

3C

Mathématiques

Semestre 1

Sarah Delmonico

Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2023-2024

Table des matières

1	Puissances et racines	2
1.1	Rappel	2
1.2	Les fonctions puissances	4
1.3	Les racines	5
1.4	Les fonctions racines	6
1.5	Propriétés des racines	8
1.5.1	Extraction d'une racine carrée	9
1.5.2	Rationalisation des dénominateurs	9
1.6	Les puissances rationnelles	10
1.7	Résolution d'équations	13
2	Exponentielles et logarithmes	15
2.1	Exponentielles	15
2.2	Représentation graphique et propriétés	17
2.3	Équations exponentielles	19
2.4	Logarithmes	20
2.5	Propriétés des logarithmes	21
2.6	Équations logarithmiques	23
3	Probabilités	24
3.1	Premières notions	24
3.2	Opérations sur les événements et diagrammes de Venn	26
3.3	Diagrammes en arbre	29
3.4	Espérance mathématique	32
4	Exercices	33
4.1	Puissances et racines	33
4.2	Exponentielles et logarithmes	44
4.3	Probabilités	50
5	Solutions	59
5.1	Solutions - Puissances et racines	59
5.2	Solutions - Exponentielles et logarithmes	63
5.3	Solutions - Probabilités	66

1 Puissances et racines

1.1 Rappel

Soit n un entier strictement positif et a un nombre réel. On appelle **puissance n -ième de a** ou **a à la puissance n** , le nombre noté $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$.

Le nombre a s'appelle la **base** de la puissance et le nombre n s'appelle l'**exposant** de la puissance.

Exemples : Calculer les expressions ci-dessous.

a) $5^3 =$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 =$

b) $(-0,1)^6 =$

e) $-11^2 =$

c) $(-20)^5 =$

f) $(-11)^2 =$

On généralise la notion de puissance à des exposants entiers négatifs ou nuls de la manière suivante :

$$\text{pour } a \neq 0 : \quad a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Attention : 0^0 n'est pas défini.

Exemples : Calculer les expressions ci-dessous.

a) $2^{-3} =$

e) $\left(-\frac{10}{3}\right)^{-4} =$

b) $(-2)^3 =$

f) $0,5^{-2} =$

c) $11^{-1} =$

g) $0^4 =$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} =$

h) $4^0 =$

Propriétés des puissances

Soit m, n des entiers et a, b des nombres réels.

$$(i) \ 0^n = 0 \text{ si } n \neq 0$$

$$(vii) \ \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}, \text{ si } a, b \neq 0$$

$$(ii) \ 1^n = 1$$

$$(viii) \ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}, \text{ si } a, b \neq 0$$

$$(iii) \ a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0$$

$$(ix) \ a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(iv) \ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ si } a \neq 0$$

$$(x) \ (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(v) \ a^1 = a$$

$$(xi) \ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ si } a \neq 0$$

$$(vi) \ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ si } b \neq 0$$

$$(xii) \ (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Exemples : Simplifier et calculer les expressions ci-dessous.

$$a) \ 9^5 \cdot 9^{-6} \cdot 9 =$$

$$e) \ \frac{21^4}{7^4} =$$

$$b) \ 2^6 \cdot 5^6 =$$

$$f) \ (0,\bar{6})^{-3} =$$

$$c) \ \frac{25^3}{5^7} =$$

$$g) \ \frac{2^4}{2^{-4}} =$$

$$d) \ \left(\frac{3}{7}\right)^{-2} =$$

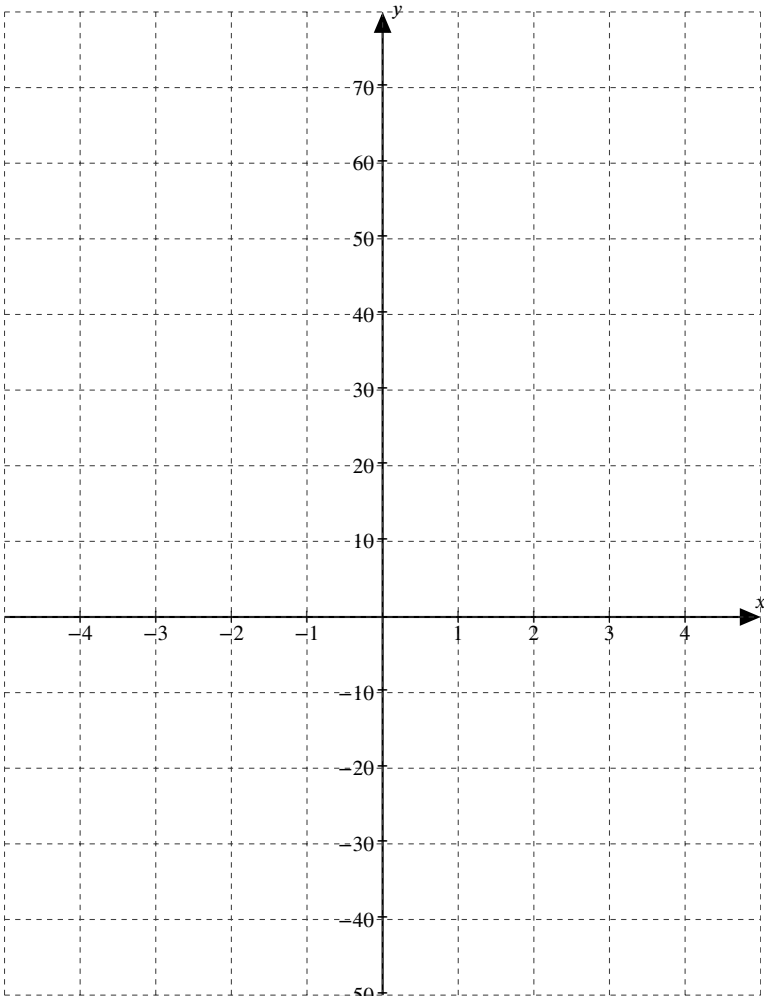
$$h) \ 12^2 - 2^2 =$$

1.2 Les fonctions puissances

Une **fonction puissance** est une fonction du type $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exemples : Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^0									
x^1									
x^2									
x^3									
x^4									
x^5									



1.3 Les racines

Définition

Soit n un entier positif non nul *pair* et x un nombre réel *positif*. **La racine n -ième de x** est le nombre réel *positif* y défini par :

$$y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x \text{ et } y \geq 0$$

Soit n un entier positif *impair* et x un nombre réel (*positif* ou *négalif*). **La racine n -ième de x** est le nombre réel y défini par :

$$y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x$$

Exemples :

a) $\sqrt[2]{64} =$ car

b) $\sqrt[3]{64} =$ car

c) $\sqrt[6]{64} =$ car

d) $\sqrt[1]{64} =$ car

e) $\sqrt[3]{-64} =$ car

f) $\sqrt[2]{-64} =$ car

g) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} =$ car

h) $\sqrt[2]{1'000'000} =$ car

i) $\sqrt[3]{1'000'000} =$ car

j) $\sqrt[4]{0,0001} =$ car

k) $\sqrt[3]{-0,027} =$ car

Vérifier les réponses obtenues à l'aide des touches racines de la calculatrice.

Notation : On note généralement $\sqrt{x}$ à la place de $\sqrt[2]{x}$ et on l'appelle **racine carrée**.

$\sqrt[3]{x}$ se lit **racine cubique**.

Historique

Au V^e av. J.-C., les Grecs ne connaissaient que les nombres rationnels $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire les nombres pouvant s'écrire sous forme de fractions.

Ils découvrent alors que la racine carrée de 2, la diagonale d'un carré de côté 1, ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers. Dès lors une nouvelle catégorie de nombres apparaît : les irrationnels.

La racine d'un nombre naturel est soit un nombre naturel, soit un nombre irrationnel.

Exemples :

a) $\sqrt{0} =$

d) $\sqrt{3} =$

b) $\sqrt{1} =$

e) $\sqrt{4} =$

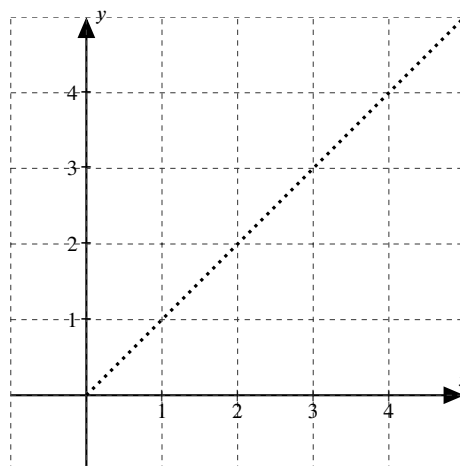
c) $\sqrt{2} =$

f) $\sqrt{5} =$

1.4 Les fonctions racines

Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

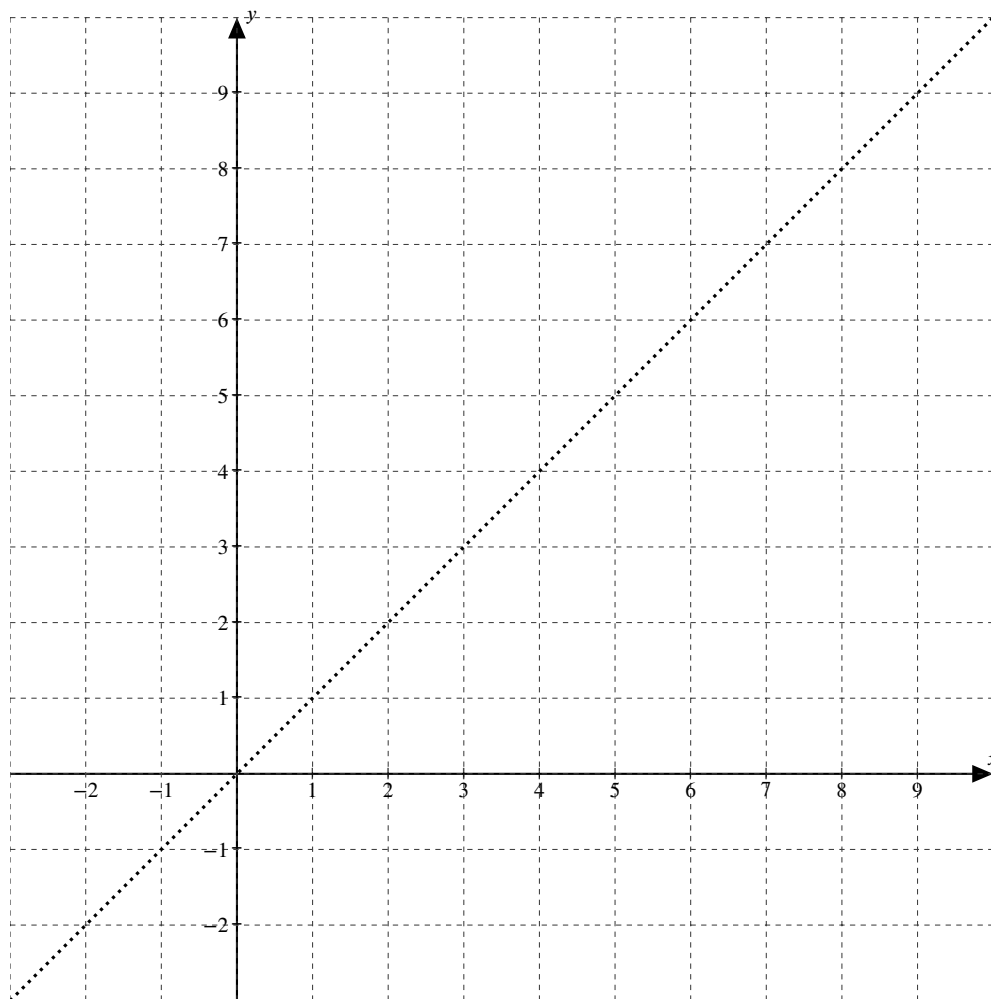
x	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5
x^2								
$\sqrt{x}$								



Que peut-on observer ?

Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3													
$\sqrt[3]{x}$													



Que peut-on observer ?

Conclusions

- $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $g(x) = \sqrt{x}$ est la **fonction réciproque** de $f(x) = x^2$ pour $x \geq 0$ car $y = x^2$ et $x \geq 0 \iff x = \sqrt{y}$.
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \sqrt[3]{x}$ est la **fonction réciproque** de $f(x) = x^3$ pour tout x car $y = x^3$ et $x \geq 0 \iff x = \sqrt[3]{y}$.

1.5 Propriétés des racines

Soit a et b des nombres réels positifs et n un entier naturel, alors :

$$(i) \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$(iii) \sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$(ii) \text{ si } b \neq 0 : \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$(iv) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Attention à : $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ et $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$

Exemples :

$$a) \sqrt[3]{7} =$$

$$f) \sqrt{484} =$$

$$b) (\sqrt[3]{5})^3 =$$

$$g) \sqrt[3]{125'000} =$$

$$c) \sqrt[7]{29^7} =$$

$$h) \sqrt{3^2+4^2} =$$

$$d) \sqrt{\frac{1}{9}} =$$

$$i) \sqrt{13^2-5^2} =$$

$$e) \sqrt[4]{\frac{16}{625}} =$$

$$j) \sqrt{(-5)^2} =$$

1.5.1 Extraction d'une racine carrée

En général, les réponses sous forme de racines doivent être extraites au maximum. Cela veut dire que l'on sort le plus grand entier possible de la racine en utilisant la règle :

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a \cdot \sqrt{b} \text{ pour } a, b \geq 0$$

Il faut donc d'abord décomposer en produit le nombre sous la racine, de manière à repérer les facteurs au carré.

On peut procéder de manière similaire pour les racines cubiques.

Exemples :

a) $\sqrt{72} =$

b) $\sqrt{54} =$

c) $\sqrt[3]{40} =$

d) $\sqrt{45} - \sqrt{20} =$

e) $\frac{\sqrt{700} + \sqrt{28}}{12} =$

1.5.2 Rationalisation des dénominateurs

En général, on ne laisse pas de racine au dénominateur.

Pour enlever une racine carrée du dénominateur, on amplifie la fraction par cette racine.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} =$

b) $\frac{21}{\sqrt{7}} =$

c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1000}} =$

Pour enlever $\sqrt[n]{a}$ du dénominateur, on amplifie la fraction de manière à obtenir $\sqrt[n]{a^n}$.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} =$

b) $\frac{4}{\sqrt[5]{1000}} =$

1.6 Les puissances rationnelles

L'objectif est de définir $a^{\frac{p}{q}}$ pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, en gardant les propriétés déjà étudiées des puissances.

Exemples : Observer et expliquer chaque étape :

$$100^{1/2} = (10^2)^{1/2} = 10^{2 \cdot 1/2} = 10^1 = 10 = \sqrt[2]{100} \quad \text{donc} \quad 100^{1/2} = \sqrt[2]{100}$$

$$8^{1/3} = (2^3)^{1/3} = 2^{3 \cdot 1/3} = 2^1 = 2 = \sqrt[3]{8} \quad \text{donc} \quad 8^{1/3} = \sqrt[3]{8}$$

Est-ce qu'une puissance à exposant rationnel serait en fait une racine ? Prouvons-le grâce à la propriété $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$:

- $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$

Pour que cela soit vrai, il faut qu'en élevant $a^{1/q}$ à la puissance q , on obtienne a :

- $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

Pour que cela soit vrai, il faut qu'en élevant $a^{p/q}$ à la puissance q , on obtienne a^p :

Définition des puissances à exposant rationnel

Soit a un nombre réel positif et q un nombre naturel non nul, on définit :

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$$

Soit $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel et a un nombre réel positif :

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Exemples :

a) $1000^{1/3} =$

d) $1000^{-1/3} =$

b) $1000^{2/6} =$

e) $8^{5/3} =$

c) $1000^{3/9} =$

f) $625^{0,25} =$

Vérifier les réponses ci-dessus à l'aide des touches puissances de la calculatrice.

Propriétés des puissances à exposant rationnel

Les propriétés des puissances à exposant rationnel sont les mêmes que celles des puissances à exposant entier relatif :

Soit m, n des nombres rationnels et a, b des nombres réels strictement positifs.

$$(i) \ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ si } a \neq 0$$

$$(v) \ a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(ii) \ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ si } b \neq 0$$

$$(vi) \ (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(iii) \ \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}, \text{ si } a, b \neq 0$$

$$(vii) \ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ si } a \neq 0$$

$$(iv) \ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}, \text{ si } a, b \neq 0$$

$$(viii) \ (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Exemples : Simplifier les expressions ci-dessous. Répondre par une puissance, puis par une racine ou a est un nombre réel strictement positif.

$$a) \ a^{2/7} \cdot a^{1/4} =$$

$$e) \ \left(\frac{1}{7}\right)^{1/2} =$$

$$b) \ (4^{1/3})^{15/2} =$$

$$f) \ \left(\frac{4}{25}\right)^{-1/2} =$$

$$c) \ (8a)^{1/3} =$$

$$g) \ \frac{a^{1/3}}{a^{-2/5}} =$$

$$d) \ 3^{1/3} \cdot 9^{1/3} =$$

Autres propriétés des racines

Soit a un nombre réel positif, n et p des entiers positifs non nuls et m un entier, alors :

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$$

$$\sqrt[pn]{a^{pm}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Justifier ces propriétés à l'aide des propriétés des puissances.

Exemples :

a) $\sqrt[3]{27^4} =$

e) $\sqrt[10]{2^{15}} =$

b) $\sqrt[6]{64^7} =$

f) $\sqrt[6]{8} =$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{a}} =$

g) $\sqrt[5]{32^4} =$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} =$

h) $\sqrt{\sqrt[3]{25}} =$

1.7 Résolution d'équations

1) Équation du type $x^n = a$ avec n un nombre entier positif non nul et a un nombre réel.

Exemples :

a) $x^2 = \frac{1}{169}$

c) $x^5 = 16'807$

b) $x^2 = -9$

d) $x^5 = -32$

Si n est *pair* et a *positif*, il y a deux solutions : $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$, c'est-à-dire $a^{\frac{1}{n}}$ et $-a^{\frac{1}{n}}$.

Si n est *pair* et a *néglatif*, il n'y a pas de solutions, car x^n est forcément positif.

Si n est *impair*, il y a une solution : $x = \sqrt[n]{a}$, (ou $a^{\frac{1}{n}}$ si a est positif).

2) Équation du type $x^{-n} = a$ avec n un nombre entier positif et a un nombre réel.

Exemples :

a) $x^{-2} = 0,04$

c) $x^{-5} = 59'049$

b) $x^{-3} = 0$

d) $x^{-3} = -125$

Si $a \neq 0$, l'équation $x^{-n} = a$ est équivalente à l'équation $x^n = \frac{1}{a}$, ce qui nous ramène à la situation précédente.

3) Équation du type $x^{p/q} = a$ avec $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel non nul et a un nombre réel.

Rappel : Si $\frac{p}{q}$ n'est pas entier, $x^{p/q}$ n'est défini sur $\mathbb{R}_+$. Les solutions de l'équation ne peuvent donc être que positives.

Exemples :

a) $x^{2/3} = 16$

c) $x^{-3/2} = 0,008$

b) $x^{2/5} = \frac{1}{10}$

d) $x^{-3/2} = -7$

Sur $\mathbb{R}_+$, l'équation $x^{p/q} = a$ est équivalente à l'équation $x^p = a^q$ et donc à $x = a^{q/p}$.

Si a est négatif, il n'y a pas de solution. Si a est positif, il y a une seule solution qui est $x = a^{q/p}$

2 Exponentielles et logarithmes

2.1 Exponentielles

« Quand vous recevrez cette lettre, versez-moi CHF 10.– puis recopiez la lettre 10 fois et envoyez-la à 10 de vos amis. Ainsi vous gagnerez CHF 100.– après avoir donné seulement CHF 10.– Ne brisez pas la chaîne car sinon le malheur s'abattra sur vous ! »

Imaginons que toutes les personnes qui reçoivent cette lettre en renvoient 10 le jour-même et que le courrier ne mette qu'un jour pour arriver à ses destinataires, compléter le tableau ci-dessous.

nb de jours depuis le début de la chaîne	nb de lettres envoyées ce jour-là
0	1
1	
2	
3	
4	
x	

Au bout de combien de temps, le nombre de lettres envoyées ce jour-là sera plus grand que la population mondiale (environ 8 milliards de personnes) ?

Les **problèmes de croissance exponentielle** sont des problèmes où **la quantité de départ est multipliée à chaque étape par une valeur constante**. C'est le cas, par exemple, avec les calculs d'intérêts composés.

Pour les résoudre, nous allons avoir besoin de nouvelles fonctions : les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques.

Définition des fonctions exponentielles

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle **exponentielle de base a** la fonction :

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$\exp_a(x) = a^x$$

Exemples :

a) Compléter l'expression de la fonction :

$$\exp_2(x) =$$

$$\exp_{1,3}(x) =$$

$$\exp_{1/5}(x) =$$

b) Calculer :

$$\exp_4(2) =$$

$$\exp_4\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\exp_4(-1) =$$

$$\exp_4\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

Pourquoi $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$?

- $a \neq 0$ pour éviter les problèmes du type " 0^{-2} " car
- $a > 0$ pour éviter les problèmes du type " $(-1)^{1/2}$ " car
- $a \neq 1$ car $\exp_1(x) =$ $=$ $.$ C'est donc une fonction $,$ elle a donc des propriétés différentes des autres fonctions exponentielles.

Bases privilégiées

Les calculatrices sont munies des touches exponentielles $10^x = \exp_{10}$ et $e^x = \exp_e$. Lorsqu'on note $\exp$ sans précision de la base, il s'agit de la base e .

Le nombre e (pour Euler¹), est un nombre très utilisé en mathématiques, au même titre que π .

$$e \approx 2,71828183$$

Exemples : Calculer à l'aide de la calculatrice :

a) $e^3 \approx$

b) $\sqrt{e} \approx$

c) $\sqrt[10]{e^3} \approx$

Une des propriétés remarquables de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est qu'elle est la seule fonction à être sa propre dérivée.

$$(e^x)' = e^x$$

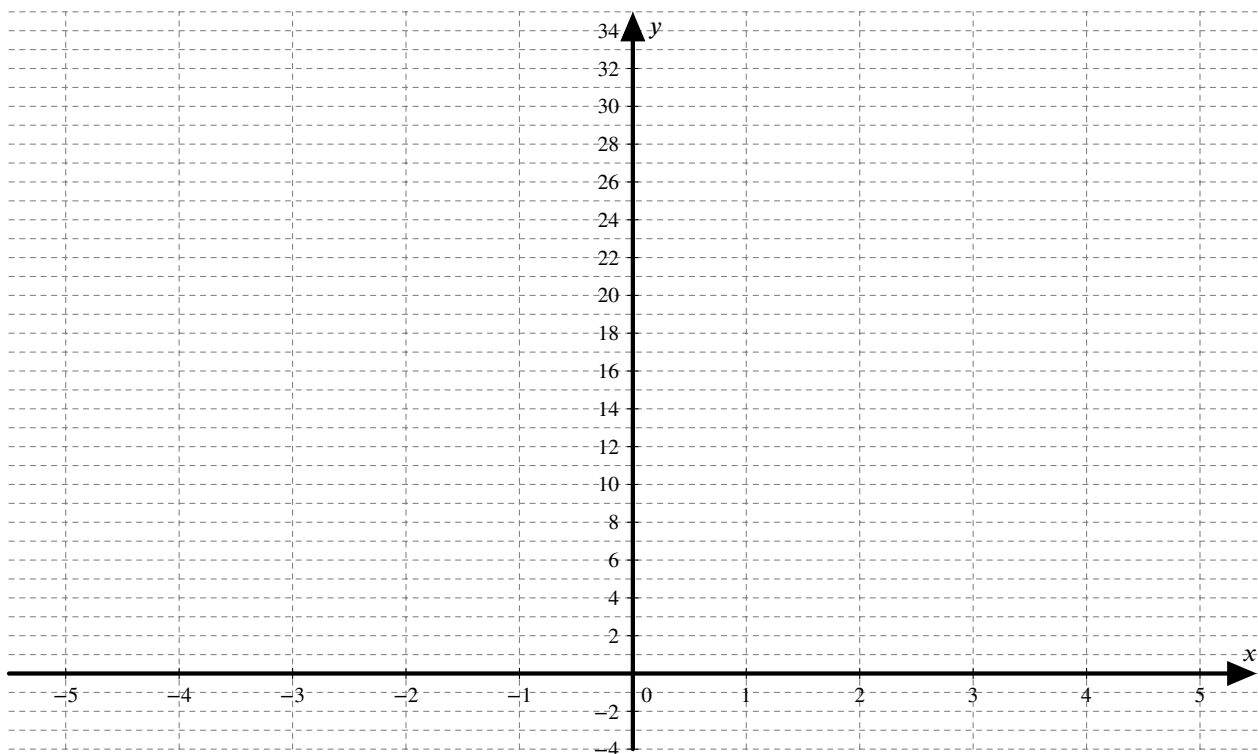
1. Léonard Euler, mathématicien suisse (1707-1783)

2.2 Représentation graphique et propriétés

Représenter les graphes des fonctions $\exp_2$ et $\exp_{1/2}$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\exp_2(x) = 2^x$									

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\exp_{1/2}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$									



Propriétés :

- Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction exponentielle $f(x) = \exp_a(x) = a^x$ est définie pour tout nombre réel x , donc $D_f = \mathbb{R}$.
- Son ordonnée à l'origine est toujours 1 car
- Elle n'a pas de zéros.
- Son tableau des signes est :
- Elle est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.

Ajouter le graphe de la fonction $h(x) = x^2$ sur le graphique ci-dessus et comparer les graphes.

Propriétés : Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$(i) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(iv) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(ii) \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(iii) \quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$(v) \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Rappel : Si $x \neq 1$, $(a+b)^x \neq a^x + b^x$ $(a-b)^x \neq a^x - b^x$ et $k(a+b)^x \neq (ka+kb)^x$

Exemples :

$$a) \quad (3^x)^{x+1} =$$

$$b) \quad \frac{7^3}{7^x} =$$

$$c) \quad 3 \cdot \frac{12^{x-1}}{4^{x-1}} =$$

2.3 Équations exponentielles

Exemple : On place un capital de CHF 10'000.– avec un taux d'intérêt annuel (composé) de 1,2%. Après combien de temps le capital atteindra-t-il CHF 12'000.– ?

La formule des intérêts composés nous dit :

$$12'000 = 10'000 \cdot (1,012)^n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$1,2 = (1,012)^n$$

Constats

- L'inconnue de cette équation se situe à l'exposant d'une puissance.
- Nous ne savons pas résoudre cette équation !!

Lorsque dans une équation l'inconnue est située à l'exposant d'une puissance, elle est appelée **équation exponentielle**.

Pour l'instant, nous ne savons pas résoudre ce type d'équations, à moins qu'elles soient suffisamment simples.

Exemples : Résoudre les équations ci-dessous.

a) $10^x = 1'000'000$

d) $2^x = \frac{1}{16}$

b) $10^x = 0,001$

e) $3^{2x+1} = 9^{3x-4}$

c) $2^x = 512$

f) $2^{3x+1} = 4^x$

2.4 Logarithmes

Jusque dans les années 1980, les solutions des équations exponentielles étaient listées dans des livres appelés « tables logarithmiques ». Maintenant, la calculatrice nous permet de les trouver rapidement grâce aux touches $\boxed{\text{LOG}}$ et $\boxed{\text{LN}}$.

Exemples : Calculer avec votre machine et comparer avec les solutions des équations de l'exemple précédent.

a) $\log(1'000'000)$

b) $\log(0,001)$

On peut remarquer que la fonction $\log(y)$ de la machine donne la solution de l'équation $10^x = y$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle **logarithme en base a de y** la solution de l'équation $a^x = y$. On a donc :

$$x = \log_a(y) \iff a^x = y$$

En d'autres termes, calculer $\log_a(y)$ c'est se demander $y = a^?$.

Exemples : Compléter.

a) $\log_{10}(1'000'000) =$ car

b) $\log_{10}(0,001) =$ car

c) $\log_3(81) =$ car

d) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) =$ car

e) $\log_7(1) =$ car

f) $\log_4(2) =$ car

g) $\log_{625}(5) =$ car

h) $\log_2(-8) =$ car

On note $\log$ au lieu de $\log_{10}$. C'est le **logarithme décimal**.

La machine permet de calculer un autre logarithme que l'on note $\ln$ au lieu de $\log_e$. C'est le **logarithme naturel** ou **logarithme népérien**².

2. John Néper, mathématicien britannique (1550-1617)

2.5 Propriétés des logarithmes

Exemples : Calculer à l'aide de la définition et observer.

a) $\log_7(7^3) =$

b) $\log_7(49) =$

$7^{\log_7(49)} =$

c) $\log_7(1) =$

d) $\log_7(7) =$

e) $\log_3(9) =$

$\log_3(81) =$

f) $\log_3(9) =$

$\log_3(81) =$

$\log_3(9 \cdot 81) =$

$\log_3\left(\frac{9}{81}\right) =$

g) $\log(100) =$

$\log(100^4) =$

h) $\log_2(32) =$

$\log_2\left(\frac{1}{32}\right) =$

i) $\log(1'000'000) =$

$\log(100) =$

$\log_{100}(1'000'000) =$

Propriétés : Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in \mathbb{R}$.

(i) $\log_a(a^x) = x$

(vi) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

(ii) $a^{\log_a(y)} = y$

(vii) $\log_a(x^q) = q \log_a(x)$

(iii) $\log_a(1) = 0$

(viii) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

(iv) $\log_a(a) = 1$

(v) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(ix) $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Exemples : Calculer sans calculatrice.

a) $\log(2) + \log(5) =$

b) $\log(300) - \log(3) =$

La propriété (ix) de la page précédente est appelée **formule de changement de base**. Elle permet de calculer les logarithmes dans n'importe quelle base à l'aide des touches $\boxed{\text{LOG}}$ et $\boxed{\text{LN}}$ de la calculatrice.

Exemple : À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approximative de $\log_2(5)$.

Remarques : Les propriétés des logarithmes viennent des propriétés des exponentielles.

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'un produit est la somme des exposants.
 $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ exprime la même propriété.
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'un quotient est la différence des exposants.
 $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ exprime la même propriété.
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'une puissance de puissance est le produit des exposants.
 $\log_a(x^q) = q \log_a(x)$ exprime la même propriété.

Attention aux fausses propriétés !

Comparer.

a) $\log(1000)$

c) $\log(1000 + 100)$

b) $\log(100)$

d) $\log(1000 - 100)$

Exemples : Résoudre les équations suivantes.

(Pour résoudre ce genre d'équation, il est vivement conseillé **d'isoler l'exponentielle** avant d'appliquer le $\log_a$.)

a) $10^x = 5$

c) $1,2 = (1,012)^x$

b) $3^x = 12$

d) $8 \cdot 10^{3x+1} + 7 = 167$

2.6 Équations logarithmiques

Une **équation logarithmique** est une équation dans laquelle la variable apparaît dans un logarithme.

Pour résoudre ce type d'équations, nous utiliserons la relation

$$x = \log_a(y) \iff a^x = y$$

Exemples : Résoudre les équations.

a) $\log(5+x) = 3$

b) $3\log_8(x) - 2 = 0$

Il ne faut pas oublier de contrôler que les réponses obtenues ne posent pas de problème dans l'équation de départ.

Exemples : Résoudre et comparer les deux équations.

a) $\log_2(x) + \log_2(x-7) = 3$

b) $\log_2(x^2 - 7x) - 3 = 0$

3 Probabilités

3.1 Premières notions

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont on ne peut pas prédire avec certitude le résultat, mais dont on peut déterminer à l'avance toutes les issues possibles.

L'ensemble U des résultats possibles est appelé **l'univers** de l'expérience aléatoire.

Ses éléments sont les **événements élémentaires**.

Exemple : Jeter un dé est une expérience aléatoire avec $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

On appelle **événement** tout sous-ensemble de U .

$\emptyset$ est **l'événement impossible**.

U est **l'événement certain**.

Exemples : Compléter en écrivant le sous-ensemble et en exprimant l'événement en français.

a) $A =$ « Obtenir un numéro supérieur à 4. »

b) $B =$ « Obtenir un numéro inférieur à 9. »

c) $C = \{2; 4; 6\}$

d) $D = \emptyset$

Deux événements qui ont la même chance de se réaliser sont **équiprobables**.

Si les événements élémentaires d'une expérience aléatoire sont équiprobables, on peut calculer la probabilité $P(A)$ d'un événement A par la formule de Laplace :

$$P(A) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } U}$$

On utilisera la notation $\#A$ pour parler du nombre d'éléments de l'ensemble A .

Exemple :

a) Dans quel cas peut-on appliquer la formule de Laplace au lancer d'un dé ?

b) Calculer les probabilités des événements A , B , C et D de l'exemple ci-dessus.

Exemple : On lance trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

- a) Quel est l'univers ?
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois « pile » ?
- c) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 1 fois « pile » ?
- d) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 fois « pile » ?

Dans certains cas, nous pourrions utiliser ce que nous avons vu en combinatoire.

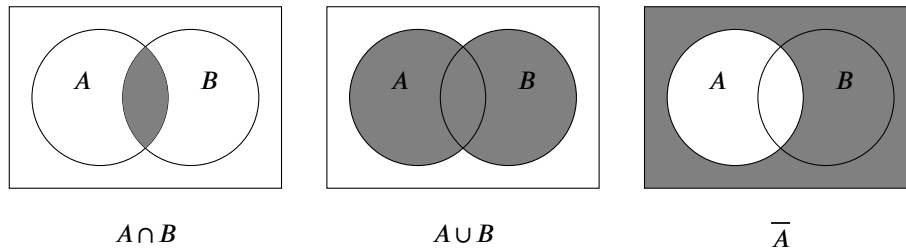
Exemple : Un comité de 5 personnes est choisi au hasard parmi les 9 femmes et les 6 hommes d'un groupe. Quelle est la probabilité que le comité soit composé de 2 femmes et 3 hommes ?

Exemple : On tire au sort 4 cartes dans un jeu de 36 cartes.

- a) Combien y a-t-il de cas possibles ?
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 « piques » ?
- c) Quelle est la probabilité d'obtenir l'as de « pique » ?
- d) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 « pique » ?
- e) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 « piques » ?

3.2 Opérations sur les événements et diagrammes de Venn

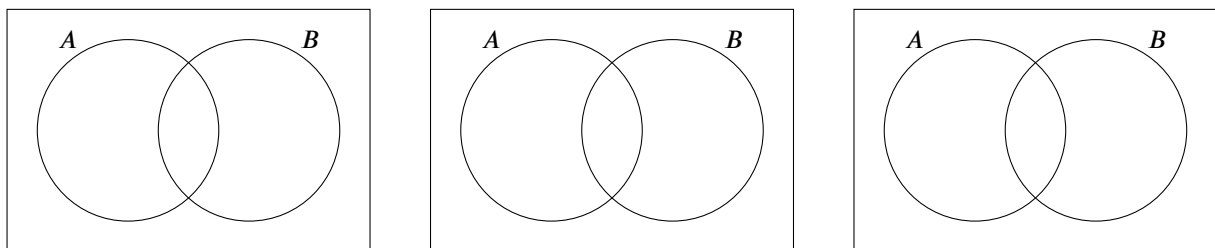
Soit U l'univers d'une expérience aléatoire et $A, B \subset U$ deux événements.



- l'événement $\overline{A} = U \setminus A = \complement A$ est l'**événement complémentaire de A** , c'est-à-dire la négation de A .
- l'événement $A \cap B$ est l'**événement A et B**
- l'événement $A \cup B$ est l'**événement A ou B**

Exemple : On choisit un nombre entre 1 et 10 au hasard.

On définit les événements $A = \ll \text{obtenir un nombre pair} \gg$ et $B = \ll \text{obtenir un nombre inférieur à 4} \gg$.



Représenter cette situation en notant :

- tous les éléments dans le premier diagramme de Venn ci-dessus ;
- le nombre d'éléments de chaque plage dans le deuxième ;
- les probabilités de chaque plage dans le troisième.

$$P(A) =$$

$$P(B) =$$

$$P(\overline{A}) =$$

$$P(\overline{B}) =$$

$$P(A \cup B) =$$

$$P(A \cap B) =$$

$$P(\overline{A \cup B}) =$$

$$P(\overline{A \cap B}) =$$

$$P(U) =$$

$$P(\emptyset) =$$

Propriétés :

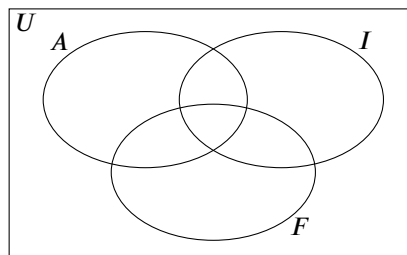
Soit U l'univers d'une expérience aléatoire et $A, B \subset U$ des événements.

- $P(U) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$

On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple : Dans le camping, 60% des vacanciers comprennent au moins le français, 40% au moins l'italien, 18% au moins l'anglais, 32% au moins le français et l'italien, 12% au moins le français et l'anglais, 8% au moins l'italien et l'anglais et 4% comprennent les trois langues.



Compléter le diagramme de Venn de la situation et la probabilité qu'un vacancier comprenne...

- | | |
|-------------------------|----------------------------------|
| a) l'anglais | c) exactement 2 de ces 3 langues |
| b) l'anglais uniquement | d) au moins 2 des 3 langues |

Remarques :

Dans l'exemple précédent, l'expérience aléatoire n'est plus aussi visible que précédemment. Elle revient en fait à choisir aléatoirement quelqu'un dans le camping.

Les probabilités mentionnées sont obtenues en faisant une statistique. Elles correspondent aux fréquences. Cela généralise notre définition, tout en gardant les mêmes propriétés.

On peut maintenant connaître des probabilités sans connaître le nombre d'éléments de l'univers et sans forcément pouvoir énumérer les cas favorables.

Exemple : Un étudiant se présente à deux examens. Il estime qu'il a 40% de chances de réussir le premier, 80% de chances d'en réussir au moins un et seulement 10% de chances de réussir les deux.

On appelle les événements de la manière suivante :

A : « L'étudiant réussit le premier examen. » B : « L'étudiant réussit le deuxième examen. »

a) Coder de manière ensembliste les trois probabilités de la consigne.

b) Coder de manière ensembliste et calculer la probabilité de C : « L'étudiant réussit le premier examen uniquement. »

c) Coder de manière ensembliste et calculer la probabilité de D : « L'étudiant ne réussit aucun examen. »

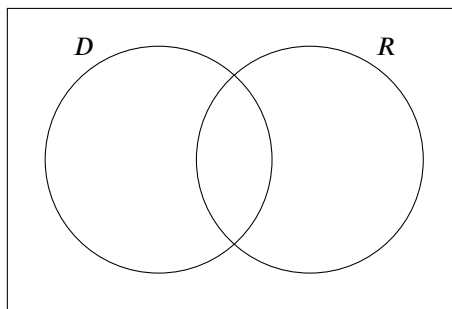
3.3 Diagrammes en arbre

Exemple :

- 60% des élèves ont fait leurs devoirs.
- $\frac{2}{3}$ des élèves qui ont fait leurs devoirs ont réussi le test surprise.
- $\frac{3}{4}$ des élèves qui n'ont pas fait leurs devoirs n'ont pas réussi le test surprise.

a) Si l'on considère les événements D : « L'élève a fait ses devoirs. » et R : « L'élève a réussi le test surprise. », coder les informations de la consigne de manière ensembliste.

b) Représenter cette situation par un diagramme de Venn.



c) Calculer les probabilités :

$$P(D) =$$

$$P(R) =$$

$$P(\overline{D}) =$$

$$P(\overline{R}) =$$

$$P(D \cup R) =$$

$$P(D \cap R) =$$

$$P(D|R) =$$

$$P(R|D) =$$

Représentation de cette situation par un diagramme en arbre :

Lorsque les informations de la consigne sont des probabilités conditionnelles ou que l'expérience se passe en plusieurs étapes successives, on utilise souvent un diagramme en arbre plutôt qu'un diagramme de Venn.

On représente toutes les issues possibles par des chemins définis comme une succession de « branches ». Au bout de chaque « branches », on note la probabilité de la « feuille », c'est-à-dire du chemin complet.

Au-dessus des premières « branches », on note la probabilité de ces « branches ». Au-dessus des suivantes, ce sont des probabilités conditionnelles.

Par le théorème de multiplication, la probabilité d'une « feuille » est le produit des probabilités notées le long des "branches" qui aboutissent à cette « feuille ».

Les « feuille » sont incompatibles entre-elles donc la probabilité d'une réunion de « feuille » est égale à la somme de leurs probabilités.

Exemple : On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules bleues et 3 boules jaunes. On tire 2 boules successivement.

a) Représenter cette situation par un diagramme en arbre.

b) Calculer la probabilité de l'événement A : « Tirer au moins une boule jaune. »

c) Calculer la probabilité de l'événement B : « Tirer une boule bleue puis une boule jaune. »

d) Calculer la probabilité de l'événement C : « Tirer une boule bleue si la première est une boule jaune. »

e) Calculer la probabilité de l'événement D : « La première était une boule jaune si la deuxième est bleue. »

Exemple :

Supposons qu'il existe un test rapide permettant de diagnostiquer un certain virus et qu'on observe que :

$$P(T|V) = 95\% = P(\bar{T}|\bar{V})$$

où T : « La personne réagit positivement au test. » et V : « La personne a le virus. »

On observe, de plus, que 0,5% des personnes testées avaient vraiment le virus.

a) Traduire "en français" ce que signifient $P(T|V)$ et $P(\bar{T}|\bar{V})$.

b) Représenter cette situation par un diagramme en arbre.

c) Calculer $P(V|T)$ et $P(\bar{V}|T)$.

d) Que penser de la valeur de ce test ?

3.4 Espérance mathématique

L'**espérance mathématique d'une variable aléatoire** X est la valeur moyenne de l'expérience aléatoire. On la note $E(X)$. C'est plus précisément une moyenne pondérée selon la probabilité d'obtenir chaque valeur de la variable.

Si la variable aléatoire peut prendre les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$ alors

$$E(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n$$

Exemple : On lance deux dés à six faces simultanément et on considère la variable aléatoire X qui est la somme des valeurs des deux dés. Quelle est l'espérance mathématique de la variable X ?

- a) Faire la liste de toutes les valeurs possibles de X et pour chaque valeur, calculer la probabilité de l'obtenir.

- b) Calculer $E(X)$.

Exemple : On lance deux dés à six faces simultanément et on considère la variable aléatoire Y qui est le nombre de résultats 6 obtenus. Quelle est l'espérance mathématique de la variable Y ?

On peut utiliser l'espérance pour calculer le gain moyen, appelé **espérance de gain**, dans un jeu de hasard. On fait la moyenne des gains et pertes pondérée par les probabilités de les obtenir.

Exemple : Une tombola comporte 200 tickets vendus à 2.– Frs. Parmi ces tickets, un ticket offre le gros lot de 20.– et 15 tickets rapportent 3.– Frs.

Calculer l'espérance de gain pour un joueur de qui achète un ticket à 2.– Frs.

- a) Calculer les probabilités.

- b) Calculer l'espérance de gain.

4 Exercices

4.1 Puissances et racines

Rappel

Exercice 1.1 Calculer sans calculatrice.



- | | | | |
|--------------|-----------------|------------------|----------------|
| a) 9^2 | g) $(-1)^{10}$ | m) $0,01^3$ | s) -700^2 |
| b) 4^3 | h) $(-5)^3$ | n) $(-0,2)^4$ | t) $(-3000)^3$ |
| c) 2^9 | i) -10^6 | o) $1,2^2$ | u) 20^4 |
| d) 7^{-2} | j) $(-15)^{-2}$ | p) $(-0,5)^{-2}$ | |
| e) 5^{-3} | k) $(-4)^{-3}$ | q) $0,1^{-5}$ | |
| f) 10^{-4} | l) $(-3)^{-4}$ | r) $0,7^{-2}$ | |

Exercice 1.2 Calculer sans calculatrice.



- | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\left(\frac{11}{13}\right)^2$ | d) $\left(\frac{19}{21}\right)^{-1}$ | g) $\left(-\frac{12}{7}\right)^0$ |
| b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ | e) $\left(\frac{1}{11}\right)^{-2}$ | h) $\left(-\frac{17}{5}\right)^1$ |
| c) $\left(-\frac{3}{10}\right)^3$ | f) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-3}$ | i) $\left(\frac{1}{11}\right)^{-1}$ |

Exercice 1.3 Simplifier. Répondre avec des exposants positifs uniquement, $a, b \in \mathbb{R}^*$.

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------------|--|
| a) $a^2 \cdot a \cdot a^5$ | e) $\frac{(11a)^2}{a^3}$ | i) $\frac{a^5}{(2a)^5}$ |
| b) $(a^3)^5$ | f) $(a^{-2})^7$ | j) $\left(\frac{9a}{5b^{-2}}\right)^{-1}$ |
| c) $(10a^{-3}b^5)^2$ | g) $\left(-\frac{3a}{b}\right)^4$ | k) $\left(\frac{9a}{5a^2}\right)^{-2}$ |
| d) $\frac{a^4}{a^{-5}}$ | h) $\frac{a^5}{2a^5}$ | l) $\frac{a^4 \cdot ab \cdot a^3}{5(a^2b^{-2})^4}$ |

Exercice 1.4 Calculer sans calculatrice, puis vérifier avec.



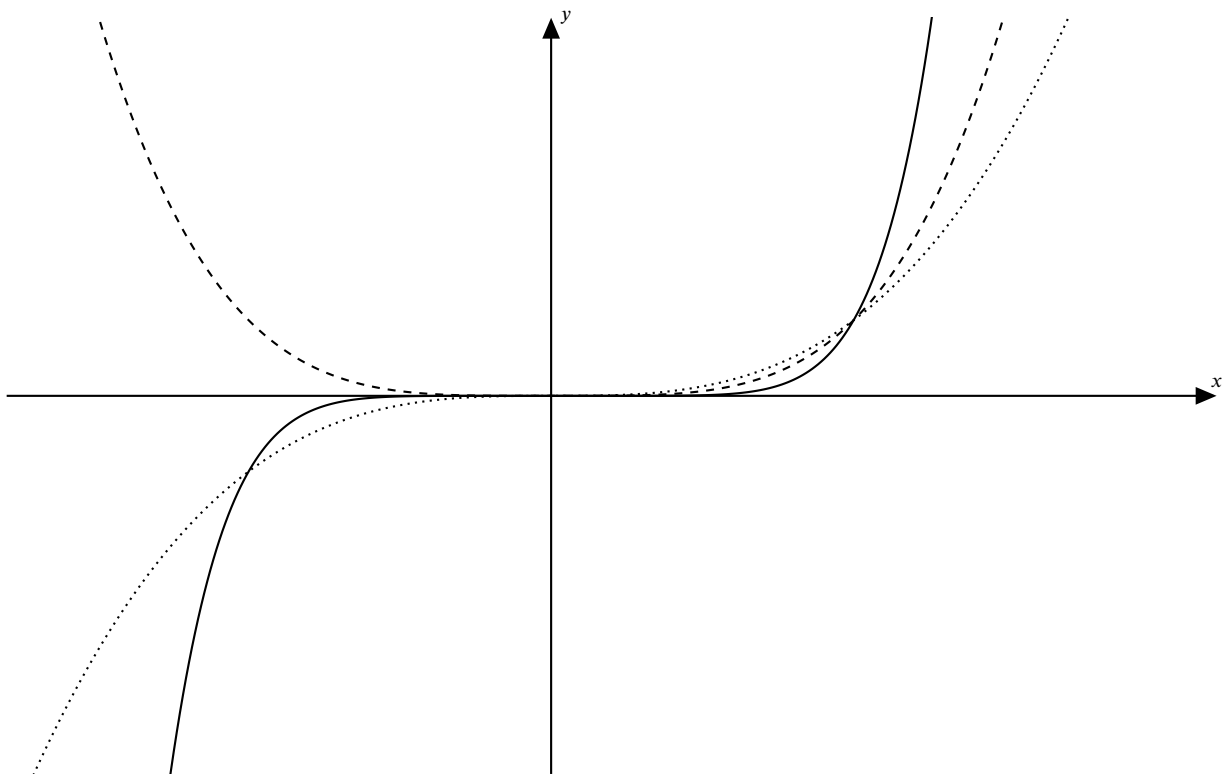
- | | | |
|----------------------------|---|-----------------------|
| a) $4^3 \cdot 2 \cdot 5^7$ | b) $\left(\frac{14^3}{7^3}\right)^{-2}$ | c) $\frac{27^3}{6^9}$ |
|----------------------------|---|-----------------------|

Les fonctions puissances

Exercice 1.5 Sur le graphique ci-dessous, on sait que se trouvent les graphes des fonctions :

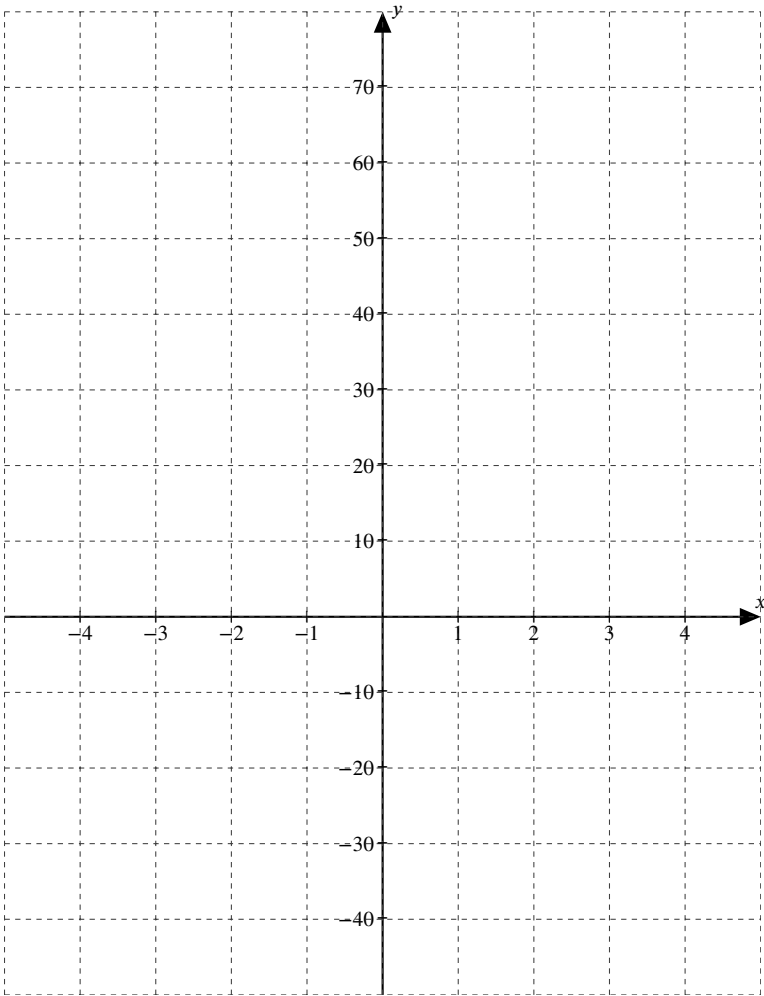
$$f(x) = x^n, \quad g(x) = x^7 \quad \text{et} \quad h(x) = x^3$$

- a) Indiquer à quel graphe correspond chacune de ces fonctions.
- b) Quelles sont les valeurs entières possibles pour n ?
- c) Quelles sont les coordonnées des trois points d'intersection visibles sur ce graphique ?



Exercice 1.6 Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^3									
$\frac{1}{2}x^3$									
$-x^3$									



Exercice 1.7

- a) Exprimer le volume V d'un cube en fonction de son arête x .
- b) Exprimer le volume V d'un cylindre de base de rayon 5 cm en fonction de sa hauteur z .
- c) Exprimer la surface S d'un cube en fonction de son arête x .
- d) Exprimer l'intérêt I d'un capital de CHF 5'000.– placé une année en fonction du taux d'intérêt i .
- e) Exprimer la valeur C_1 d'un capital de CHF 5'000.– placé pendant une année en fonction du taux d'intérêt i .

Exercice 1.8 Résoudre ou calculer.

- | | | |
|------------------|-----------------|---------------|
| a) $x^4 = 16$ | d) $(-4)^2 =$ | g) $x^2 = -9$ |
| b) $x^5 = 7'776$ | e) $(-2)^5 =$ | h) $x^5 = -1$ |
| c) $x^7 = 128$ | f) $x^3 = -125$ | i) $x^2 = 16$ |

Les racines**Exercice 1.9** Calculer sans calculatrice.

- | | | | |
|----------------------|--------------------------|----------------------|------------------------------|
| a) $\sqrt{25}$ | f) $\sqrt[5]{32}$ | k) $\sqrt[3]{0,125}$ | p) $\sqrt[n]{1}$ |
| b) $\sqrt{10'000}$ | g) $\sqrt{1}$ | l) $\sqrt{115^2}$ | q) $\sqrt{-16}$ |
| c) $\sqrt[3]{1'000}$ | h) $\sqrt[3]{8'000'000}$ | m) $\sqrt[4]{5}$ | r) $\sqrt[3]{-8}$ |
| d) $\sqrt[3]{64}$ | i) $\sqrt{0,04}$ | n) $\sqrt[3]{0,027}$ | s) $\sqrt[3]{-0,001}$ |
| e) $\sqrt[4]{81}$ | j) $\sqrt[3]{0,001}$ | o) $\sqrt[5]{0}$ | t) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ |

Exercice 1.10 Vérifier les réponses de l'exercice précédent à l'aide la calculatrice.

Exercice 1.11 Indiquer si l'égalité est vraie ou fausse. (Justifier)

$$\sqrt{2} = \frac{17'131'117}{12'113'529}$$

Exercice 1.12 Pour quels nombres réels x la racine est-elle définie ?

a) $\sqrt[3]{x}$

c) $\sqrt{-x}$

e) $\sqrt[3]{x^3}$

g) $\sqrt{|x|}$

b) $\sqrt{x}$

d) $\sqrt{x^2}$

f) $\sqrt[5]{-x}$

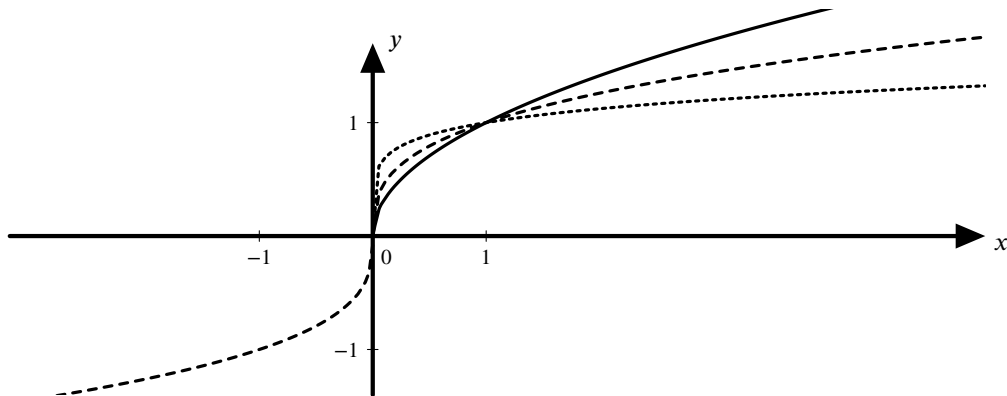
h) $\sqrt{x-2}$

Les fonctions racines

Exercice 1.13 Sur le graphique ci-dessous, on sait que se trouvent les graphes des fonctions :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = \sqrt[6]{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{x}$$

- Comparer l'image de 1'000'000 par ces trois fonctions.
- Indiquer à quel graphe correspond chacune de ces fonctions.
- Esquisser la fonction $i(x) = \sqrt[9]{x}$ sur le graphique.
- Quelles sont les coordonnées des trois points d'intersection visibles sur le graphique ?



Propriétés**Exercice 1.14** Sans utiliser la calculatrice, indiquer si l'égalité est vraie ou fausse.

a) $\sqrt{9} = 3$

f) $\sqrt{(-3)^2} = -3$

k) $\sqrt{2^2 + 3^2} = 2 + 3$

b) $\sqrt{-9} = -3$

g) $\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$

l) $\sqrt{(-3)^2} = 3$

c) $\sqrt{9} = -3$

h) $\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$

m) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3$

d) $-\sqrt{9} = -3$

i) $\sqrt{8-5} = \sqrt{8} - \sqrt{5}$

n) $\sqrt[3]{-10} = -\sqrt[3]{10}$

e) $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$

j) $\sqrt{7 \cdot 19} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{19}$

o) $\sqrt{\frac{7}{19}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{19}}$

Exercice 1.15 Indiquer si l'assertion est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

a) $\sqrt{x^2} = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) $\sqrt[5]{x^5} = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

c) $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

d) $\sqrt{x^2} = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

Exercice 1.16 Calculer sans calculatrice.

a) $\sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{-4}$

d) $\sqrt{16+9}$

g) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{\frac{2}{15}}$

e) $\sqrt[4]{16^3}$

h) $(\sqrt{13})^3$

c) $\sqrt{36^3}$

f) $\sqrt{25 \cdot 36}$

i) $(3\sqrt{5})^2$

Exercice 1.17 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier.

a) $\sqrt{ab^2c^3}$

b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{9a}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{a^6bc^5}{27b^4c^2}}$

Exercice 1.18 Extraire les facteurs carrés ou cubiques des racines.

a) $\sqrt{24}$

d) $\sqrt[3]{3'000}$

g) $\sqrt{125}$

j) $\sqrt{250}$

b) $\sqrt{54}$

e) $\sqrt[3]{8}$

h) $\sqrt[3]{125}$

k) $\sqrt{1000}$

c) $\sqrt{200}$

f) $\sqrt{50}$

i) $\sqrt[3]{250}$

l) $\sqrt[3]{54}$

Exercice 1.19 Effectuer et simplifier sans calculatrice.



a) $3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$

f) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

k) $5\sqrt{45} - 3\sqrt{40}$

b) $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$

g) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}$

l) $2\sqrt{40} - 2\sqrt{90}$

c) $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

h) $2\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$

m) $(4 - \sqrt{43})\sqrt{43}$

d) $3\sqrt{7} - \sqrt{7}$

i) $2\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$

n) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$

e) $3\sqrt{7} + \sqrt{5} - 2\sqrt{7} - 8\sqrt{5}$

j) $3\sqrt{5} - 7\sqrt{20}$

o) $(4 + \sqrt{35})(2 - \sqrt{5})$

Exercice 1.20 Rendre entiers les dénominateurs et simplifier.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

g) $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

b) $\frac{5}{\sqrt{7}}$

e) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$

h) $\frac{2 - \sqrt{13}}{\sqrt{13}}$

c) $\frac{6}{\sqrt{2}}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{10}}$

i) $\frac{1 + \sqrt{a}}{3\sqrt{c}}$ avec $a, c > 0$

Exercice 1.21 Rendre entiers les dénominateurs et simplifier.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

b) $\frac{32}{\sqrt[5]{2}}$

c) $\frac{6}{\sqrt[5]{3^2}}$

Les puissances rationnelles**Exercice 1.22** Écrire sous forme de racine. $a \in \mathbb{R}_+^*$.

a) $7^{1/4}$

e) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1/2}$

i) $a^{0,6}$

b) $5^{2/3}$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

j) $a^{7/5}$

c) $11^{-1/2}$

g) $a^{5/7}$

k) $-a^{4/3}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3/4}$

h) $a^{-1/2}$

l) $(-a)^{9/4}$

Exercice 1.23 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Écrire sous forme de puissance.

a) $\sqrt[5]{7^3}$

g) $\sqrt[5]{a^7}$

n) $\sqrt[8]{\frac{1}{13}}$

b) $\sqrt[3]{5}$

h) $\sqrt[3]{a^3}$

o) $\sqrt{-13}$

c) $\sqrt{a^9}$

i) $(\sqrt[5]{a})^4$

p) $-\sqrt{a}$

d) $\sqrt[10]{11^2}$

j) $\sqrt[4]{a^{12}}$

q) $\frac{1}{\sqrt{a}}$

e) $\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$

k) $\sqrt[10]{7^6}$

r) $\sqrt[3]{-a}$

f) $\frac{1}{\sqrt{a}}$

l) $-\sqrt[4]{2^8}$

s) $-\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$

m) $\sqrt{a^3}$

Exercice 1.24 Calculer sans calculatrice.

a) $16^{1/4}$

e) $(-5)^{-1/3}$

i) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-1/2}$

b) $(-125)^{1/3}$

f) $9^{-1/2}$

j) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1/3}$

c) $32^{1/5}$

g) $7^{-1/2}$

k) $-4^{0,5}$

d) $8^{-1/3}$

h) $12^{-1/2}$

l) $(-4)^{0,5}$

Exercice 1.25 Ecrire sous la forme 2^x .

a) 16

c) $\sqrt{8}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{8}$

d) $\sqrt[7]{32}$

f) $16\sqrt[3]{2}$

Exercice 1.26 Soit $a \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions sans calculatrice.



a) $5^{1/7} \cdot 5^{2/21}$

e) $\left(\frac{a}{64}\right)^{2/3}$

i) $a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$

b) $(5^{1/7})^{2/21}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$

j) $\frac{\sqrt{a}}{a}$

c) $3 \cdot 9^{3/4}$

g) $\sqrt[3]{1'000'000a^6}$

k) $(\sqrt[n]{a})^{3n}$

d) $\left(\frac{2}{3}a^{2/3}\right)^3$

h) $a\sqrt[3]{a}$

l) $\frac{\sqrt{a}}{a^{-1/5}}$

Exercice 1.27 Calculer.

a) $A = 8^{2/3} + 16^{1/2} + 27^{2/3} + 81^{1/4} - 125^{1/3} - 1'000^{2/3}$

b) $B = \frac{5a^{1/3}}{2 + \sqrt{5b}}$ avec $a = 729$ et $b = 125$

Exercice 1.28 Soit $a, c \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier les expressions.

a) $a^{3/2} \cdot a^{-4/3}$

b) $c^2 (a^{-1/2} \cdot c)^{-2}$

Exercice 1.29 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier. Répondre à l'aide de puissances, avec des exposants positifs.

a) $a^{3/4} \cdot a^{-1/2}$

e) $\frac{a^{-3}}{a^{-5}}$

i) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^5}$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$

f) $(-a^{-3})^2$

j) $a^4 \cdot a^{-3/2} \cdot a^0$

c) $(a^{-3}b^2)^5$

g) $a^8 \cdot a^{-5} \cdot a^2$

k) $a^{1/2} \cdot a^{1/3}$

d) $\left((\sqrt[5]{a})^2\right)^3$

h) $(-a^{-2})^3$

l) $\left(\frac{a^2}{b^{-3}}\right)^{-5}$

Exercice 1.30 Calculer sans calculatrice. Répondre à l'aide d'une racine si nécessaire.



a) $(5^2 - 64^{2/3})^{1/2}$

f) $3^7 \cdot (-3)^7 \cdot \frac{1}{9^5}$

k) $(2^0)^{-1/3}$

b) $4 \cdot 25^{3/2}$

g) $(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})$

l) $\sqrt{\frac{5^{1/3}}{36}}$

c) $(4 \cdot 25)^{3/2}$

h) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{10}$

m) $\sqrt{24} \cdot 6^{1/2}$

d) $\frac{3^6}{3^2}$

i) $\frac{4 + \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

n) $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$

e) $2^{-4} \cdot 2 \cdot 8^2$

j) $\sqrt{144^{-1}}$

Exercice 1.31 Calculer à l'aide de la calculatrice. Précision à trois décimales si nécessaire.

a) $1,003^{17/2}$

d) $\sqrt[3]{(-7)^4}$

g) $\frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

b) $-9^{2/5}$

e) $\sqrt{7,5^2 - 4^{-1}}$

h) $13'000(1 + 0,15\%)^{9/4}$

c) $\sqrt[5]{6'436'343}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{64^{1/4}}$

i) $\frac{5 - 2^{\frac{1}{3}}}{2\sqrt{5,8}}$

Résolution d'équations

Exercice 1.32 Résoudre dans $\mathbb{R}$ sans calculatrice.



a) $x^3 = 125$

c) $x^2 = 9$

e) $x^4 = 81$

b) $x^3 = -125$

d) $x^2 = -9$

f) $x^4 = -81$

Exercice 1.33 Résoudre dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la calculatrice. Précision à trois décimales si nécessaire.

a) $x^3 = 19$

d) $x^2 = -7$

g) $x^7 = 279'936$

b) $x^3 = -19$

e) $x^4 = 2,0736$

h) $x^6 = 6,192$

c) $x^2 = 7$

f) $x^4 = -2,0736$

i) $x^{13} = 100\%$

Exercice 1.34 Résoudre en valeur exacte dans $\mathbb{R}$ sans calculatrice.



a) $x^{-3} = 0,008$

b) $x^{-3} = -0,008$

c) $x^{-2} = \frac{25}{196}$

Exercice 1.35 Résoudre dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la calculatrice. Précision à trois décimales si nécessaire.

a) $x^{-3} = 0,296$

b) $x^{-9} = 0,1938$

c) $x^{-4} = -\frac{1}{625}$

Exercice 1.36 Résoudre dans $\mathbb{R}_+$. Précision à trois décimales si nécessaire.

a) $x^{5/2} = 100'000$

d) $x^{5/3} = 1,5485$

g) $x^{0,5} = 1,5$

b) $x^{-1,5} = \frac{1}{8}$

e) $x^{-3/2} = 0,125$

h) $x^{3,5} = 160'085,25$

c) $x^{3/4} = 64$

f) $x^{1,5} = 27$

i) $x^{-1,25} = 0,03125$

Exercice 1.37 Résoudre dans $\mathbb{R}_+$. Précision à trois décimales si nécessaire.

a) $8 \cdot x^3 = 1'000$

c) $-2 \cdot x^4 = -2,0736$

e) $500 \cdot x^{12} = 1'569$

b) $\frac{2}{5} \cdot x^3 = 3,2$

d) $0,5 \cdot x^6 = 13$

f) $100 \cdot x^{21,3} = 10'252,5$

Exercice 1.38 Résoudre dans $\mathbb{R}_+$. Précision à trois décimales si nécessaire.

a) $3 + 8 \cdot x^3 = 1'003$

d) $22,8 - 0,5 \cdot x^9 = 3,5783$

g) $(1+x)^5 = 1,1041$

b) $-7 + \frac{2}{5} \cdot x^3 = 10,2$

e) $-20 - 1,5 \cdot x^{2/5} = -26$

h) $(1+x)^{13/2} = 1,07158$

c) $100 + 100 \cdot x^4 = 208,24$

f) $5,8 - 34,5 \cdot x^{-3} = -24$

i) $8000 \cdot (1+x)^{7/4} = 8056$

4.2 Exponentielles et logarithmes

Exponentielles

Exercice 2.1 Je plie une feuille de 0,1 mm d'épaisseur en deux, puis je replie en deux, et je continue de la même manière.

a) Compléter le tableau ci-dessous :

n° de l'étape	nb de couches de papier	épaisseur totale en mm
0	1	0,1
1		
2		
3		
4		
x		

b) Combien de fois faut-il plier pour dépasser 1 km d'épaisseur ?

Définition

Exercice 2.2 Donner l'expression de la fonction.

a) $\exp_3(x)$

c) $\exp_{1/3}(-x)$

b) $\exp_x(3)$

d) $\exp(x)$

Est-ce que toutes les fonctions ci-dessus sont des fonctions exponentielles ?



Exercice 2.3 Calculer sans calculatrice.

- | | | |
|---|-----------------------------|--|
| a) $\exp_{15}(2)$ | h) $\exp(-5)$ | o) $\exp(0)$ |
| b) $\exp_7(-2)$ | i) $\exp_{4/5}(-1)$ | p) $\exp_{1/2}(2)$ |
| c) $\exp_2(-7)$ | j) $\exp_{100'000}(0,2)$ | q) $\exp_2\left(\frac{1}{2}\right)$ |
| d) $\exp_{27}\left(\frac{1}{3}\right)$ | k) $\exp_{1/100'000}(0,2)$ | r) $\exp_{1/2}(-2)$ |
| e) $\exp_{16}\left(-\frac{1}{4}\right)$ | l) $\exp_{100'000}(-0,2)$ | s) $\exp_2\left(-\frac{1}{2}\right)$ |
| f) $\exp_{10}(2)$ | m) $\exp_{1/100'000}(-0,2)$ | t) $\exp_{36/49}\left(-\frac{1}{2}\right)$ |
| g) $\exp_2(10)$ | n) $\exp(1)$ | u) $\exp_7\left(\frac{1}{3}\right)$ |



Exercice 2.4 Compléter le tableau de valeurs, sans utiliser de calculatrice.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$\exp_{100}(x)$									



Exercice 2.5 Compléter le tableau de valeurs, sans utiliser de calculatrice.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$
$\exp_{1/64}(x)$									

Propriétés

Exercice 2.6 Remplacer les "... " par un nombre entier ou une fraction irréductible.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $2^5 \cdot 8^3 = 2^{\dots}$ | d) $\frac{3^5 \cdot 3^4}{3^{-6}} \cdot 3^{-3} = 3^{\dots}$ | g) $\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[5]{3^4}} = 3^{\dots}$ |
| b) $3^5 \cdot \frac{1}{3^3} = 3^{\dots}$ | e) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = 5^{\dots}$ | h) $\left(\sqrt{7^3}\right)^5 \cdot \sqrt{7} = 7^{\dots}$ |
| c) $(3^3)^2 = 9^{\dots}$ | f) $\sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt{4^3} = 4^{\dots}$ | i) $\frac{\sqrt[4]{7^2}}{7^3} \sqrt[3]{7^4} = 7^{\dots}$ |

Exercice 2.7 Simplifier les expressions suivantes.

a) $9 \cdot 3^{4x-2}$

c) $\frac{32^x \cdot 2^5}{16^{x+1}}$

e) $\frac{1}{49} (7^{x+1})^x$

b) $\frac{5^{2x+7}}{5^{x-3}}$

d) $\frac{2^x + 6^x}{2^x}$

f) $(3^x \cdot 3)^2 \cdot 3^{4x-2}$

Exercice 2.8 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Compléter les expressions suivantes.

a) $\frac{a^x}{a^3} = a^{(\dots)} = \frac{1}{a^{(\dots)}}$

e) $\frac{a^x}{a^{x+3}} = a^{(\dots)}$

b) $\frac{a}{\sqrt[5]{a^x}} = a^{(\dots)}$

f) $a^{2x} \cdot (a^x)^{x+3} = a^{(\dots)}$

c) $\sqrt{a} \cdot a^{x+2} = a^{(\dots)}$

g) $\left(\frac{a^{x+1}}{a^2}\right)^{x-4} = a^{(\dots)}$

d) $(a^{2x+1})^{2x+1} = a^{(\dots)}$

h) $(a-3)^x \cdot (a+3)^x = (\dots)^x$

Équations exponentielles

Exercice 2.9 Résoudre les équations suivantes.

a) $25^{x+3} = 625$

f) $(10^{x+5})^2 = 0,001$

k) $5^{2x+4} - 125^x = 0$

b) $13^{3x-6} = 1$

g) $(2^{x-1})^x - 4 = 0$

l) $4^{3x} \cdot 16^{2x} = \sqrt{2}$

c) $2^{5x-2} = 4^{8-x}$

h) $3^{x-1} + 27 = 0$

m) $(5^{x-1})^x - 125^x = 0$

d) $\frac{6^{4-x}}{3^{4-x}} = 1024$

i) $\frac{11^{2x}}{121^x} = 1$

n) $2^{3x-2} \cdot 5^{3x-2} = 10'000$

e) $\frac{9^{3+x}}{3^x} = 0$

j) $\frac{7^{4x+5}}{49^{x-9}} = 7$

o) $6^{3x-2} - 6^{3x-4} = 0$

Exercice 2.10 Résoudre les équations suivantes.

a) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 20 = 0$

c) $16^x - 20 \cdot 4^x + 64 = 0$

b) $10 \cdot 3^x + 9^x = -90$

d) $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} = 32$

Exercice 2.11 Résoudre les équations suivantes.

a) $2 \cdot 5^{-x} - 5^x = 1$

b) $4 \cdot 2^{-3x} - 5 \cdot 2^{-x} + 2^x = 0$

Exercice 2.12 Résoudre les équations suivantes.

a) $2^{x+6} = 2^{3x+4}$

e) $2^x - 16 \cdot 2^{3x+2} = 0$

i) $3 \cdot 2^{2(x+1)} - 10 \cdot 2^{x+2} = 32$

b) $7^{8x^2+4} = 7^{(2-3x)^2}$

f) $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

j) $2 \cdot 2^{6x-1} + 3 \cdot 2^{3x+1} + 9 = 0$

c) $4^x = 16^{2x+5}$

g) $27^{x+2} = 3^{5x+8}$

k) $3^x + 9^x = 90$

d) $7^{2x+1} = 1$

h) $\frac{16^x \cdot 125^x}{5} = \frac{10^4}{5^{x+1}}$

l) $3^{x+1} + 3^{-x} = 4$

Logarithmes

Exercice 2.13 Résoudre les équations sans calculatrice.



a) $3^{x+1} = 81$

i) $3^{x-1} + 27 = 0$

b) $25^{x+3} = 625$

j) $\frac{11^{2x}}{121^x} = 1$

c) $13^{3x-6} = 1$

k) $5^{2x+4} - 125^x = 0$

d) $2^{5x-2} = 4^{8-x}$

l) $\frac{7^{4x+5}}{49^{x-9}} = 7$

e) $\frac{6^{4-x}}{3^{4-x}} = 1024$

m) $4^{3x} \cdot 16^{2x} = \sqrt{2}$

f) $\frac{9^{3+x}}{3^x} = 0$

n) $(5^{x-1})^x - 125^x = 0$

g) $(10^{x+5})^2 = 0,001$

o) $2^{3x-2} \cdot 5^{3x-2} = 10'000$

h) $(2^{x-1})^x - 4 = 0$

p) $6^{3x-2} - 6^{3x-4} = 0$

Exercice 2.14 Calculer sans calculatrice.



a) $\log_2(64) =$

d) $\log_7(1) =$

b) $\log_5(625) =$

e) $\log_9(3) =$

c) $\log_{11}(121) =$

f) $\log_2(0,5) =$

Exercice 2.15 Calculer sans calculatrice.



a) $\log(1'000'000) =$

d) $\log\left(\frac{1}{1000}\right) =$

b) $\log(0,01) =$

e) $\log(\sqrt{10}) =$

c) $\log(1) =$

f) $\log(\sqrt[5]{1000}) =$

g) $\log(10) =$

h) $\log\left(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right) =$

Exercice 2.16 Calculer sans calculatrice.

a) $\log_2(8) =$

d) $\log_{64}(4) =$

b) $\log_8(2) =$

e) $\log_4(8) =$

c) $\log_5(-5) =$

f) $\log_{625}(125) =$

Exercice 2.17 Calculer sans calculatrice.

a) $\log_2(40) + \log_2(3) - \log_2(15) =$

c) $3\log_{25}(40) - \log_{25}(64) - \log_{25}(8) =$

b) $\log(14) - \log(2000) - \log(70) =$

d) $4\log_3(10) - 2\log_3(8100) =$

Exercice 2.18 À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approximative.

a) $\log_2(40) \approx$

c) $\log(70) \approx$

b) $\log_{40}(2) \approx$

d) $\ln(3) \approx$

Exercice 2.19 Résoudre. Donner la réponse sous forme exacte.

a) $17^x + 1 = 10$

d) $5 \cdot 2^{3x+1} - 3 = 167$

b) $17^{x+1} = 10$

e) $5^{x+8} = 3 \cdot 5^{2x}$

c) $7 + 10^{3x-6} = 9$

f) $7^{3x} = \frac{7^{x+1}}{8}$

Exercice 2.20 Résoudre. Donner la réponse sous forme exacte, puis au centième près.

a) $5 \cdot (1+x)^3 = 1000$

f) $5 \cdot (1+0,2)^{x/3} = 1000$

b) $x \cdot (1+0,2)^3 = 1000$

g) $7 \cdot (1+x)^4 = 300$

c) $5 \cdot (1+0,2)^x = 1000$

h) $7 \cdot (1+0,5)^{4x} = 300$

d) $5 \cdot (1+0,2)^3 = x$

i) $7 \cdot (1+0,5)^{x/4} = 300$

e) $5 \cdot (1+0,2)^{3/x} = 1000$

j) $7 \cdot (1+0,5)^{4/x} = 300$

Exercice 2.21 Après combien d'années, un capital de 3000 Frs peut-il atteindre 5000 Frs au taux d'intérêt composé de 3% ?

Exercice 2.22 Au bout de combien d'années une somme placée à 6% triple-t-elle ?

Exercice 2.23 On place un capital de 10'000 Frs pendant 2 ans au taux d'intérêt composé annuel de 1,2%.

- a) Combien de mois faut-il placer le même capital si on veut obtenir la même somme finale au taux d'intérêt composé mensuel de 0,1% ?
- b) À quel taux d'intérêt composé mensuel faut-il placer le capital pour une durée de 2 ans si on veut obtenir la même somme finale ?

Exercice 2.24 Résoudre en valeur exacte.

- a) $\log(2x + 1) = 5$
- b) $2\log_{25}(x) - 3 = 0$
- c) $3\log_{64}(x + 1) = -1$
- d) $\log_7(2x) = 0$

Exercice 2.25 Résoudre en valeur exacte.

- a) $\log(x - 4) = \log(10 - x)$
- b) $\log_2(x - 4) = \log_2(2 - x)$
- c) $2\log(x - 3) = \log(25 - 6x)$
- d) $\log_2(x^2 + 3) = \log_2(4x)$

Exercice 2.26 Résoudre.

- a) $\log(x - 3) + \log(x) = 1$
- b) $\log_2(5 - x) + \log_2(x + 5) = 4$
- c) $\log_3(x + 10) - \log_3(x) = 1$
- d) $\log_3(x - 10) - \log_3(x) = 1$

4.3 Probabilités

Premières notions

Exercice 3.1 On lance simultanément deux dés, un blanc et un rouge, numérotés chacun de 1 à 6. On note à chaque tirage la somme des points obtenus sur la face supérieure de chaque dé.

Ci-dessous, vous trouvez les résultats d'une expérience pratique lors de laquelle les dés ont été lancés 500 fois de suite.

Somme des points	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nb d'apparitions	13	28	43	58	72	85	66	55	40	26	14

- a) Calculer à quelle fréquence (en %) est apparue la somme 2.
- b) Calculer à quelle fréquence (en %) est apparue la somme 8.
- c) Décrire l'ensemble de tous les tirages dont la somme vaut 2.
- d) Décrire l'ensemble de tous les tirages dont la somme vaut 8.
- e) Combien y a-t-il de tirages possibles au total ?
- f) Peut-on prédire, sans expérience pratique, la fréquence d'apparition de la somme 2 ?
- g) Peut-on prédire, sans expérience pratique, la fréquence d'apparition de la somme 8 ?

Exercice 3.2 Décrire l'univers des expériences aléatoires ci-dessous. Les événements élémentaires sont-ils équiprobables ?

- a) Jeter une pièce 2 fois
- b) Jeter 2 pièces identiques simultanément
- c) Obtenir un nombre en additionnant les résultats de deux dés
- d) Lancer deux dés différents

Exercice 3.3 On lance une pièce de monnaie et l'on note le résultat obtenu (pile ou face).

- a) Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.
- b) Quelle est la probabilité que le résultat soit pile ?
- c) On lance la pièce deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois pile ?
- d) Lors d'un premier lancer, le résultat est pile. Quelle est la probabilité d'obtenir pile lors d'un deuxième lancer ?

Exercice 3.4 Il y a 5 calculatrices défectueuses sur un lot de 25 calculatrices. On en choisit 4 au hasard. Calculer la probabilité que toutes les calculatrices choisies fonctionnent.

Exercice 3.5 On dispose de 26 jetons, gravés avec les 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement et sans remise trois jetons. Calculer la probabilité d'obtenir :

- a) un mot de trois consonnes ;
- b) un mot de trois voyelles ;
- c) le mot *BAC* ;
- d) le mot *BAC* ou l'une de ses anagrammes.

Exercice 3.6 Un paquet de douze cartes est composé de quatre rois, quatre dames et quatre valets. On tire cinq cartes simultanément. Calculer la probabilité de tirer :

- a) 2 rois, 2 dames et un valet
- b) les quatre rois
- c) au moins une dame

Exercice 3.7 Calculer la probabilité de gagner à la loterie suisse à numéros (6 nombres tirés parmi 45).

Exercice 3.8 Une urne contient 70 boules numérotées de 1 à 70. On tire simultanément trois boules. Calculer la probabilité que, parmi ces trois nombres :

- a) figurent deux multiples de 5 ;
- b) ne figure aucun carré parfait ;
- c) figure au moins un carré parfait.

Exercice 3.9 D'un jeu de cartes de Jass, on retire les six. (Le jeu contient donc 32 cartes.) Puis, on distribue une main de huit cartes.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- a) *A* : « La main contient l'as de cœur. »
- b) *B* : « La main ne contient aucun as. »
- c) *C* : « La main contient au moins un as. »

Exercice 3.10 Un sac contient douze objets différents, dont trois rouges, quatre bleus et cinq jaunes. On tire simultanément trois objets au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :

- a) *A* : « Les trois objets sont jaunes. »
- b) *B* : « Il y a un objet de chaque couleur. »
- c) *C* : « Aucun objet n'est rouge. »
- d) *D* : « Il y a au moins un objet rouge. »
- e) *E* : « Il y a au moins un objet bleu. »
- f) *F* : « Il y a au plus un objet bleu. »

Exercice 3.11 D'un jeu de Jass traditionnel (36 cartes), on distribue au hasard une main de cinq cartes. Calculer la probabilité que la main tirée contienne :

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a) cinq carreaux ; | f) trois rois et deux dames ; |
| b) deux carreaux et trois cœurs ; | g) aucun roi ; |
| c) cinq carreaux ou cinq cœurs ; | h) au moins un roi ; |
| d) cinq cartes de la même famille ; | i) au plus un roi ; |
| e) quatre rois ; | j) trois cartes d'une famille et 2 cartes d'une autre famille. |

Opérations sur les événements et diagrammes de Venn

Exercice 3.12 On lance trois fois une pièce de monnaie et l'on note les résultats obtenus, par exemple *PPF*.

Déterminer :

- a) l'univers U de cette expérience aléatoire ;
- b) l'événement A : « Pile sort en premier. » ;
- c) l'événement B : « Face ne sort pas au deuxième lancer. » ;
- d) l'événement C : « Obtenir au moins deux fois face. » ;
- e) l'événement $\bar{A}$, puis énoncer l'événement sous forme d'une phrase ;
- f) l'événement $A \cap B$, puis énoncer l'événement sous forme d'une phrase ;
- g) l'événement $A \cup B$, puis énoncer l'événement sous forme d'une phrase.

Exercice 3.13 Un magasin accepte les cartes de crédit American Express ou VISA. Parmi les clients du magasin, 74% possèdent au moins une de ces cartes, 24% ont des cartes American Express et 61% la carte VISA.

Quel pourcentage représentent les clients qui possèdent les deux cartes ?

Exercice 3.14 Un appareil, fabriqué en très grande série, peut être défectueux à cause de deux défauts différents désignés par A et B . 10% des appareils ont le défaut A , 8% le défaut B et 4% les deux défauts simultanément. Un client achète l'un des appareils produits.

Représenter la situation dans un diagramme de Venn. Puis calculer :

- a) la probabilité que cet appareil ne présente aucun défaut ;
- b) la probabilité que cet appareil ne présente que le défaut A ;
- c) la probabilité que cet appareil ne présente que le défaut B .

Exercice 3.15 Une agence de voyages fait un sondage statistique sur la connaissance de trois pays : l'Arménie, la Birmanie et le Chili. On constate que parmi les personnes interrogées, 42% connaissent l'Arménie, 55% connaissent la Birmanie, 34% connaissent le Chili, 10% ne connaissent que l'Arménie et la Birmanie, 2% ne connaissent que l'Arménie et le Chili, 27% connaissent au moins deux de ces pays, 35% connaissent exactement deux de ces pays. Un voyage est prévu pour l'une des personnes qui ont répondu aux questions posées à l'occasion de ce sondage. On tire au sort le nom du gagnant. Tous les noms ont la même probabilité d'être tirés. Quelle est la probabilité pour que le gagnant soit une personne :

- a) connaissant au moins l'un des trois pays ?
- b) ne connaissant aucun des trois pays ?
- c) connaissant exactement un des trois pays ?
- d) connaissant uniquement l'Arménie ?
- e) connaissant l'Arménie et la Birmanie, mais pas le Chili ?
- f) connaissant la Birmanie ou le Chili, mais pas l'Arménie ?

Exercice 3.16 Dans une classe de gymnase, il y a neuf garçons et six filles. Parmi ces quinze élèves, six ont choisi au moins l'option philosophie, cinq au moins la chimie et deux ont pris à la fois la chimie et la philosophie.

- a) Calculer le nombre d'élèves qui n'ont choisi aucune de ces deux options.
- b) En choisissant au hasard un élève de cette classe, quelle est la probabilité qu'il ait pris exactement une des deux options ?

Diagrammes en arbre

Exercice 3.17 Un sac contient quatre billes rouges, deux billes bleues et trois billes vertes. On tire successivement et sans remise deux billes. Représenter la situation à l'aide d'un arbre puis calculer la probabilité des événements suivants :

- a) A : « Les deux billes tirées sont rouges. »
- b) B : « La première bille est bleue et la seconde est verte. »
- c) C : « Une des billes tirées est rouge, l'autre est bleue. »

Exercice 3.18 Une urne contient au départ cinq boules blanches et sept noires. Chaque fois que l'on tire une boule, on note sa couleur, puis on la réintroduit ainsi que deux nouvelles boules de la même couleur qu'elle.

Quelle est la probabilité que les deux premières boules tirées soient noires, puis les deux suivantes blanches ?

Exercice 3.19 Curieux climat que celui de la petite île d'Eigoloroetem. Il y fait : soit beau toute la journée, soit mauvais toute la journée. L'affirmation « demain, il fera le même temps qu'aujourd'hui » est vraie dans 70% des cas. Il y a fait beau le vendredi de Pâques, calculer la probabilité des événements suivants :

- a) A : « Il a fait beau le dimanche de Pâques. »
- b) B : « Il a fait beau le samedi et le dimanche de Pâques. »
- c) C : « Il a fait beau le samedi ou le dimanche de Pâques. »

Exercice 3.20 L'éclairage d'une pièce nécessite l'emploi de deux lampes A et B différentes. Les probabilités de défaillance de ces lampes après 100 heures d'utilisation sont de 0,12 pour A et 0,18 pour B .

- a) Représenter la situation par un arbre.
- b) Calculer la probabilité pour que les deux lampes tombent en panne toutes les deux.
- c) En déduire la probabilité pour avoir au moins une lampe qui fonctionne.
- d) Quelle est la probabilité pour qu'exactly une lampe tombe en panne ?

Exercice 3.21 Un service d'urgence comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée est de 90%, celle que toutes deux soient occupées de 50%.

Quelle est la probabilité des événements suivants ?

- a) A : « La première salle est libre. »
- b) B : « Les deux salles sont libres. »
- c) C : « Au moins une des deux salles est libre. »
- d) D : « Une seule salle est libre. »
- e) E : « La deuxième salle est libre sachant que la première est occupée. »

Espérance mathématique

Exercice 3.22 On lance une pièce 3 fois de suite et on s'intéresse au nombre de « faces » qui apparaissent.

- a) Déterminer la variable aléatoire X .
- b) Quelles valeurs peut prendre cette variable aléatoire ?
- c) Déterminer la probabilité pour chaque valeur prise de X .
- d) Calculer $E(X)$.
- e) Quel sens peut-on donner à $E(X)$?

Exercice 3.23 Trouver l'espérance des variables aléatoires dont les distributions sont données ci-dessous :

a)

x_i	0	2	3	4	5	6
p_i	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2

b)

x_i	98	99	100	101
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Exercice 3.24 Un jeu consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de Jass à 36 cartes. Un joueur mise une somme de 1.– Frs avant de tirer une carte.

- Si le joueur tire un as, il gagne 5.– Frs.
- Si le joueur tire un roi, il gagne 2.– Frs.
- Si le joueur tire une dame ou un valet, il gagne 1.– Frs.
- Si le joueur tire une autre carte, il ne gagne rien.

Calculer l'espérance de gain du joueur.

Exercice 3.25 Une usine fabrique 1000 pièces par jour. Le nombre X de pièces défectueuses produites par jour a été mesuré empiriquement par la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,3	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1

- a) Calculer l'espérance du nombre de pièces défectueuses.
- b) Si chaque pièce défectueuse occasionne 10 Frs de frais de rectification, calculer le coût moyen des rectifications.

Exercice 3.26 On lance un dé à six faces et on regarde le résultat :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 Frs.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 Frs.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 Frs.

- a) Déterminer la variable aléatoire X .
- b) Quelles valeurs peut prendre cette variable aléatoire ?
- c) Calculer la probabilité pour chaque valeur.
- d) Calculer et interpréter $E(X)$

Exercice 3.27 La roulette « européenne » des casinos comporte 37 cases numérotées de 0 à 37 dont 18 sont rouges, 18 sont noires et la case 0 est verte.

Il y a trois manières de faire d'y jouer.

- On peut choisir un numéro et on gagne 35 fois sa mise si la bille s'arrête sur le bon numéro.
- On peut choisir rouge ou noir et on gagne deux fois sa mise si la bille s'arrête sur une case de la bonne couleur.
- On peut choisir pair ou impair et on gagne deux fois sa mise si la bille s'arrête sur un numéro de la bonne parité. (Le zéro n'est ni pair ni impair.)

- a) Calculer l'espérance de gain si on mise 1.– Frs sur un numéro.
- b) Calculer l'espérance de gain si on mise 1.– Frs sur une couleur.
- c) Calculer l'espérance de gain si on mise 1.– Frs sur pair ou impair.
- d) La roulette « américaine » comporte une case supplémentaire 00 qui est verte et n'est ni pair ni impaire. Pouvez-vous expliquer l'intérêt de cette case en plus pour le casino ?

Exercice 3.28 Vous voulez organiser une tombola pour financer un projet humanitaire. Vous avez à disposition 100 tickets dont 5 rapportent 1 Frs, 3 rapportent 5 Frs et 1 rapportent 30 Frs.

La loi dit : « la valeur minimale des gains est de 50% de la somme totale des mises »

- a) Quel doit être le prix maximal du ticket pour respecter la loi ?
- b) Calculer l'espérance de gain d'un joueur qui achète un ticket.
- c) Comment réinterpréter la loi en utilisant l'espérance de gain ?

Exercice 3.29 Jeu américain : un joueur choisit un nombre entier entre 1 et 6.

On jette 3 dés. Si le nombre choisi sort 1, 2 ou 3 fois, le joueur gagne 1, 2 ou 3 fois sa mise en plus de celle-ci. Sinon, il perd sa mise.

Un joueur joue à ce jeu et mise 10 Frs sur le 3.

- a) Déterminer la variable aléatoire X .
- b) Quelles valeurs peut prendre cette variable aléatoire ?
- c) Faire un arbre représentant la situation.
- d) Calculer la probabilité de chaque valeur.
- e) Calculer l'espérance du gain.
- f) Le jeu est-il équitable ?

Exercice 3.30 On considère le jeu de roulette ci-contre ?



- Quelle est l'espérance lorsqu'on lance une fois la roue ?
- Combien faut-il faire payer au joueur le lancer de roue pour que le jeu soit équilibré ? C'est-à-dire que le joueur et l'organisateur du jeu ont la même espérance de gain.

Problèmes divers

Exercice 3.31 On a établi que, dans une population donnée, 60% des familles occupent une maison individuelle et parmi elles, 80% en sont propriétaires. Parmi les familles n'occupant pas de maison individuelle, 25% en sont propriétaires.

On choisit une famille au hasard dans la population considérée.

- Calculer la probabilité qu'elle soit propriétaire de son logement.
- Quelle est la probabilité qu'elle occupe une maison individuelle sachant qu'elle n'en est pas propriétaire ?
- Quelle est la probabilité qu'elle soit propriétaire de son logement sachant qu'il s'agit d'une maison individuelle ?

Exercice 3.32 Un prof de math donne à sa classe dix problèmes en expliquant que l'examen final consistera à résoudre cinq de ces dix problèmes, choisis au hasard. Si un étudiant sait résoudre sept des dix problèmes, quelle est la probabilité qu'il ou elle réponde correctement :

- aux cinq problèmes ($\Rightarrow$ note 6) ?
- à au moins trois problèmes ($\Rightarrow$ note ≥ 4) ?

Exercice 3.33 Un dé à six faces est pipé. On a $P(1) = 0,1$ et $P(6) = 0,4$. Les autres faces ont la même probabilité d'apparition.

On jette une fois ce dé. Calculer la probabilité d'obtenir :

- 4 ;
- un nombre impair ;
- 4 ou un nombre impair .
- On jette ce dé 4 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois nombres impairs.
- On jette ce dé 2 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir une somme des points strictement inférieure à 5.

Exercice 3.34 On sort d'un jeu de cartes les quatre as et les quatre rois. On tire ensuite simultanément deux cartes de ces huit cartes. Quelle probabilité a-t-on de tirer :

- a) deux as si l'on sait qu'une des deux cartes au moins est un as ?
- b) deux as si l'on sait qu'une des deux cartes au moins est un as rouge ?
- c) deux as si l'on sait qu'une des deux cartes est l'as de cœur ?

Exercice 3.35 Une agence de location de voitures dispose de 15 véhicules récents et de 35 anciens véhicules. L'agence a constaté que les clients à qui elle louait un véhicule récent avaient une panne dans 0,5% des cas, alors que ceux à qui elle louait un véhicule ancien avaient une panne dans 2,5% des cas.

- a) Calculer la probabilité qu'un véhicule loué au hasard tombe en panne.
- b) Un véhicule loué au hasard tombe en panne. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un ancien véhicule.
- c) Soucieuse de son image de marque, l'agence décide de remplacer un certain nombre de ses anciens véhicules par des véhicules récents. Calculer le nombre d'anciens véhicules qu'il faut remplacer par des véhicules récents pour que les pannes arrivent moins d'une fois sur cent.

Exercice 3.36 Une forêt abrite vingt cerfs. Cinq sont capturés, marqués et relâchés. Un peu plus tard, quatre sont de nouveau capturés.

Quelle est la probabilité que deux d'entre eux soient marqués (et les deux autres non marqués) ?

Exercice 3.37 Swiss Loto procède à un tirage de loterie deux fois par semaine. Le tirage consiste en 6 boules numérotées de 1 à 45 et une boule « numéro complémentaire » numérotée de 1 à 6. Un ticket de loterie coûte 10.– au joueur.

Les gains sont répartis de la manière suivante (nombre de bons numéros + numéro complémentaire) :

- | | | |
|--------------------------|-------------------|----------------|
| • (6+1) cagnotte du jour | • (5+0) 1'000 Frs | • (3+1) 20 Frs |
| • (6+0) 1'000'000 Frs | • (4+1) 150 Frs | • (3+0) 10 Frs |
| • (5+1) 5'000 Frs | • (4+0) 75 Frs | |

- a) Si la cagnotte du jour est de 10'000'000 Frs, quelle est l'espérance de gain pour l'achat d'un ticket de loterie ?
- b) Si la cagnotte du jour est de 100'000'000 Frs, quelle est l'espérance de gain pour l'achat d'un ticket de loterie ?

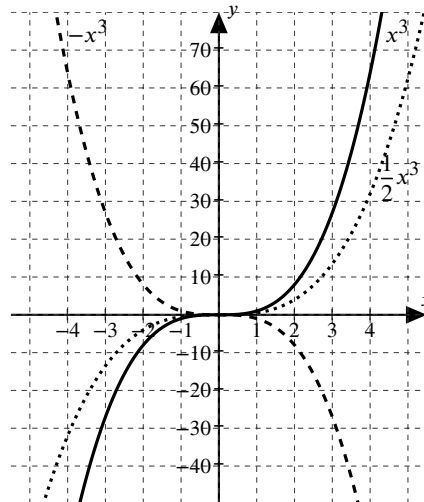
5 Solutions

5.1 Solutions - Puissances et racines

1.1	a) 81	f) $\frac{1}{10'000}$	k) $-\frac{1}{64}$	q) 100'000
	b) 64	g) 1	l) $\frac{1}{81}$	r) $\frac{100}{49}$
	c) 512	h) -125	m) 0,000 001	s) -490'000
	d) $\frac{1}{49}$	i) -1'000'000	n) 0,0016	t) -27'000'000'000
	e) $\frac{1}{125}$	j) $\frac{1}{225}$	o) 1,44	u) 160'000
1.2	a) $\frac{121}{169}$	d) $\frac{21}{19}$	g) 1	
	b) $\frac{16}{81}$	e) 121	h) $-\frac{17}{5}$	
	c) $-\frac{27}{1000}$	f) $-\frac{8}{125}$	i) 11	
1.3	a) a^8	e) $\frac{121}{a}$	h) $\frac{1}{2}$	k) $\frac{25a^2}{81}$
	b) a^{15}	f) $\frac{1}{a^{14}}$	i) $\frac{1}{32}$	l) $\frac{b^9}{5}$
	c) $\frac{100 \cdot b^{10}}{a^6}$	g) $\frac{8 \cdot 1a^4}{b^4}$	j) $\frac{5}{9ab^2}$	
	d) a^9			
1.4	a) 10'000'000	b) $\frac{1}{64}$	c) $\frac{1}{512}$	
1.5	a) $f(x) = x^n$ est en - - - - - , $g(x) = x^7$ en - - - - - et $h(x) = x^3$ en ...	b) 4 ou 6		
		c) (-1;-1), (0;0) et (1;1)		

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^3	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64
$\frac{1}{2}x^3$	-32	-13,5	-4	-0,5	0	0,5	4	13,5	32
$-x^3$	64	27	8	1	0	-1	-8	-27	-64

1.6



1.7

a) $V(x) = x^3$

b) $V(z) = \pi \cdot 5^2 \cdot z$

c) $S(x) = 6x^2$

d) $I(i) = 5'000 \cdot i$

e) $C_1(i) = 5'000(1+i)$

1.8

a) $\mathcal{S} = \{\pm 2\}$

b) $\mathcal{S} = \{6\}$

c) $\mathcal{S} = \{2\}$

d) 16

e) -32

f) $\mathcal{S} = \{-5\}$

g) $\mathcal{S} = \emptyset$

h) $\mathcal{S} = \{-1\}$

i) $\mathcal{S} = \{\pm 4\}$

1.9

a) 5

b) 100

c) 10

d) 4

e) 3

f) 2

g) 1

h) 200

i) 0,2

j) 0,1

k) 0,5

l) 115

m) 5

n) 0,3

o) 0

p) 1

q) pas défini

r) -2

s) -0,1

t) $-\frac{1}{3}$

1.10 Idem exercice précédent.

1.11 Faux car $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

1.12

a) $x \in \mathbb{R}$

b) $x \in \mathbb{R}_+$

c) $x \in \mathbb{R}_-$

d) $x \in \mathbb{R}$

e) $x \in \mathbb{R}$

f) $x \in \mathbb{R}$

g) $x \in \mathbb{R}$

h) $x \geq 2$

-
- a) $h(1'000'000) > f(1'000'000) > g(1'000'000)$
- 1.13** b) $f(x)$ est en - - - - - , $h(x)$ en - - - - - et $g(x)$ en ...
c) $(-1; -1)$, $(0; 0)$ et $(1; 1)$
-
- 1.14** a) Vrai d) Vrai g) Faux j) Vrai m) Vrai
b) Faux e) Vrai h) Vrai k) Faux n) Vrai
c) Faux f) Faux i) Faux l) Vrai o) Vrai
-
- 1.15** a) Faux $\sqrt{(-2)^2} = 2$ b) Vrai c) Vrai d) Vrai
-
- 1.16** a) 2 c) 216 e) 8 g) 2 i) 45
b) $\frac{1}{3}$ d) 5 f) 30 h) $13\sqrt{13}$
-
- 1.17** a) $bc\sqrt{ac}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{a^2c}{3b}$
-
- 1.18** a) $2\sqrt{6}$ d) $10\sqrt[3]{3}$ g) $5\sqrt{5}$ j) $5\sqrt{10}$
b) $3\sqrt{6}$ e) 2 h) 5 k) $10\sqrt{10}$
c) $10\sqrt{2}$ f) $5\sqrt{2}$ i) $5\sqrt[3]{2}$ l) $3\sqrt[3]{2}$
-
- 1.19** a) 21 e) $\sqrt{7} - 7\sqrt{5}$ i) 24 m) $4\sqrt{43} - 43$ o) $8 - \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{35} - 5\sqrt{7}} +$
b) 30 f) $\sqrt{15}$ j) $-11\sqrt{5}$ n) $8 - 2\sqrt{15}$
c) $7\sqrt{3}$ g) $3\sqrt{7}$ k) $15\sqrt{5} - 6\sqrt{10}$
d) $2\sqrt{7}$ h) 12 l) $-2\sqrt{10}$
-
- 1.20** a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) 2 g) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$
b) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$ e) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ h) $\frac{2\sqrt{13} - 13}{13}$
c) $3\sqrt{2}$ f) $\frac{\sqrt{5}}{25}$ i) $\frac{\sqrt{c} + \sqrt{ac}}{3c}$
-
- 1.21** a) $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$ b) $16\sqrt[5]{16}$ c) $2\sqrt[5]{27}$
-
- 1.22** a) $\sqrt[4]{7}$ d) $\sqrt[4]{125}$ g) $\sqrt[7]{a^5}$ j) $a\sqrt[5]{a^2}$
b) $\sqrt[3]{25}$ e) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ h) $\frac{\sqrt{a}}{a}$ k) $-a^3\sqrt{a}$
c) $\frac{\sqrt{11}}{11}$ f) $\frac{27}{8}$ i) $\sqrt[5]{a^3}$ l) non défini

1.23	a) $7^{3/5}$	e) $2^{-3/4}$	i) $a^{4/5}$	m) $a^{3/2}$	q) $a^{-1/2}$
	b) $5^{1/3}$	f) $a^{-1/2}$	j) a^3	n) $13^{-1/8}$	r) $-a^{1/3}$
	c) $a^{9/2}$	g) $a^{7/5}$	k) $7^{3/5}$	o) non défini	$(\neq (-a)^{1/3})$
	d) $11^{1/5}$	h) a	l) -2^2	p) $-a^{1/2}$	s) $-6^{-1/5}$

1.24	a) 2	e) non défini	h) $\frac{\sqrt{3}}{6}$	j) $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt[3]{20}}{2}$
	b) non défini	f) $\frac{1}{3}$		k) -2
	c) 2	g) $\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$	i) $\frac{5}{4}$	l) non défini
	d) $\frac{1}{2}$			

1.25	a) 2^4	b) 2^{-3}	c) $2^{3/2}$	d) $2^{5/7}$	e) $2^{-1/2}$	f) $2^{13/3}$
-------------	----------	-------------	--------------	--------------	---------------	---------------

1.26	a) $5^{5/21}$	d) $\frac{8}{27}a^2$	g) $100a^2$	j) $a^{-1/2}$
	b) $5^{2/147}$	e) $\frac{a^{2/3}}{16}$	h) $a^{4/3}$	k) $\sqrt{a^3} = a^{3/2}$
	c) $3^{5/2}$	f) $\sqrt[6]{a} = a^{1/6}$	i) $a^{7/3}$	l) $a^{7/10}$

1.27	a) $A = -85$	b) $B = \frac{5}{3}$
-------------	--------------	----------------------

1.28	a) $a^{1/6} = \sqrt[6]{a}$	b) a
-------------	----------------------------	--------

1.29	a) $a^{1/4}$	d) $a^{\frac{6}{5}}$	g) a^5	j) $a^{5/2}$
	b) $\frac{b^3}{a^3}$	e) a^2	h) $-\frac{1}{a^6}$	k) $a^{5/6}$
	c) $\frac{b^{10}}{a^{15}}$	f) $\frac{1}{a^6}$	i) $a^{7/3}$	l) $\frac{1}{a^{10}b^{15}}$

1.30	a) 3	d) 81	g) 6	j) $\frac{1}{12}$	m) 12
	b) 500	e) 8	h) $2\sqrt[3]{5}$	k) 1	n) $\frac{2}{25}$
	c) 1000	f) -81	i) $2\sqrt{2} + 2$	l) $\frac{\sqrt[6]{5}}{6}$	

1.31	a) 1,026	c) 23	e) 7,483	g) 0,647	i) 0,776
	b) -2,408	d) 13,391	f) 0,5	h) 13'043,916	

1.32	a) $\mathcal{S} = \{5\}$	c) $\mathcal{S} = \{\pm 3\}$	e) $\mathcal{S} = \{\pm 3\}$
	b) $\mathcal{S} = \{-5\}$	d) $\mathcal{S} = \emptyset$	f) $\mathcal{S} = \emptyset$

1.33	a) $\mathcal{S} = \{2,668\}$	d) $\mathcal{S} = \emptyset$	g) $\mathcal{S} = \{6\}$
	b) $\mathcal{S} = \{-2,668\}$	e) $\mathcal{S} = \{\pm 1,2\}$	h) $\mathcal{S} = \{\pm 1,355\}$
	c) $\mathcal{S} = \{\pm 2,646\}$	f) $\mathcal{S} = \emptyset$	i) $\mathcal{S} = \{1\}$

2.13	a) $\mathcal{S} = \{3\}$	e) $\mathcal{S} = \{-6\}$	j) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$	n) $\mathcal{S} = \{0; 4\}$
	b) $\mathcal{S} = \{-1\}$	f) $\mathcal{S} = \emptyset$	k) $\mathcal{S} = \{4\}$	o) $\mathcal{S} = \{2\}$
	c) $\mathcal{S} = \{2\}$	g) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{13}{2}\right\}$	l) $\mathcal{S} = \{-11\}$	p) $\mathcal{S} = \emptyset$
	d) $\mathcal{S} = \left\{\frac{18}{7}\right\}$	h) $\mathcal{S} = \{-1; 2\}$	m) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{28}\right\}$	
i) $\mathcal{S} = \emptyset$				

2.14	a) 6	b) 4	c) 2	d) 0	e) $\frac{1}{2}$	f) -1
-------------	------	------	------	------	------------------	-------

2.15	a) 6	c) 0	e) $\frac{1}{2}$	g) 1
	b) -2	d) -3	f) $\frac{3}{5}$	h) $-\frac{2}{3}$

2.16	a) 3	b) $\frac{1}{3}$	c) -	d) $\frac{1}{3}$	e) $\frac{3}{2}$	f) $\frac{3}{4}$
-------------	------	------------------	------	------------------	------------------	------------------

2.17	a) 3	b) -4	c) $\frac{3}{2}$	d) -8
-------------	------	-------	------------------	-------

2.18	a) $\approx 5,32$	b) $\approx 0,19$	c) $\approx 1,85$	d) $\approx 1,10$
-------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

2.19	a) $\mathcal{S} = \{\log_{17}(9)\}$	c) $\mathcal{S} = \left\{\frac{\log(2)+6}{3}\right\}$	e) $\mathcal{S} = \{8 - \log_5(3)\}$
	b) $\mathcal{S} = \{\log_{17}(10) - 1\}$	d) $\mathcal{S} = \left\{\frac{\log_2(34) - 1}{3}\right\}$	f) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1 - \log_7(8)}{2}\right\}$

2.20	a) $\mathcal{S} = \{\sqrt[3]{200} - 1\} = \{\sim 4,85\}$	g) $\mathcal{S} = \left\{\sqrt[4]{\frac{300}{7}} - 1\right\} = \{\sim 1,56\}$
	b) $\mathcal{S} = \left\{\frac{15'625}{27}\right\} = \{\sim 578,70\}$	
	c) $\mathcal{S} = \{\log_{1,2}(200)\} = \{\sim 29,06\}$	h) $\mathcal{S} = \left\{\frac{\log_{1,5}(\frac{300}{7})}{4}\right\} = \{\sim 2,32\}$
	d) $\mathcal{S} = \left\{\frac{216}{25}\right\} = \{8,64\}$	i) $\mathcal{S} = \left\{4\log_{1,5}(\frac{300}{7})\right\} = \{\sim 37,07\}$
	e) $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{\log_{1,2}(200)}\right\} = \{\sim 0,10\}$	j) $\mathcal{S} = \left\{\frac{4}{\log_{1,5}(\frac{300}{7})}\right\} = \{\sim 0,43\}$
	f) $\mathcal{S} = \{\log_{1,2}(8'000'000)\} = \{\sim 87,18\}$	

2.21 $\sim 17,28$ ans

2.22 La somme a triplé après 19 ans.

2.23	a) ~ 23 mois et 26 jours ($\sim 23,87$ mois)	b) $i_{12} = \sqrt[24]{1,024144} - 1 \approx 0,995\%$
-------------	--	---

2.24 a) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{99'999}{2} \right\}$ b) $\mathcal{S} = \{125\}$ c) $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{4} \right\}$ d) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

2.25 a) $\mathcal{S} = \{7\}$ c) $\mathcal{S} = \{4\}$ (-4 doit être éliminé)
 b) $\mathcal{S} = \emptyset$ (3 doit être éliminé) d) $\mathcal{S} = \{1; 3\}$

2.26 a) $\mathcal{S} = \{5\}$ (2 doit être éliminé) c) $\mathcal{S} = \{5\}$
 b) $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$ d) $\mathcal{S} = \emptyset$ (-5 doit être éliminé)

5.3 Solutions - Probabilités

3.1 a) $\frac{13}{500} = 0,026 = 2,6\%$ d) $B = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 6 \\ \hline \end{array} ; \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array} ; \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} ; \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 3 \\ \hline \end{array} ; \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \right\}$
 b) $\frac{66}{500} = 0,132 = 13,2\%$ e) $\#U = 6 \cdot 6 = 36$
 c) $A = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right\}$ f) $P(A) = \frac{1}{36} \approx 0,02778 = 2,778\%$
 g) $P(B) = \frac{5}{36} \approx 0,13889 = 13,889\%$

3.2 a) $U = \{PP; PF; FP; FF\}$ oui
 b) $U = \{PP; PF; FF\}$ non
 c) $U = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ non

3.3 a) $U = \{P; F\}$ c) $P(\text{« deux fois pile »}) = \frac{1}{4} = 25\%$
 b) $P(\text{« pile »}) = \frac{1}{2} = 50\%$ d) $P(\text{« pile au deuxième lancé »}) = \frac{1}{2} = 50\%$

3.4 $P(A) = \frac{4'845}{12'650} \approx 38,30\%$

3.5 a) $\frac{6840}{15'600} = \frac{57}{130} \approx 43,85\%$ c) $\frac{1}{15'600} \approx 0,0064\%$
 b) $\frac{120}{15'600} = \frac{1}{130} \approx 0,77\%$ d) $\frac{6}{15'600} = \frac{1}{2600} \approx 0,038\%$

3.6 a) $\frac{144}{792} = \frac{2}{11} \approx 18,18\%$ b) $\frac{8}{792} = \frac{1}{99} \approx 1,01\%$ c) $1 - \frac{56}{792} = 1 - \frac{7}{99} = \frac{92}{99} \approx 92,93\%$

3.7 $P(A) = \frac{1}{8'145'060} \approx 0,000012\%$

3.8 a) $\frac{5'096}{54'740} \approx 9,31\%$ b) $\frac{37'820}{54'740} \approx 69,09\%$ c) $1 - \frac{37820}{54'740} \approx 30,90\%$

3.9 a) 25% b) $29,55\%$ c) $1 - P(B) = 70,45\%$

3.10

a) $\frac{10}{220} = \frac{1}{22} \approx 4,55\%$

c) $\frac{84}{220} = \frac{21}{55} \approx 38,18\%$

e) $\frac{164}{220} \approx 74,55\%$

b) $\frac{60}{220} = \frac{3}{11} \approx 27,27\%$

d) $\frac{34}{55} \approx 61,82\%$

f) $\frac{168}{220} = \frac{42}{55} \approx 76,36\%$

3.11

a) $\frac{126}{376'992} = \frac{1}{2992} \approx 0,033\%$

f) $\frac{24}{376'992} = \frac{1}{15'708} \approx 0,0064\%$

b) $\frac{3024}{376'992} = \frac{3}{374} \approx 0,802\%$

g) $\frac{201'376}{376'992} \approx 53,42\%$

c) $\frac{252}{376'992} = \frac{1}{1496} \approx 0,067\%$

h) $1 - \frac{201'376}{376'992} \approx 46,58\%$

d) $\frac{504}{376'992} = \frac{1}{748} \approx 0,134\%$

i) $\frac{345'216}{376'992} \approx 91,57\%$

e) $\frac{32}{376'992} = \frac{1}{11'781} \approx 0,0085\%$

j) $\frac{36'288}{376'992} = \frac{18}{187} \approx 9,63\%$

3.12

a) $U = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$

b) $A = \{PPP; PPF; PFP; PFF\}$

f) $A \cap B = \{PPP; PPF\}$

c) $B = \{PPP; PPF; FPP; FPF\}$

« pile sort en premier **et** face ne sort pas au deuxième lancer »

d) $C = \{FFP; FPF; PFF; FFF\}$

g) $A \cup B = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF\}$

e) $\bar{A} = \{FPP; FPF; FFP; FFF\}$

« pile ne sort pas en premier »

« pile sort en premier **ou** face ne sort pas au deuxième lancer »**3.13** 74%**3.14**

a) 86%

b) 6%

c) 4%

3.15

a) 96%

c) 69%

e) 10%

b) 4%

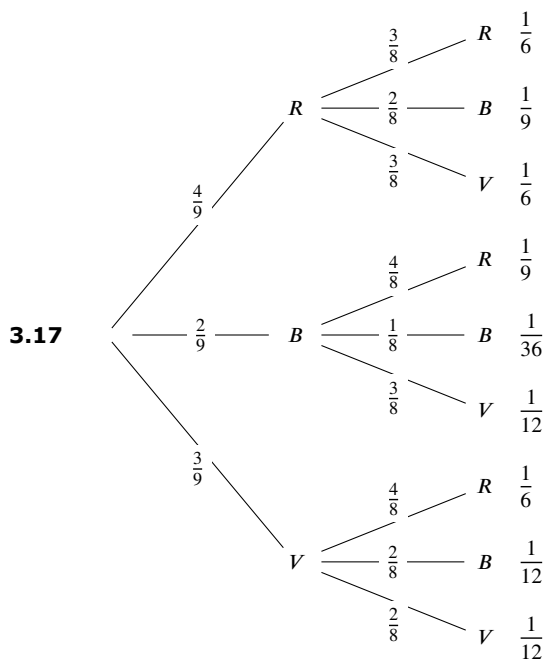
d) 22%

f) 54%

3.16

a) 6 élèves n'ont choisi aucune de ces deux options.

b) $P = \frac{7}{15} \approx 46,67\%$



a) $P(A) = \frac{1}{6} \approx 16,67\%$

b) $P(B) = \frac{1}{12} \approx 8,33\%$

c) $P(C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \approx \frac{2}{9} = 22,22\%$

3.18 $P(\text{« NNBB »}) = \frac{35}{768} \approx 4,56\%$

3.19 a) $P(A) = 49\% + 9\% = 58\%$

b) $P(B) = 49\%$

c) $P(C) = 49\% + 21\% + 9\% = 79\%$

3.20 a) -

c) $100\% - 2,16\% = 97,84\%$

b) $0,12 \cdot 0,18 = 2,16\%$

d) $9,84\% + 15,84\% = 25,68\%$

3.21 a) $P(A) = 30\%$

c) $P(C) = 50\%$

e) $P(E) = \frac{20}{70} \approx 28,57\%$

b) $P(B) = 10\%$

d) $P(D) = 40\%$

3.22 a) X : nombre de « faces »

d) $E(X) = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{12}{8} = 1,5$

b) 0, 1, 2 ou 3

e) En lançant 3 fois une pièce, on obtient en moyenne 1,5 fois « faces ».

c) $P(0) = P(3) = \frac{1}{8}$, $P(1) = P(2) = \frac{3}{8}$

3.23 a) $E(X) = 2,8$

b) $E(X) = 100$

3.24 $\frac{1}{36} \cdot 4 + \frac{1}{36} \cdot 1 + \frac{32}{36} \cdot (-1) = -\frac{27}{36} = -0,75$ Frs.

3.25 a) $E(X) = 2$

b) 20 Frs.

-
- 3.26** a) X : valeur du gain ou de la perte
 b) 2, 3 ou -4
 c) $P(2) = \frac{1}{2}$, $P(3) = \frac{1}{6}$, $P(-4) = \frac{1}{3}$
 d) $E(X) = \frac{1}{6} \approx 0,17$.
 Le joueur gagne en moyenne 17 cts à chaque partie.
-
- a) $\frac{1}{37} \cdot 34 + \frac{36}{37} \cdot (-1) = -\frac{2}{37} = -0,054$ Frs
 b) $\frac{18}{37} \cdot 1 + \frac{19}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37} = -0,027$ Frs
 c) -0,027 Frs
-
- 3.27** d) Espérance de gain pour un numéro : $-\frac{2}{38} = -\frac{1}{19}$
 Espérance de gain pour couleur ou pair/impair : $-\frac{2}{38} = -\frac{1}{19}$
 La case supplémentaire 00 rend l'espérance de gain identique, quel que soit le type de pari fait par le joueur.
 Le casino peut ainsi prévoir précisément le gain de ses roulettes.
-
- 3.28** a) Total des gains : $5 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 30 = 50$ Frs
 Prix max du ticket : $\frac{50 \cdot 2}{100} = 1$ Frs
 b) $\frac{1}{100} \cdot 29 + \frac{3}{100} \cdot 4 + \frac{5}{100} \cdot 0 + \frac{91}{100} \cdot (-1) = -\frac{50}{100} = -50$ cts.
 c) L'espérance de gain de l'organisateur doit être au maximum de la moitié du prix du ticket.
-
- 3.29** a) X gain ou perte du joueur
 b) -10, 10, 20 ou 30
 c) ...
 d) $P(-10) = \frac{125}{216}$, $P(10) = \frac{25}{72}$,
 e) $P(20) = \frac{5}{72}$, $P(30) = \frac{1}{216}$
 f) non
 e) Espérance de gain : $-\frac{85}{108} \approx 79$ cts
-
- 3.30** a) $E(X) = \frac{3}{24} \cdot 200 + \frac{2}{24} \cdot 250 + \frac{3}{24} \cdot 300 + \frac{1}{24} \cdot 350 + \frac{2}{24} \cdot 400 + \frac{1}{24} \cdot 450 + \frac{2}{24} \cdot 500 + \frac{1}{24} \cdot 550 + \frac{2}{24} \cdot 600 + \frac{1}{24} \cdot 700 + \frac{1}{24} \cdot 800 + \frac{2}{24} \cdot 900 + \frac{1}{24} \cdot 1000 = \frac{10650}{24} = 443,75\$$
 b) $443,75 + \frac{2}{24} \cdot x = 0 \Rightarrow x = -5325\$$
 Il faudrait faire payer 5325\$.
-
- 3.31** a) $48\% + 10\% = 58\%$
 b) $\frac{0,12}{0,42} \approx 28,57\%$
 c) 80%
-
- 3.32** a) $\frac{21}{252} \approx 8,33\%$
 b) $\frac{231}{252} \approx 91,67\%$
-
- 3.33** a) $\frac{1}{8} = 12,5\%$
 b) $\frac{1}{10} + \frac{2}{8} = \frac{7}{20} = 35\%$
 c) $\frac{1}{8} + \frac{7}{20} = \frac{19}{40} = 47,5\%$
 d) $\left(\frac{7}{20}\right)^3 \cdot \frac{13}{20} \cdot 4 \approx 11,15\%$
 e) $\frac{121}{1600} \approx 7,56\%$
-
- 3.34** a) $\frac{6}{22} \approx 27,27\%$
 b) $\frac{5}{13} \approx 38,46\%$
 c) $\frac{3}{7} \approx 42,86\%$
-
- 3.35** a) $\frac{7}{400} + \frac{3}{2000} = \frac{19}{1000} = 1,9\%$
 b) $\frac{\frac{7}{400}}{\frac{19}{1000}} = \frac{35}{38} \approx 92,11\%$
 c) Il faut en remplacer 23.

3.36 $\frac{1050}{4845} \approx 21,67\%$

3.37

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{1}{C_6^{45} \cdot C_1^6} \left(C_6^6 \cdot 9'999'990 + C_6^6 \cdot C_1^5 \cdot 999'990 + C_5^6 \cdot C_1^{39} \cdot 4'990 + C_5^6 \cdot C_1^{39} \cdot C_1^5 \cdot 990 + C_4^6 \cdot C_2^{39} \cdot 140 + C_4^6 \cdot C_2^{39} \cdot C_1^5 \cdot 65 \right. \\ & \left. + C_3^6 \cdot C_3^{39} \cdot 10 + C_3^6 \cdot C_3^{39} \cdot C_1^5 \cdot 0 \right) \\ & + \frac{-10}{C_6^{45} \cdot C_1^6} \left(C_6^{45} \cdot C_1^6 - C_6^6 \cdot C_1^5 - C_5^6 \cdot C_1^{39} - C_5^6 \cdot C_1^{39} \cdot C_1^5 - C_4^6 \cdot C_2^{39} - C_4^6 \cdot C_2^{39} \cdot C_1^5 - C_3^6 \cdot C_3^{39} - C_3^6 \cdot C_3^{39} \cdot C_1^5 \right) \\ & = \frac{77'480'280}{48'870'360} - \frac{10 \cdot 9'121'710}{48'870'360} = -\frac{13'736'820}{48'870'360} = -0,28 \text{ Frs} \\ \text{b) } & \frac{90'000'000 + 77'480'280}{48'870'360} - \frac{10 \cdot 9'121'710}{48'870'360} = \frac{76'263'180}{48'870'360} = 1,56 \text{ Frs} \end{aligned}$$

Références

- [1] H. Bovet : Diplôme 3D. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2008.
- [2] J.-P. Favre : Mathématiques pour la Matu pro. Promath Editions, 2019.
- [3] J.-P. Javet : Mathématiques 3C. <http://www.javmath.ch>, 2021.
- [4] M. Tissot-Daguette : Cours et exercices. Gymnase d'Yverdon.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch

sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 20 juillet 2023