câbles de cette entreprise sont conformes aux normes ?

Exercice 4.16 La moyenne d'âge des 200 travailleurs d'une usine est de 38,2 ans, avec un écart-type de 5,4 ans. On suppose que la distribution de l'âge des travailleurs de cette usine suit un modèle normal.

On prélève dans cette population un échantillon aléatoire de 25 travailleurs.

- a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne d'âge de ces 25 travailleurs suit une loi normale ?
- b) Calculer les paramètres de cette loi normale.
- c) Quelle est la probabilité que la moyenne d'âge des 25 travailleurs se situe entre 35 et 40 ans ?
- d) Si l'on néglige les valeurs extrêmes ayant moins de 1% de chances d'être obtenues, entre quelles valeurs doit se trouver la moyenne d'âge de ces 25 travailleurs ?

Exercice 4.17 La moyenne d'âge des femmes ayant donné naissance à un enfant en Suisse en 2015 était de 32 ans avec un écart-type de 5 ans.

On prélève un échantillon aléatoire de 100 femmes ayant donné naissance à un enfant en Suisse en 2015, et on leur pose la question suivante : *Quel âge aviez-vous à la naissance de votre enfant ?*

- a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des réponses des 100 femmes suit une loi normale ?
- b) Calculer les paramètres de cette loi normale.
- c) Si l'on néglige les valeurs extrêmes ayant moins de 5% de chances d'être obtenues, entre quelles valeurs doit se trouver la moyenne des réponses des 100 femmes ?
- d) L'âge moyen de ces 100 femmes à la naissance de leur enfant est de 33,7 ans. Doit-on s'étonner d'obtenir un résultat aussi éloigné de la moyenne en Suisse ? Justifier par un calcul de probabilités.

Exercice 4.18 Dans un gymnase, 115 élèves de l'école de culture générale ont passé leur examen de mathématiques. On a pu observer que la note de chaque élève suit une loi normale : $X \sim \mathcal{N}(4.1 ; 1,8225)$.

Un enseignant souhaite déterminer si les élèves de sa classe ont mieux réussi que l'ensemble des élèves du gymnase.

- a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des notes obtenues par les 22 élèves de cette classe suit une loi normale ?
- b) Calculer les paramètres de cette loi normale.
- c) Quelle est la probabilité que la moyenne des notes des élèves de cette classe soit comprise entre 3,5 et 4,5 ?

- d) L'enseignant calcule que la moyenne des notes des élèves de sa classe est de 4,6. Peut-il en déduire que sa classe a particulièrement bien réussi l'examen ? Justifier par un calcul de probabilités.

Exercice 4.19 En 2015, 67'606 personnes sont décédées en Suisse. L'âge moyen au moment du décès est de 79,6 ans avec un écart-type de 15,02 ans.

On prélève au hasard 500 personnes décédées en Suisse en 2015.

- Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des âges de ces 500 personnes au moment du décès suit une loi normale ?
- Calculer les paramètres de cette loi normale.
- Quelle est la probabilité que la moyenne d'âge de ces 500 personnes au moment du décès soit inférieure à 80 ans ?
- Quelle est la probabilité que l'écart entre la moyenne d'âge de ces 500 personnes et celle de toutes les personnes décédées en 2015 soit inférieur à 1 ans ?
- Si l'on considère uniquement les 99,5% des valeurs les plus proches de la moyenne suisse, entre quelles valeurs doit se trouver la moyenne d'âge de ces 500 personnes ?

Exercice 4.20 Vous décidez de tenter votre chance au casino en jouant à la roulette américaine. Cette roulette comporte 38 cases : les cases 1 à 36, le zéro et le double zéro.

Vous décidez de miser à chaque fois 1 franc sur « impair ». Si la bille tombe sur une case impaire, le casino vous reverse 2 francs. Si la bille tombe sur une case paire, ou sur le zéro ou le double zéro, vous perdez votre mise.

On peut calculer qu'en moyenne, votre gain à chaque partie sera de $-5,3$ centimes (il s'agit donc d'une perte !) avec un écart-type de 99,86 centimes.

- Si vous jouez 50 parties, pourquoi peut-on considérer que votre gain moyen par partie (sur l'ensemble des parties de la soirée) suit une loi normale ?
- Calculer les paramètres de cette loi normale.
- Quelle est la probabilité qu'à la fin de la soirée, vous repartiez en ayant gagné quelque chose ?
- Quelle est la probabilité qu'à la fin de la soirée, vous ayez gagné au total plus de 10 francs ?
- Si vous ne faites pas partie du 1% des joueurs les plus malchanceux, combien d'argent aurez-vous perdu au maximum durant cette soirée ?

Exercice 4.21 Un gymnase compte 1500 élèves. On a pu mesurer que la moyenne des dépenses hebdomadaires à la cafétéria était de 17,30 avec un écart-type de 8,90.

Durant la semaine spéciale, 450 élèves partent en voyage d'études, et ne consomment donc rien à la cafétéria. Le gérant de la cafétéria souhaite estimer la perte que cela représente pour lui.

- Pourquoi peut-on considérer que le montant moyen qu'auraient dépensés les 450 élèves absents suit une loi normale ?
- Calculer les paramètres de cette loi normale.

- c) Quelle est la probabilité que ce montant moyen soit supérieur à 18 francs par élève ?
- d) Si l'on néglige le 1% des valeurs les plus hautes, à combien au maximum doit s'élever le montant moyen qu'auraient dépensés ces élèves ?
 À combien s'élève donc, dans le pire cas, la perte totale pour le gérant ?

6.4.2 Intervalles de confiance

Exercice 4.22 On sait que le poids des contenants remplis par une machine obéit à une loi normale dont l'écart-type σ est 0,7 gramme.

Pour un échantillon aléatoire de 100 contenants prélevés dans la production de cette machine, on obtient un poids moyen de 49,7 grammes.

- a) Construire un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95%, permettant d'estimer le poids moyen de tous les contenants remplis par la machine.
 Interpréter l'intervalle.
- b) Donner et interpréter le risque d'erreur.
- c) Donner et interpréter la marge d'erreur.

Exercice 4.23 On construit un intervalle de confiance pour estimer μ à l'aide d'un échantillon de taille 50.

- a) Donner la cote Z à utiliser pour obtenir les niveaux de confiance suivants :

i) 80%

ii) 93%

iii) 97%

- b) Lequel de ces trois niveaux de confiance donnera :

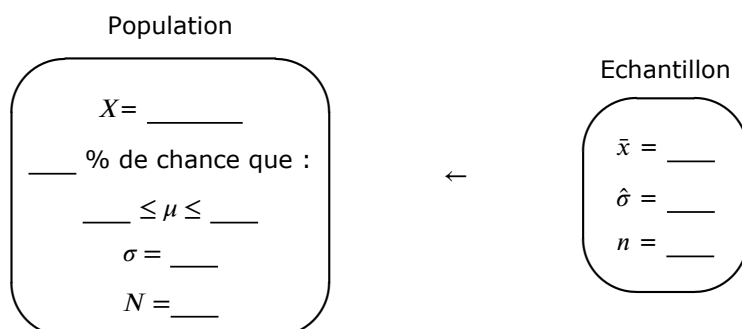
i) la plus petite marge d'erreur ?

ii) le plus grand risque d'erreur ?

Exercice 4.24 Afin de pallier un problème de surcharge de réseau dû aux appels interurbains le jour de la fête des Mères, on désire estimer la durée moyenne de ces appels.

Un échantillon aléatoire de 36 appels a donné une moyenne de 5,3 minutes et un écart-type corrigé de 3,5 minutes.

- a) Construire un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% pour estimer la durée moyenne des appels interurbains ce jour-là.
- b) Présenter les résultats obtenus sous a) en complétant le graphique suivant :



- a) Estimer par intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% le poids moyen des filles de 3 ans
- b) Dans ce cas-ci, l'estimation ponctuelle serait-elle acceptable ? Justifier la réponse.

Exercice 4.27

- a) Si on augmente le niveau de confiance de 90% à 99%, la marge d'erreur dans l'estimation de μ sera-t-elle plus grande ou plus petite ?
- b) Si on augmente la taille de l'échantillon tout en gardant le même niveau de confiance, la marge d'erreur dans l'estimation de μ sera-t-elle plus grande ou plus petite ?

Exercice 4.28 Calculer la taille minimale de l'échantillon à prélever pour estimer à 500 francs près le revenu familial moyen des familles d'un quartier, avec un niveau de confiance de 95%, si on estime l'écart-type des revenus à 3500 francs.

6.4.3 Tests d'hypothèse

Exercice 4.29 En 2005, les adolescents québécois âgés de 12 à 17 ans consacrent en moyenne 9,5 heures par semaine à l'écoute de la radio. En 2012, un chercheur émet l'hypothèse que l'arrivée des baladeurs numériques et des services de musique en ligne a entraîné une diminution du temps d'écoute de la radio chez les adolescents.

Pour vérifier son hypothèse, il prélève un échantillon aléatoire de 64 adolescents et il établit que ces derniers consacrent en moyenne 8,3 heures par semaine à l'écoute de la radio, avec un écart-type corrigé de 4,2 heures.

- a) La moyenne échantillonnale confirme-t-elle l'hypothèse du chercheur ?
Effectuer une test d'hypothèse au seuil de signification de 0,05.
- b) À combien peut-on estimer les risques que la conclusion du test soit fausse ?
- c) C'est l'hypothèse ____ qui indique le type de test (unilatéral à droite ou à gauche, ou bilatéral) qu'il faut effectuer.
- d) C'est l'hypothèse ____ qui donne la moyenne de la courbe normale utilisée pour représenter la distribution d'échantillonnage de $\bar{X}$.

Exercice 4.30 On veut tester l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = 100$.

Pour ce faire, on prélève un échantillon aléatoire de taille 36 dans la population. Supposons que l'on obtienne l'une des trois valeurs ci-dessous comme moyenne échantillonnale.

En sachant que $\sigma = 12$ et considérant la position de chacune des valeurs sur la distribution d'échantillonnage de $\bar{X}$, indiquer la valeur qui nécessiterait la construction d'un test d'hypothèse pour décider du rejet ou du non-rejet de l'hypothèse nulle.

Justifier votre choix.

$$\bar{x} = 93.3$$

$$\bar{x} = 101.3$$

$$\bar{x} = 104.6$$

Exercice 4.31

- a) Quelle est l'hypothèse testée par un test d'hypothèse : H_0 ou H_1 ?
- b) Lequel des quatre énoncés suivants définit le seuil de signification ?
- Le point à partir duquel on décide de rejeter H_0 .
 - La zone de rejet de H_0 : si $\bar{x}$ est dans cette région, on doit rejeter H_0 .
 - La probabilité de rejeter l'hypothèse H_0 alors que cette hypothèse est vraie.
 - La probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 alors que cette hypothèse est fausse.
- c) Commenter l'affirmation suivante :
- Lorsqu'on prend la décision de ne pas rejeter l'hypothèse H_0 , cela constitue une preuve que cette hypothèse est vraie.*

Exercice 4.32 Formuler les hypothèses H_0 et H_1 pour les situations suivantes, en précisant à chaque fois si l'on effectuera un test unilatéral ou bilatéral.

- a) Un fabricant examine un échantillon de 30 bouteilles remplies par une machine afin de vérifier si celle-ci verse bien, en moyenne, 500 ml de jus par bouteille.
- b) Un chercheur émet l'hypothèse que la durée de séjour des touristes dans les hôtels a augmenté à Québec en 2013 par rapport à 2012, où l'on avait observé une moyenne de 2,7 nuitées par personne.
- c) La longueur moyenne d'une tige fabriquée par une machine doit être de 35 mm ; on veut vérifier le réglage de la machine.
- d) Une machine produit des articles dont le diamètre doit être de 6,25 cm. Si le diamètre moyen d'un lot est inférieur à 6,25 cm, le lot doit être détruit. Par contre, si le diamètre moyen est supérieur à 6,25 cm, les articles pourront tout de même être vendus au même prix (mais pour un usage différent).
On veut vérifier le diamètre moyen des articles.
- e) Un chercheur émet l'hypothèse que l'absentéisme des femmes au travail est moindre quand il y a une garderie sur les lieux du travail.
En moyenne, le nombre de jours d'absence des travailleuses du Québec est de 4,4 journées par année.

Exercice 4.33 Une machine remplit des sacs de sucre de façon telle que le poids de ceux-ci est, en moyenne, de 5 kg avec un écart type de 0,18 kg.

- a) On prélève régulièrement un échantillon aléatoire de 50 sacs de sucre dans la production afin de surveiller le réglage de la machine.
Construire une règle de décision, précise au centième près, permettant de s'assurer que les sacs contiennent bien, en moyenne, 5 kg de sucre. Utiliser un seuil de signification de 0,05.
- b) Les tableaux suivants donnent, pour les 6 derniers échantillons prélevés, le poids moyen des 50 sacs de sucre de chaque échantillon.
Y a-t-il un échantillon qui indique que la machine était mal ajustée au moment du prélèvement ?

Lundi		
10h	13h	16h
$\bar{x} = 5,06$ kg	$\bar{x} = 4,98$ kg	$\bar{x} = 4,97$ kg

Mardi		
10h	13h	16h
$\bar{x} = 5,02$ kg	$\bar{x} = 4,96$ kg	$\bar{x} = 4,94$ kg

- c) Expliquer ce que signifie un seuil de signification de 0,05 dans le contexte du problème.

Exercice 4.34 Afin d'améliorer le service à la clientèle, une entreprise a informatisé la gestion des stocks. Avant l'informatisation, le temps nécessaire pour répondre à la demande d'un client suivait une loi normale dont la moyenne était de 8,3 minutes et l'écart type de 3,2 minutes. À la suite de l'informatisation, un échantillon aléatoire de 25 clients a donné les temps de service suivants, en minutes :

7 9 6 6 3 6 5 7 7 8 10 9 4 3 6 5 7 8 8 3 4 4 6 5 4

Peut-on en conclure, au seuil de signification de 1% que l'informatisation a permis d'accélérer le service à la clientèle ?

Exercice 4.35 La durée de vie moyenne des tubes fluorescents fabriqués par une entreprise est estimée à 1000 heures. Les techniciens tentent d'améliorer la durée de vie en modifiant la composition du gaz. Un test préliminaire montre que, pour un échantillon de 100 tubes, fluorescents modifiés, la durée de vie moyenne est de 1050 heures.

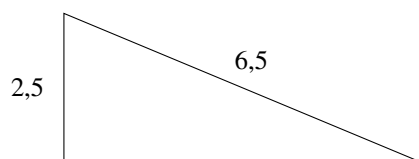
- a) Si l'écart-type corrigé de l'échantillon est de 168 heures, au seuil de signification de 0,01, peut-on en conclure que les néons modifiés durent plus longtemps ?
- b) Estimer les risques que la durée de vie moyenne des tubes fluorescents soit toujours de 1000 heures, et donc que la modification du gaz n'a eu aucun effet.
- c) La conclusion serait-elle la même si la moyenne de l'échantillon était de 1025 heures ?
Peut-on conclure que cela prouve que la durée de vie moyenne réelle des tubes fluorescents produits est bien de 1000 heures ?

6.5 Géométrie

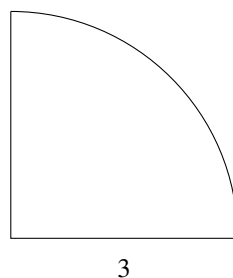
Périmètres

Exercice 5.1 Calculer les périmètres des figures suivantes.

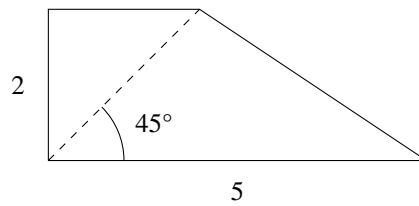
- a)



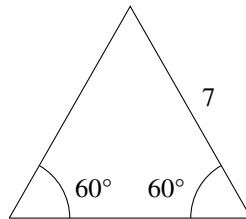
- b)



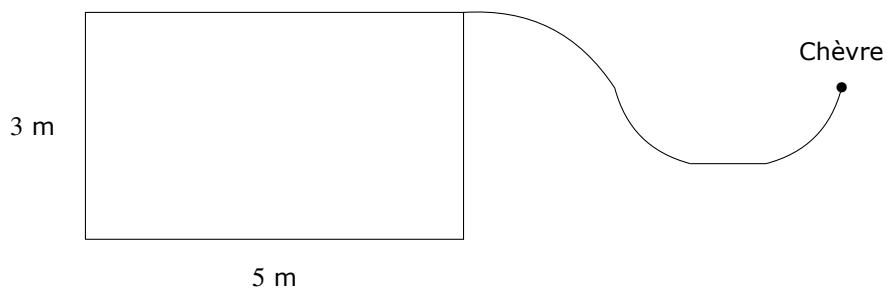
c)



d)



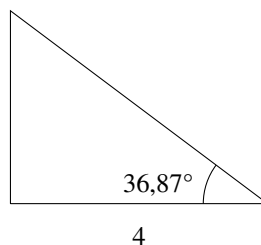
Exercice 5.2 Une chèvre est attachée au coin d'un garage par une corde de 7 mètres de long, comme illustré ci-dessous.



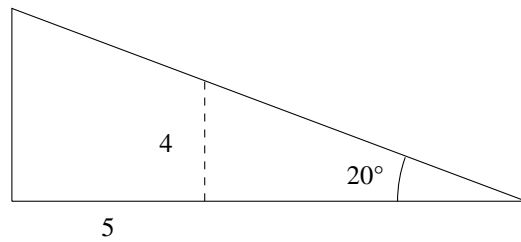
Déterminer la longueur totale du périmètre de la zone dans laquelle la chèvre peut se déplacer autour du garage.

Exercice 5.3 Un bateau fait le tour d'une île en gardant constamment une distance de 50 mètres avec le bord de l'île. Sachant que l'île est un rectangle de 100 mètres sur 42, déterminer la distance parcourue par le bateau pour faire un tour complet de l'île.

Exercice 5.4 Calculer le périmètre du triangle suivant.



Exercice 5.5 Calculer le périmètre du triangle suivant.



Aires de triangles

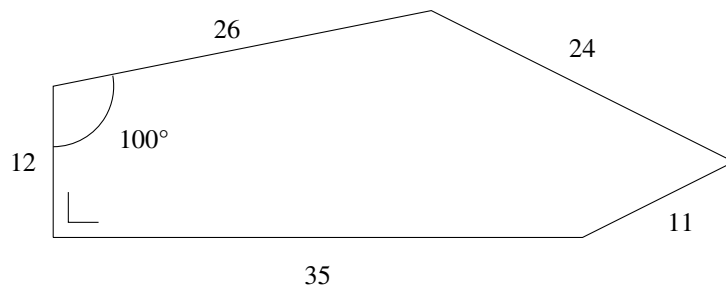
Exercice 5.6 Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent 7 cm, 11 cm et 8 cm.

Exercice 5.7 Calculer l'aire d'un triangle ABC rectangle en A sachant que $a = 13$ et $b = 5$.

Exercice 5.8 Calculer l'aire d'un triangle ABC sachant que $a = 4$, $b = 5$ et $\alpha = 42^\circ$.

Aires de figures variées

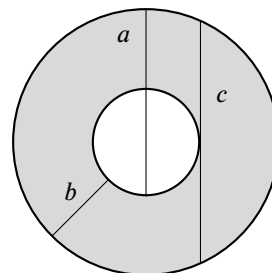
Exercice 5.9 Calculer l'aire de la figure suivante.



Exercice 5.10 Calculer l'aire d'un hexagone régulier dont tous les côtés mesurent 7 cm.

Exercice 5.11 Sachant que l'aire d'un triangle équilatéral vaut 42, déterminer la longueur de chaque côté du triangle.

Exercice 5.12 On considère la figure suivante.

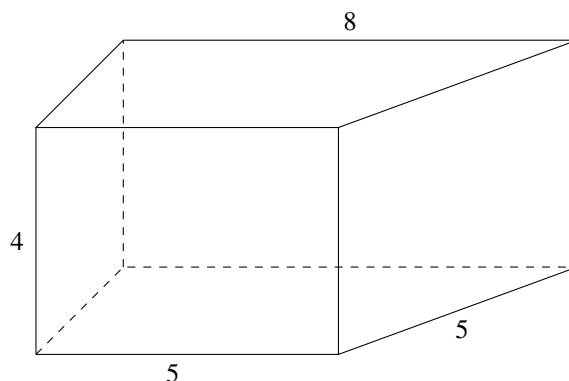


Montrer que l'aire de la zone grisée vaut $a \cdot b \cdot \pi$, puis
montrer que $a \cdot b \cdot \pi = \frac{\pi \cdot c^2}{4}$

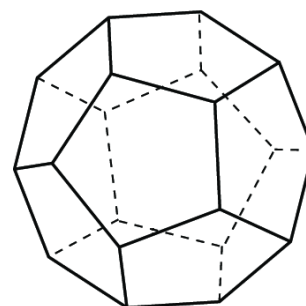
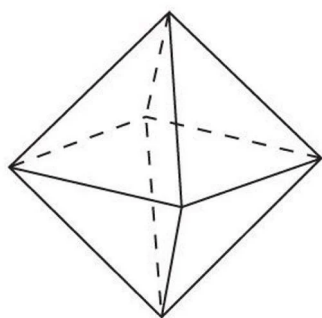
Développements de solides

Exercice 5.13 Trouver trois développements du cube différents de celui de l'exemple de la page 27.

Exercice 5.14 Donner un développement du prisme droit suivant, dont les mesures sont en centimètres.



Exercice 5.15 Donner des développements de l'octaèdre régulier, et du dodécaèdre régulier.



Exercice 5.16 Donner un développement d'un cylindre de rayon 2 cm et de hauteur 3 cm.

Volumes de solides

Exercice 5.17 On verse 3 litres d'eau dans un cylindre de rayon 10 cm et de hauteur 12 cm.

L'eau débordera-t-elle ? Sinon, à quelle hauteur arrivera-t-elle ?

Exercice 5.18 On pose une demi-sphère de rayon x cm sur un cylindre de rayon x cm et de hauteur x cm. Sachant que le volume total est de $127,7 \text{ cm}^3$, déterminer la valeur de x .

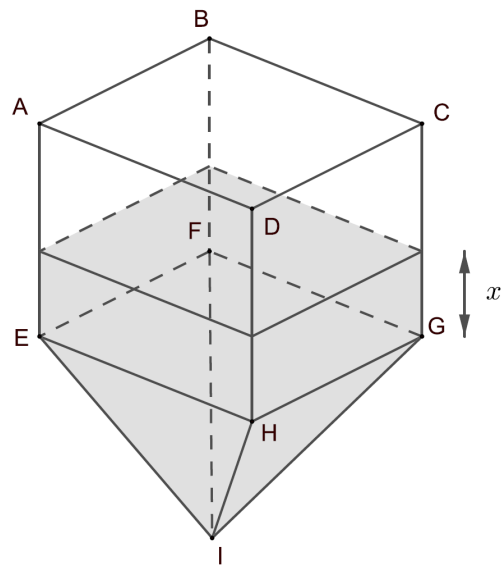
Exercice 5.19 $ABCDHG$ est un prisme droit de hauteur 2 cm. La base ABC est un triangle rectangle en C , avec $\overline{AB} = 5$ et $\overline{AC} = 4$.

Exercice 5.20 Un réservoir est constitué d'une pyramide régulière à base carrée surmontée d'un parallélépipède rectangle.

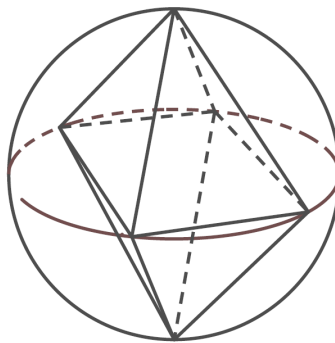
On a : $\overline{AB} = \overline{BC} = 2$ m, $\overline{AE} = 5$ m, $\overline{OI} = 1,5$ m (OI est la hauteur de la pyramide).

On verse de l'eau dans ce réservoir.

- Calculer le volume du réservoir lorsqu'il est plein.
- Pour quelle valeur de x le réservoir est-il plein au tiers ?



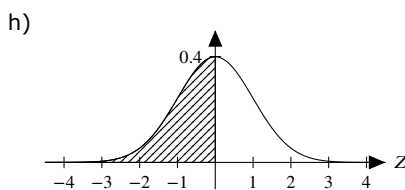
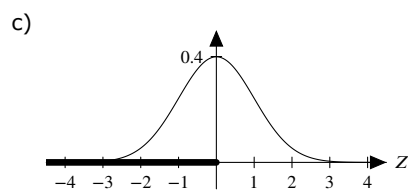
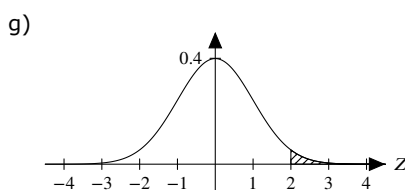
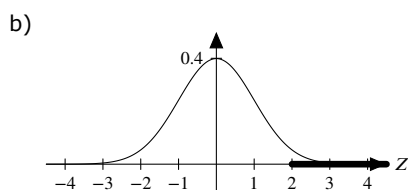
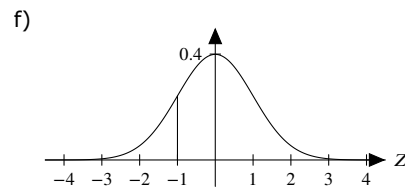
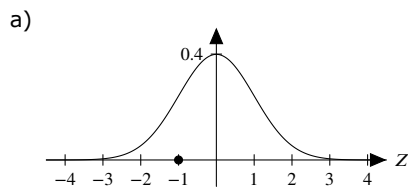
Exercice 5.21 Calculer le volume de l'octaèdre régulier inscrit dans une sphère de rayon 10 cm.



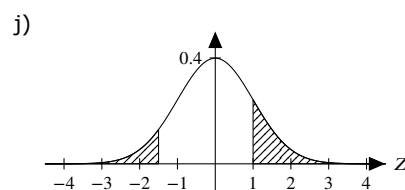
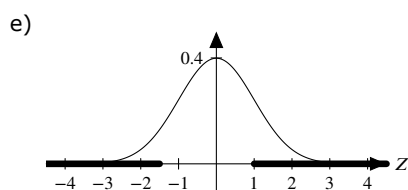
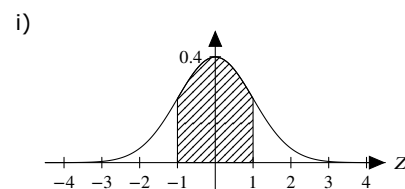
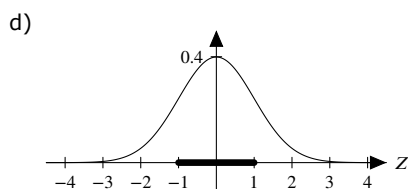
7 Solutions

7.4 Solutions - Inférence statistique

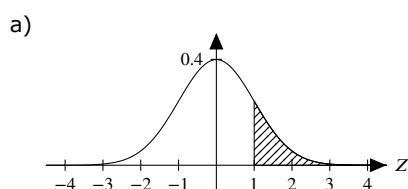
4.1 a) $\rightarrow$ (iii) b) $\rightarrow$ (iv) c) $\rightarrow$ (ii) d) $\rightarrow$ (v) e) $\rightarrow$ (i) f) $\rightarrow$ (vi)



4.2



4.3

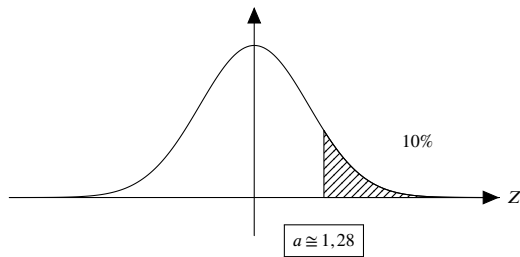


- b)
- 1) 15,87%
 - 2) 84,13%
 - 3) 68,26%
 - 4) 34,13%
 - 5) 31,74%

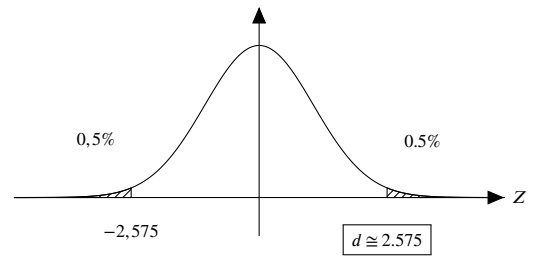
4.4

- | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| a) 0% | c) 0,62% | e) 0,99% | g) 88,45% | i) 19,15% | k) 61,70% |
| b) 10,56% | d) 99,38% | f) 89,44% | h) 9,94% | j) 98,76% | l) 80,85% |

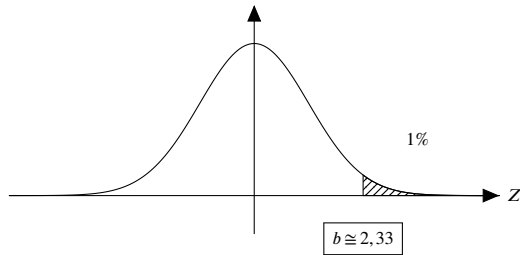
a)



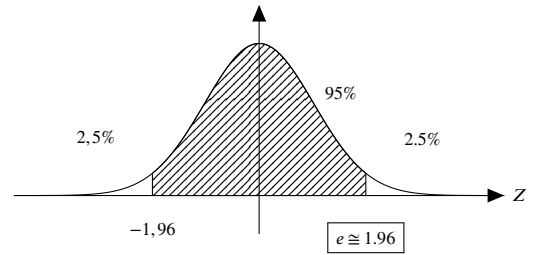
d)



b)

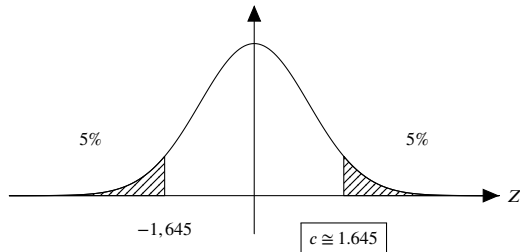


e)

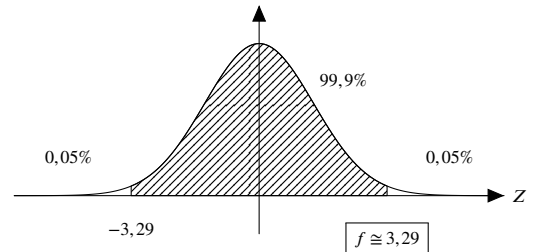


4.5

c)



f)



4.6

a) 0,62%

b) 62,93%

c) 4,01%

d) 49,31%

e) 57,62%

f) 74,90%

4.7

a) 3,84

b) 4,48

c) 91,60

d) -2,71

e) 10,30

f) 9,70

4.8

a) 4,36%

b) 64,36%

c) Nicole a environ 48 ans (47,88 ans).

4.9

a) 6,68%

b) 86,64%

c) Environ 94 heures (93,55 heures).

4.10

a) 9,18%

b) Il doit partir à 7h12.

4.11

a) 40,38%

b) 2,28%

c) Environ 113 (112,6).

4.12

a) 37,07%

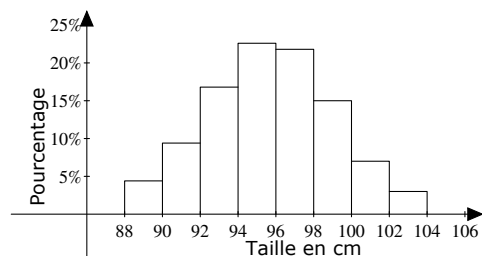
b) Le seuil doit être fixé à 5,3.

4.13

a)

Taille en cm	Nombre de garçons	Fréquence (%)
< 90	22	4,4%
[90 ; 92[	47	9,4%
[92 ; 94[	84	16,8%
[94 ; 96[	113	22,6%
[96 ; 98[	109	21,8%
[98 ; 100[	75	15%
[100 ; 102[	35	7%
≥ 102	15	3%
Total	500	100%

b)



c) $\bar{x} \cong 95,72 \text{ cm}$ $\bar{x} \cong 95,72 \text{ cm}$
 $s^2 \cong 10,9536 \text{ cm}^2$ $s \cong 3,31 \text{ cm}$.

e) $\sim 34,83\%$

f) Environ 91,5 cm (91,48 cm).

d) L'histogramme a une forme de cloche
 $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(95,72; 10,9536)$.

4.14

a) Par le TCL, $\bar{X}$ suit **approximativement** une loi normale car $n = 100 \Rightarrow n \geq 30$.

c) 0%

d) $\sim 98,76\%$

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(200'000; 4'000'000)$

e) $\sim 31,74\%$

4.15

a) Par le TCL, $\bar{X}$ suit **approximativement** une loi normale car $n = 36 \Rightarrow n \geq 30$

c) $\sim 4,56\%$

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(0,90; 0.0001)$

d) Plutôt oui (à discuter)

4.16

a) $\bar{X}$ suit **exactement** une loi normale car les données de base suivent déjà une loi normale

c) $\sim 96,17\%$

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(38,2; 1,0257)$

d) Entre 35,6 ans et 40,8 ans

4.17

a) Par le TCL, $\bar{X}$ suit **approximativement** une loi normale car $n = 100 \Rightarrow n \geq 30$

c) Entre 31 et 33 ans environ (31,02 et 32,98)

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(32; 0,25)$

d) Oui, c'est étonnant, cette situation a 0,06% de chances de se produire !

4.18

a) $\bar{X}$ suit **exactement** une loi normale car les données de base suivent déjà une loi normale

d) Oui, il y a 2,74% de chances d'obtenir une moyenne de classe aussi haute, donc la classe est probablement meilleure que l'ensemble des élèves.

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(4,1; 0,0676)$

c) $\sim 92,78\%$

4.19

a) Par le TCL, $\bar{X}$ suit **approximativement** une loi normale car $n = 500 \rightarrow n \geq 30$

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(79,6; 0,4512)$

d) $\sim 86,38\%$

c) $\sim 72,57\%$

e) Entre 77,7 ans et 81,5 ans

4.20

a) Par le TCL, $\bar{X}$ suit **approximativement** une loi normale car $n = 50 \Rightarrow n \geq 30$

d) $\sim 3,67\%$

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(-5,3; 199,44)$ (en centimes)

e) 19,10 francs. Il y a donc 99% de chances que vous ne perdiez pas plus de 19,10 francs.

c) $\sim 35,20\%$

4.21

a) Par le TCL, $\bar{X}$ suit **approximativement** une loi normale car $n = 450 \Rightarrow n \geq 30$

b) $\bar{X} \sim \mathcal{N}(17,30; 0,1233)$

c) $\sim 2.28\%$

d) Le montant moyen des dépenses hebdomadaires des élèves en voyage d'étude sera au maximum de 18,12 frs.

Il y a donc 99% de chances que la perte totale du gérant ne dépasse pas 8154 frs.

4.22

a) $\bar{x} = 49,7$ g. et $E = z\sigma_{\bar{x}} = 1,96 \cdot \frac{0,7}{\sqrt{100}} = 0,1$ g. $I = [49,6; 49,8]$

Interprétation : Il y a 95% de chances que le poids moyen de l'ensemble des contenants remplis par la machine se situe entre 49,6 g et 49,8 g.

b) Le risque d'erreur est de 5%. Il y a un risque de 5% que le poids moyen de l'ensemble des contenants remplis par la machine soit inférieur à 49,6 g ou supérieur à 49,8 g.

c) La marge d'erreur $E = 0,1$ g. Il y a 95% de chances d'avoir un écart d'au plus 0,1 g entre le poids moyen des 100 contenants de l'échantillon et le poids moyen de tous les contenants produits.

4.23

a) i) $z = 1,28$

ii) $z = 1,81$

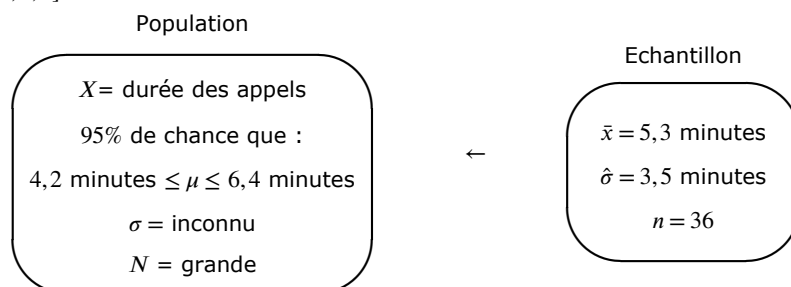
iii) $z = 2,17$

b) Le niveau de confiance de 80% dans les deux cas.

a) $I = [4,2; 6,4]$

4.24

b)



c) 5,3 Méthodologie : 36 ; 1,1 ; 19.

a) Attention ! Il faut utiliser le facteur de correction cab) 90% ; 0,9 ml

$1000 = N \leq 20n = 4000$

$454,1 \text{ ml} \leq \mu \leq 455,9 \text{ ml}$

c) i) Une estimation ponctuelle.

ii) Une estimation par intervalle de confiance.

4.25

d) $E = 3 \cdot 0,54 = 1,6$ ml. (Le calcul exact serait $E = 2,965 \cdot 0,54 \cong 1,6$ ml)

L'emploi de cette marge d'erreur pour estimer μ augmenterait les chances que l'intervalle de confiance contienne μ à presque 100% (en fait 99,7%), mais il diminuerait la précision de l'estimation en accroissant la marge d'erreur de 0,9 à 1,6 ml. On fait donc le choix de courir un certain risque que l'intervalle construit ne contienne pas μ pour augmenter la précision de l'estimation.

4.26

a) Pour $n = 500$, $\bar{x} = 13,9$ kg et $\hat{\sigma} = 1,4$ kg, on a l'intervalle $[13,8 \text{ kg} ; 14,0 \text{ kg}]$.

b) Oui, car la marge d'erreur n'est pas très grande par rapport à 13,9 kg. Elle est inférieure à 0,1 kg.

4.27

a) Plus grande.

b) Plus petite.

4.28 Au moins 189 familles.

a) 1. Hypothèses et seuil de signification :

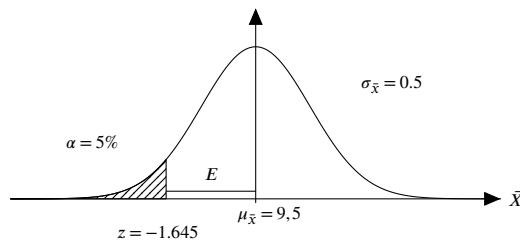
$$H_0 : \mu = 9,5 \text{ heures}, \quad H_1 : \mu < 9,5 \text{ heures}, \quad \alpha = 0,05$$

$$\text{On a } n = 64, \quad \bar{x} = 8,3 \text{ heures}, \quad \hat{\sigma} = 4,2 \text{ heures}$$

2. Condition d'application et représentation graphique :

On a $n \geq 30$, donc $\bar{X}$ suit approximativement une loi normale de moyenne $\mu_{\bar{x}} = 9,5$ et d'écart type

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{4,2}{\sqrt{64}} = 0,525 \text{ heure.}$$



4.29

3. Point critique : $E = z\sigma_{\bar{x}} = 1,645 \cdot 0,5 = 0,8$ d'où $c = 9,5 - 0,8 = 8,7$ heures.

4. Règle de décision : rejeter H_0 si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon est inférieure à 8,7 h.

5. Comme $\bar{x} = 8,3 < 8,7$ heures, on rejette H_0 .

Les adolescents de 2012 consacrent en moyenne moins d'heures par semaine à l'écoute de la radio que ceux de 2005.

b) À au plus 5%.

c) H_1

d) H_0

4.30

- 93,3 est situé à plus de 3 écarts-type de μ . C'est donc une valeur qui a très peu de chance d'être obtenue comme moyenne d'un échantillon. Il faut rejeter H_0 .
- 101,3 est situé à moins de 1 écart-type de μ . C'est une valeur tout à fait probable. On ne rejette pas H_0 .
- 104,6 est située dans une zone de la courbe d'échantillonnage de $\bar{X}$ où il n'est pas facile de décider si l'écart entre $\bar{x}$ et μ est trop grand pour être imputable au hasard. Un test d'hypothèse s'avère nécessaire.

a) L'hypothèse H_0 .

4.31

b) La probabilité de rejeter l'hypothèse H_0 alors qu'elle est vraie.

c) L'affirmation est fausse. Un test d'hypothèse ne prouve jamais que l'hypothèse H_0 est vraie ; Si on ne la rejette pas lors du test, cela signifie qu'il n'y a aucune évidence statistique justifiant son rejet.

- a) H_0 : la machine verse en moyenne 500 ml ($\mu = 500$ ml)
 H_1 : le volume moyen versé par la machine n'est pas de 500 ml ($\mu \neq 500$ ml) $\Rightarrow$ test bilatéral
- b) H_0 : les touristes dorment en moyenne 2,7 nuitées à Québec ($\mu = 2,7$ nuitées)
 H_1 : les touristes dorment en moyenne plus de 2,7 nuitées à Québec ($\mu > 2,7$ nuitées) $\Rightarrow$ test unilatéral à droite
- c) H_0 : la longueur moyenne des tiges est de 35 mm ($\mu = 35$ mm)
 H_1 : la longueur moyenne des tiges n'est pas de 35 mm ($\mu \neq 35$ mm)
 $\Rightarrow$ test bilatéral
- 4.32**
- d) H_0 : le diamètre moyen des articles est de 6,25 cm ($\mu = 6,25$ cm)
 H_1 : le diamètre moyen des articles est inférieur à 6,25 cm ($\mu < 6,25$ cm)
 $\Rightarrow$ test unilatéral à gauche
- e) H_0 : les travailleuses du Québec ayant une garderie sur leur lieu de travail manquent en moyenne 4,4 jours par année ($\mu = 4,4$ jours)
 H_1 : les travailleuses du Québec ayant une garderie sur leur lieu de travail manquent en moyenne moins de 4,4 jours par année ($\mu < 4,4$ jours)
 $\Rightarrow$ test unilatéral à gauche

- a) $H_0 : \mu = 5$ kg $H_1 : \mu \neq 5$ kg
 Sous H_0 , $\bar{X} \sim \mathcal{N}(5; 0,025^2) \Rightarrow$ les valeurs critiques pour un seuil de 5% sont $c_1 = 4,95$ kg et $c_2 = 5,05$ kg
Règle de décision : Rejeter H_0 si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon prélevé est inférieure à 4,95 kg ou supérieure à 5,05 kg.
- 4.33** *ou alors*
 Sous H_0 , $\frac{\bar{X} - 5}{0,025} \sim \mathcal{N}(0; 1)$
Règle de décision : Rejeter H_0 si $\frac{\bar{x} - 5}{0,025} > 1,96$ ou $\frac{\bar{x} - 5}{0,025} < -1,96$.
- b) Il y en a deux : le lundi à 10h et le mardi à 16h.
- c) Il y a 5% de risque de conclure que la machine est déréglée alors qu'en fait, elle est bien réglée.

La moyenne de l'échantillon est de $\bar{x} = 6,0$ minutes et l'écart-type de la population $\sigma = 3,2$ minutes.

Note : On a $n < 30$ mais comme la distribution du temps de service suit un modèle normal, la distribution d'échantillonnage de $\bar{X}$ suit aussi un modèle normal.

- 4.34** $H_0 : \mu = 8,3$ min $H_1 : \mu < 8,3$ min $\sigma_{\bar{X}} = 0,64$ min.

Règle de décision : Rejeter H_0 si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon prélevé est inférieure à 6,8 min.

Décision et conclusion : Comme $\bar{x} = 6$ minutes $< 6,8$ minutes, on rejette H_0 .

L'informatisation a permis d'accélérer le service à la clientèle.

a) $H_0 : \mu = 1000 \text{ h}$ $H_1 : \mu > 1000 \text{ h}$ $c = 1039,1 \text{ h}$.

On rejette H_0 . La durée de vie moyenne des néons modifiés est supérieure à 1000 h.

- b) Il y a moins de 1% de chance d'obtenir une moyenne échantillonnale de 1050 heures si la moyenne de la population est de 1000 heures.

La probabilité est tellement faible (en fait, $P(\bar{X} \geq 1050) = P(Z \geq 2.98) = 0,14\%$) qu'on décide de rejeter H_0 en espérant qu'une telle situation ne se soit pas produite.

4.35

Le risque de se tromper en décidant de rejeter H_0 est d'au plus 1% (en fait 0,14%)

- c) Non, on ne rejetterait pas H_0 .

Non, cela signifie simplement que l'écart entre $\bar{x}$ et μ n'est pas statistiquement significatif pour permettre de rejeter H_0 . Il faudrait étudier la totalité de la population pour prouver que la moyenne vaut exactement 1000 heures, ce qui n'est évidemment pas faisable !

7.5 Solutions - Géométrie

5.1

a) 15 b) $6 + \frac{3\pi}{2}$ c) $9 + \sqrt{13}$ d) 21

5.2

$$\frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 7 + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4 = \frac{21}{2} \pi + \pi + 2\pi = \frac{27\pi}{2} \cong 42,4115 \text{ mètres}$$

5.3

$$2 \cdot 100 + 2 \cdot 42 + 2 \cdot \pi \cdot 50 = 284 + 100\pi \cong 598 \text{ mètres}$$

5.4

12

5.5

Environ 29,26

5.6

$$p = \frac{7+11+8}{2} = 13 \Rightarrow \sqrt{13(13-7)(13-11)(13-8)} \cong 27,93 \text{ cm.}$$

5.7

$$c^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow c = 12, \text{ donc l'aire vaut } \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$$

5.8

On utilise le théorème du sinus : $\frac{4}{\sin(42)} = \frac{5}{\sin(\beta)} \Rightarrow \beta \cong 56,76^\circ$. On en déduit que $\gamma = 81,24^\circ$.

On peut alors appliquer le théorème de l'aire : $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin(81,24) \cong 9,88$.

5.9

Environ 544

5.10

Environ 127,31 cm²

- 5.11** Soit x le côté du triangle équilatéral. Par le théorème de Pythagore, l'aire du triangle vaut $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2 = 42$. Donc $x \cong 9,85$.

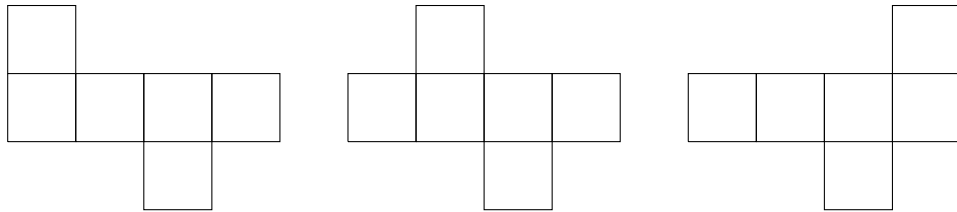
Le diamètre du cercle intérieur vaut $a - b$, et son aire vaut $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \cdot \pi$

- 5.12** Le diamètre du cercle extérieur vaut $a + b$, et son aire vaut $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \cdot \pi$

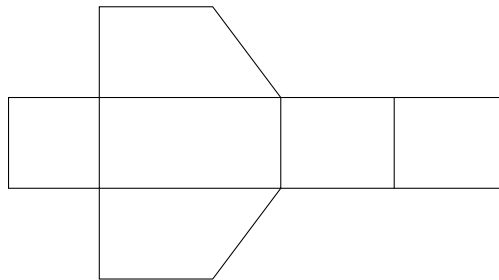
L'aire grisée vaut $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \cdot \pi - \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \cdot \pi = \frac{4ab}{4} \cdot \pi = a \cdot b \cdot \pi$

Pour montrer que $a \cdot b \cdot \pi = \frac{\pi \cdot c^2}{4}$, il faut remarquer que $c^2 + (a - b)^2 = (a + b)^2$, ce qui implique que $c^2 = 4ab$.

- 5.13**



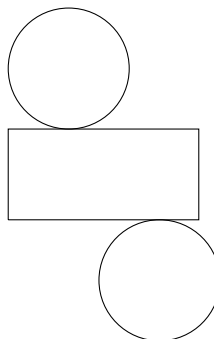
- 5.14**



- 5.15**



- 5.16**



- 5.17** L'eau arrivera à 9,55 cm

5.18 $x \cong 2,9 \text{ cm.}$

5.19 a) $\overline{BC} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm}$ c) $\overline{BE} \cong 2,83 \text{ cm}$ $\overline{BF} = 2,5 \text{ cm}$ $\overline{EF} \cong 1,63 \text{ cm}$
b) $V = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 12 \text{ cm}^3$ d) $V' = 12 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot 1,5 = 11 \text{ cm}^3$

5.20 a) 22 m^3 b) $1,3 \text{ m}$

5.21 $200\sqrt{12} \cong 692,96 \text{ cm}^3$

Références

- [1] H. Bovet : Diplôme 3D. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2008.
[2] S. Comtesse : 3c - chapitre 4 - géométrie de l'espace. Gymnase d'Yverdon, 2023.
[3] J.-P. Favre : Mathématiques pour la Matu pro. Promath Editions, 2019.
[4] J.-P. Javet : Mathématiques 3C. <http://www.javmath.ch>, 2021.
[5] C. Mermoud : Statistiques descriptives. Gymnase de Burier, Juin 2015.
[6] C. Mermoud et F. Ferrez : Statistiques inférentielles. Gymnase de Burier, 2018.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch

sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 11 décembre 2023