2C

Mathématiques

Sarah Delmonico
Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2022-2023

Table des matières

1 Programmation linéaire **2**
1.1 Inéquations linéaires à deux inconnues . . . 2
1.2 Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues . . . 4
1.3 Introduction à la programmation linéaire à deux variables . . . 8
1.4 Applications . . . 13
2 Fonctions quadratiques **14**
2.1 Définition . . . 14
2.2 Graphe et points caractéristiques . . . 15
2.3 Intersections . . . 19
2.4 Optimisation quadratique . . . 20
3 Polynômes et fonctions polynomiales **22**
3.1 Rappel - Factorisation du degré 2 . . . 22
3.2 Factorisation pour les degrés supérieurs à 2 . . . 24
3.2.1 Changement de variable . . . 24
3.2.2 Produits remarquables du 3e degré . . . 26
3.2.3 Méthode du groupement . . . 27
3.3 Division euclidienne . . . 28
3.4 Fonctions polynomiales . . . 33
3.4.1 Généralités . . . 33
3.4.2 Signe d'une fonction affine . . . 36
3.4.3 Signe d'une fonction quadratique . . . 38
3.4.4 Signe d'une fonction polynomiale . . . 40
3.4.5 Signe de $(g(x))^n$ . . . 41
4 Trigonométrie II **43**
4.1 Rappel - Trigonométrie dans le triangle rectangle . . . 43
4.2 Cercle trigonométrique . . . 44
4.3 Rapports trigonométriques généralisés . . . 44
4.4 Trigonométrie dans le triangle quelconque . . . 47
5 Analyse combinatoire **53**
5.1 Principes fondamentaux . . . 53
5.2 Les permutations . . . 55
5.3 Les arrangements . . . 58
5.3.1 Les arrangements simples . . . 58
5.4 Les combinaisons . . . 60
5.5 Synthèse . . . 61
6 Exercices **64**
6.1 Programmation linéaire . . . 64
6.2 Fonctions quadratiques . . . 71
6.3 Polynômes et fonctions polynomiales . . . 77
6.4 Trigonométrie II . . . 87
6.5 Analyse combinatoire . . . 90
7 Solutions **98**
7.1 Solutions - Programmation linéaire . . . 98
7.2 Solutions - Fonctions quadratiques . . . 101
7.3 Solutions - Polynômes et fonctions polynomiales . . . 105
7.4 Solutions - Trigonométrie dans le triangle quelconque . . . 111
7.5 Solutions - Analyse combinatoire . . . 112

1 Programmation linéaire

1.1 Inéquations linéaires à deux inconnues

Une **inéquation linéaire à deux inconnues** est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes suivantes, où a, b, c sont des nombres réels et x, y sont les inconnues :

$$ax + by < c \qquad ax + by > c \qquad ax + by \geq c \qquad ax + by \leq c$$

Une **solution** d'une inéquation linéaire à deux inconnues est un couple de la forme $(x\,;y)$, qui vérifie l'inéquation.

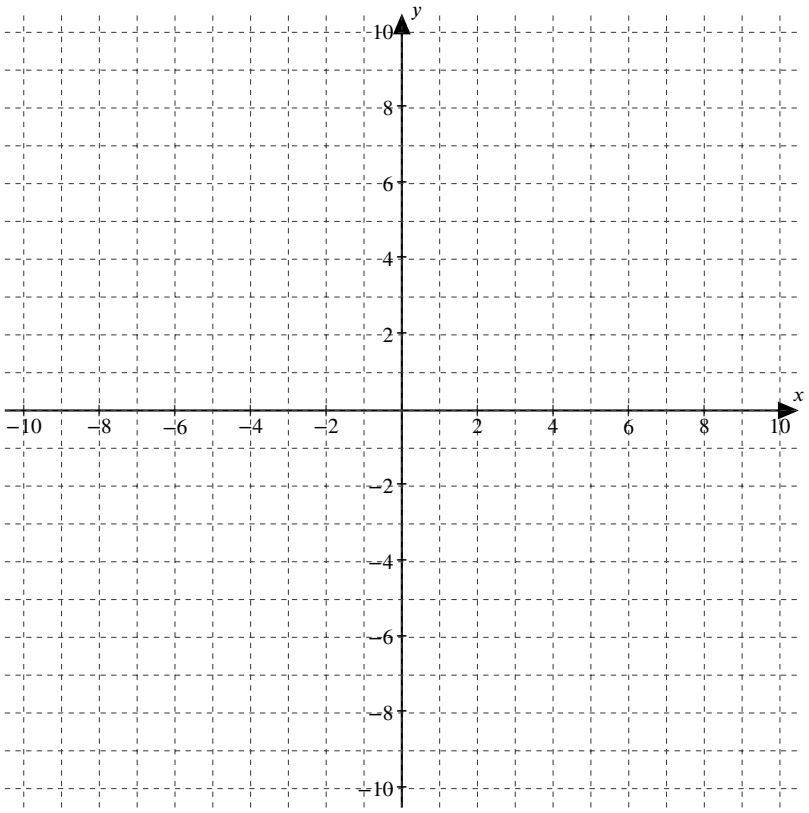
Exemple :

a) Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions de l'inéquation $3x - 5y > 15$?

$(0\,;0)$ $(4\,;-1)$ $(2\,;3)$ $(0\,;-4)$ $(-6\,;-9)$

$(5\,;0)$ $(-3\,;6)$ $(9\,;1)$ $(4\,;-8)$ $(-7\,;-2)$

b) Représenter graphiquement la droite $3x - 5y = 15$.



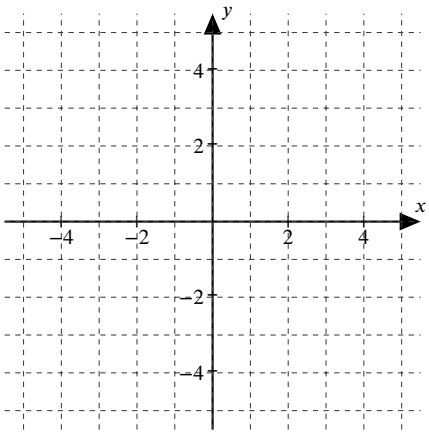
c) Placer les points dont les coordonnées sont les couples proposés au a) et colorier en rouge ceux qui sont solutions de l'inéquation $3x - 5y > 15$. Que constate-t-on ?

Pour **résoudre graphiquement** une équation linéaire à deux inconnues, il faut représenter la droite donnée par l'équation $ax+bx=c$. La solution de l'inéquation est l'un des deux demi-plans délimités par cette droite.

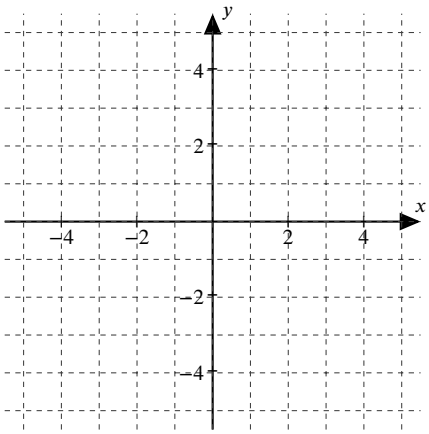
Pour déterminer lequel, il suffit de tester un point. Il faut aussi indiquer si la droite elle-même fait partie des solutions ou pas.

Exemples : Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des inéquations ci-dessous :

$x+y\leq 2$



$-2x+3y>8$



1.2 Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues

Un **système d'inéquations** est un ensemble d'inéquations considérées simultanément.

Une accolade (ouune barre verticale) indique que les inéquations forment un système.

Une **solution** du système d'inéquations est un couple de la forme $(x\,;y)$, qui vérifie toutes les inéquations simultanément.

Exemple : Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions du système ?

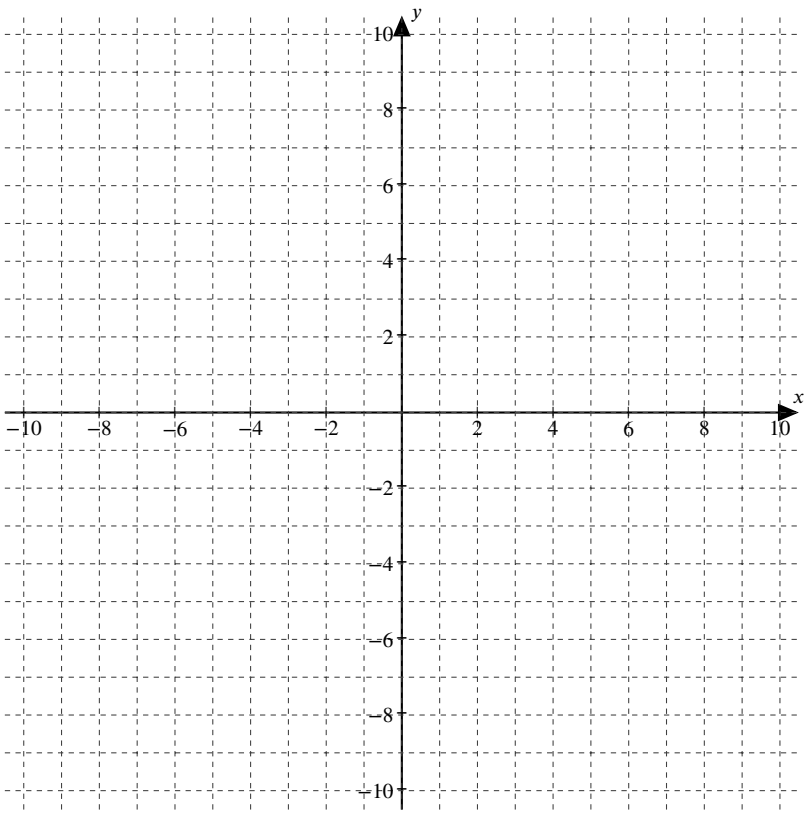
$$\begin{cases} x-2y\geq -10 \\ 2x+y\leq 10 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

$(0\,;0)$ $(4\,;-1)$ $(2\,;3)$ $(1\,;6)$

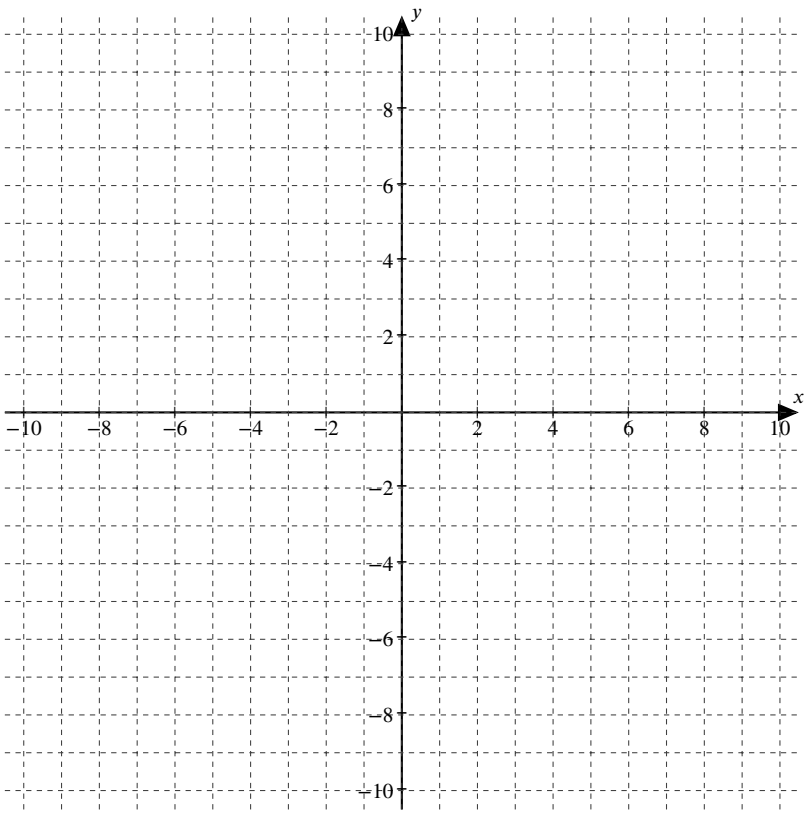
$(5\,;0)$ $(-3\,;0)$ $(6\,;0)$ $(4\,;1)$

Exemples : Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} -x+2y\leq 4 \\ 2x+3y<6 \end{cases}$



b) $\begin{cases} -x+y>-5 \\ 5x+2y\leq 10 \\ x>-2 \\ y\geq -4 \end{cases}$

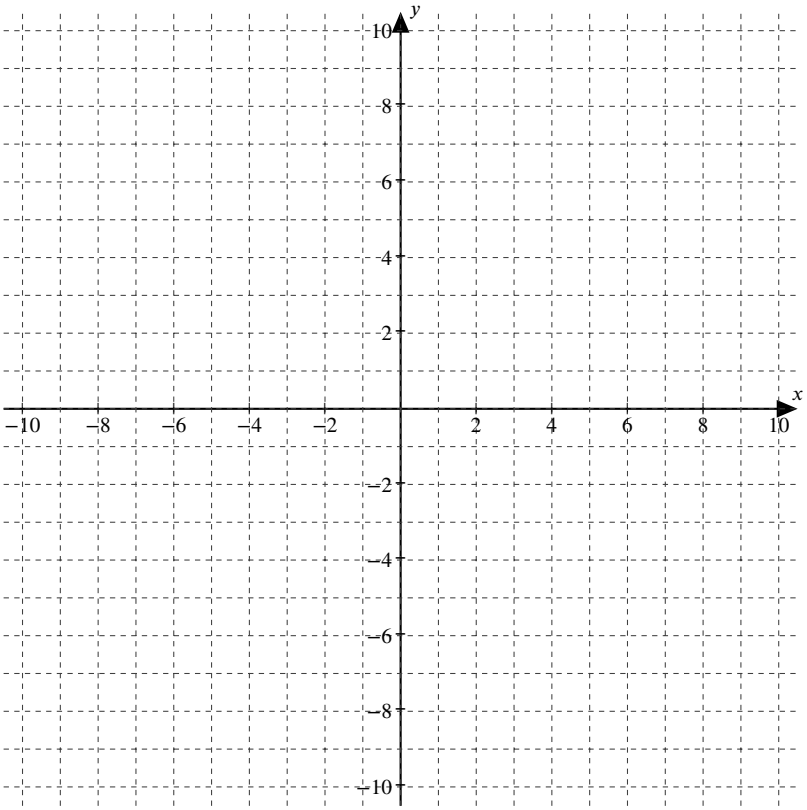


L'ensemble des solutions d'un système d'inéquations est un **polygone** convexe ou une surface polygonale ouverte convexe. Pour simplifier, nous utiliserons le terme polygone dans toutes les situations. Pour l'obtenir, on fait l'intersection des surfaces des solutions de chacune des équations du système.

Pour **trouver algébriquement les coordonnées de ses sommets**, il faut résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues, obtenues à partir des inéquations de départ.

Exemple : Résoudre graphiquement et déterminer les coordonnées des sommets du polygone des solutions.

$$\begin{cases} x - 2y \geq -10 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq -1 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$$



Application : La cafeteria prépare des pique-niques pour les étudiants. Il y en a deux sortes :

A) 3 sandwichs, 2 boissons, 1 dessert

B) 2 sandwichs. 1 boisson, 3 desserts.

On appelle x le nombre de pique-niques A et y le nombre pique-niques B .

a) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 32 sandwichs à disposition.

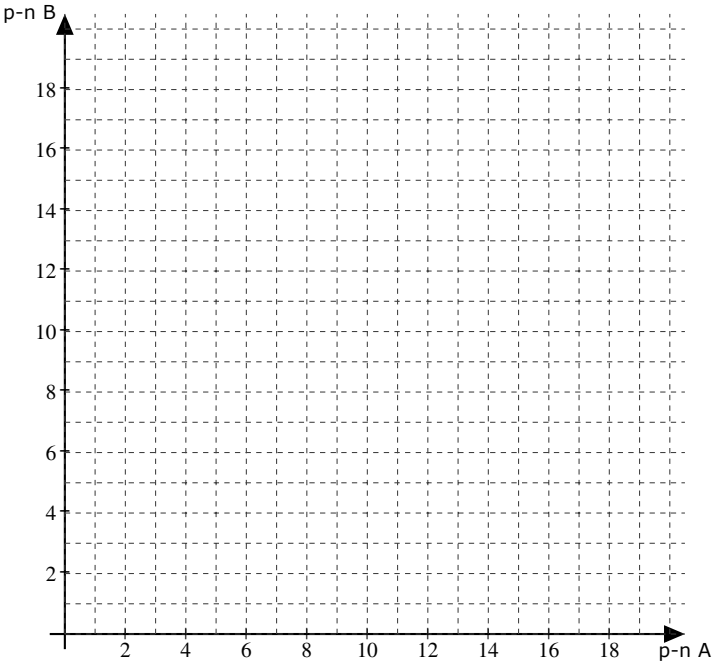
b) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 20 boissons à disposition.

c) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 30 desserts à disposition.

d) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 10 sandwichs que l'on doit absolument utiliser.

e) Écrire des inéquations qui expriment le fait que x et y sont des nombres positifs.

f) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de ce système d'inéquations.



g) Vérifier graphiquement et algébriquement que $(4;8)$ est une solution de ce système et expliquer ce que cela veut dire par rapport au problème.

1.3 Introduction à la programmation linéaire à deux variables

La programmation linéaire à deux variables peut se définir comme un outil mathématique permettant de résoudre certains problèmes d'optimisation liés à des contraintes. Dans de tels problèmes, on cherche deux quantités respectant des contraintes et qui rendent maximum ou minimum une valeur qui leur est liée, que l'on appelle **objectif**.

Exemple : Un potier fabrique deux types de vases. La fabrication d'un vase de type A demande 1 heure de travail et $1{,}5$ kg de terre. Ceux de type B demandent 2 heures de travail et 750 g de terre.

Le potier travaille entre 4 et 8 heures et a 6 kg de terre à sa disposition. Il fera un bénéfice est de CHF $30.-$ pour chaque vase de type A et de CHF $40.-$ pour ceux de type B.

Combien de vases de chaque sorte doit-il fabriquer pour avoir un bénéfice maximum ? Et pour un bénéfice minimum ?

Pour résoudre de tels problèmes, nous allons traiter un système d'inéquations linéaires à deux inconnues conjointement avec une **fonction objectif** à deux variables de la forme :

$$P(x\,;y) = ax + by + c$$

où a, b, c sont des nombres réels et x, y sont les variables.

La fonction P est appelée la **fonction objectif**.

Les inéquations du système expriment les **contraintes**.

Les solutions du système sont les **solutions possibles du problème**.

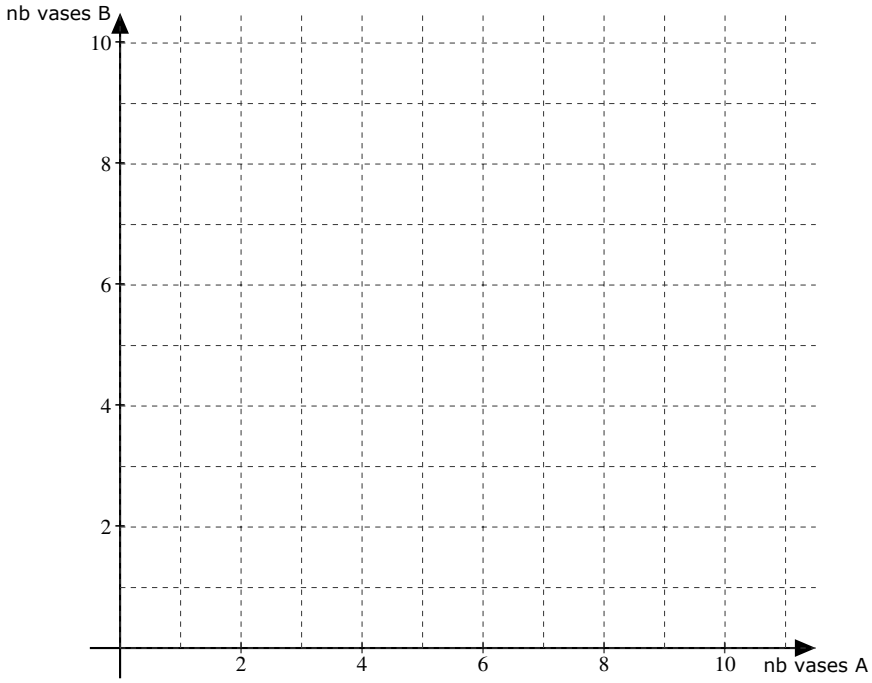
Les **solutions du problème** sont les solutions possibles, qui rendent maximum ou minimum la fonction objectif.

Exemple :

a) Que sont les variables et la fonction objectif de l'exemple précédent ? Quelle est l'expression de $P(x\,;y)$?

b) Écrire toutes les contraintes sous forme d'inéquations.

c) Résoudre graphiquement le système d'inéquations et déterminer algébriquement les coordonnées des sommets du polygone des solutions possibles.



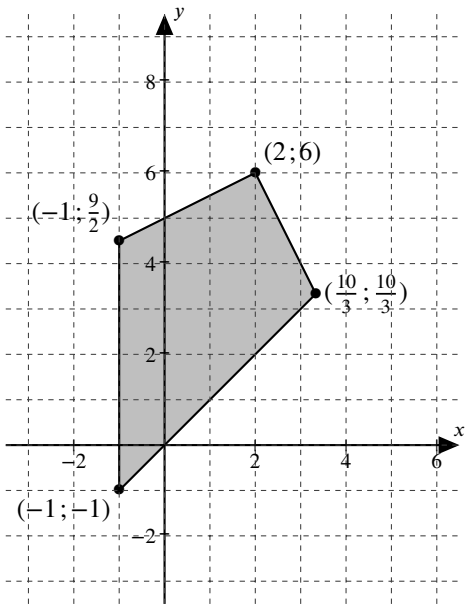
d) Quelles sont concrètement toutes les solutions possibles du problème ?

e) Calculer le bénéfice pour chacune d'entre elles. Laquelle donne le bénéfice le plus élevé ? Et le moins élevé ?

Exemple : Soit la fonction objectif $P(x;y)=3x+y$ avec les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x-2y\geq -10 \\ 2x+y\leq 10 \\ x\geq -1 \\ x-y\leq 0 \end{cases}$$

Nous avons vu précédemment que le polygone des solutions possibles est :



Soit P une valeur choisie pour $P(x;y)$. Comme $P=3x+y$, on peut écrire $y=-3x+P$. Donc tous les points se trouvant sur la droite $y=-3x+P$ donnent la valeur choisie.

Choisissons par exemple $P=6$. Dessiner la droite $y=-3x+6$ sur le graphique, puis choisir 3 points de cette droite et calculer $P(x;y)$ pour ces points.

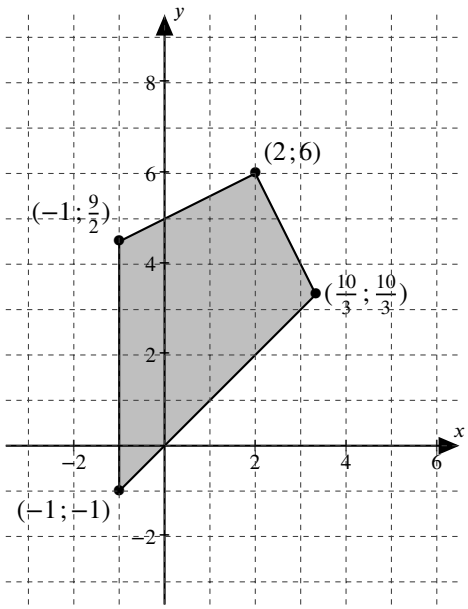
Ici, pour que P soit maximum, il faut que l'ordonnée à l'origine de $y=-3x+P$ soit maximum.

Cela revient à chercher un point $(x;y)$ qui est sur une droite $y=-3x+P$ avec la plus grande ordonnée à l'origine P possible et qui respecte les contraintes. Quel est ce point et quelle est la valeur maximale de P?

Et si x et y doivent être des nombres entiers ?

Exemple : Le raisonnement est-il le même pour la fonction objectif $P(x\,;y)=3x-y$?

Trouver le maximum de $P(x\,;y)=3x-y$ avec les contraintes précédentes.



Nous procédons de la manière suivante :

- Représenter graphiquement le polygone des solutions possibles, déterminé par le système d'inéquations.

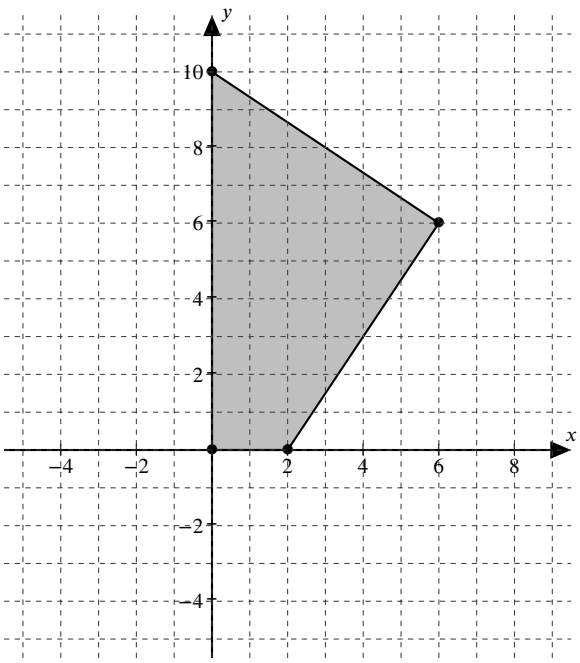
- Calculer algébriquement les coordonnées des sommets de ce polygone et vérifier la précision du graphique.

- Écrire y en fonction de x et de P pour trouver sa pente, puis dessiner une droite de même pente.

- Translater cette droite pour avoir l'ordonnée à l'origine la plus grande possible, tout en passant par une des solutions possibles, puis faire de même, avec l'ordonnée à l'origine la plus petite possible possible. Une de ces deux droites donne le maximum de P et l'autre le minimum.

- Calculer la valeur de P pour ces deux droites de manière à différencier le maximum du minimum.

Exemple : On donne les contraintes représentées ci-dessous :



a) Pour quels points $(x\,;y)$, à coordonnées entières et respectant les contraintes ci-dessus, la fonction $P_1(x\,;y)=x+2y$ vaut-elle 16 ?

b) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_1(x\,;y)=x+2y$.

c) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_2(x\,;y)=3x+y$.

d) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_3(x\,;y)=x-y$.

e) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_4(x\,;y)=2x+3y$.

1.4 Applications

La programmation linéaire peut s'appliquer dans de nombreux problèmes de gestion : problèmes d'organisation de transports, de production, d'investissement... dans le but de maximiser les bénéfices, minimiser les coûts, le temps de trajet...

Pour résoudre de tels problèmes, il faut :

- définir les variables x et y,
- trouver l'expression de la fonction objectif $P(x\,;y)$,
- écrire les contraintes sous forme de système d'inéquations,

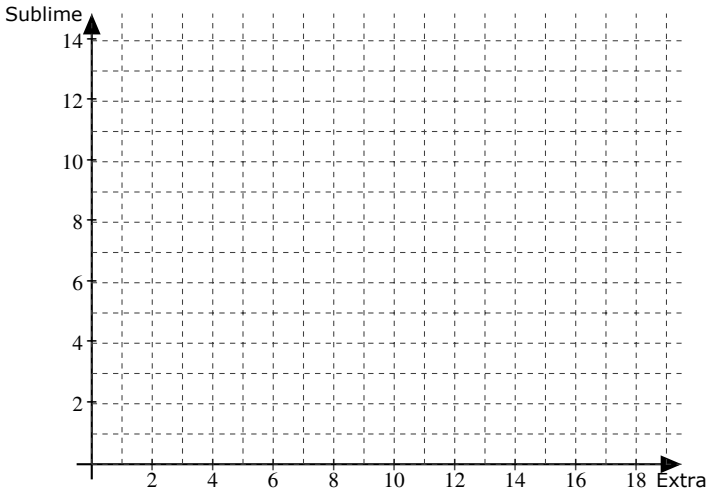
puis procéder comme vu précédemment, sans oublier de répondre concrètement à la question posée.

Exemple : À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des oeufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 14 kg de lait.

Il a deux spécialités : l'oeuf Extra et l'oeuf Sublime. Un oeuf Extra nécessite 1 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 2 kg de lait. Un oeuf Sublime nécessite 3 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 1 kg de lait.

Il fera un profit de CHF $20.–$ en vendant un oeuf Extra, et de CHF $30.–$ en vendant un oeuf Sublime.

Combien d'oeufs Extra et Sublime doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible et quel sera ce bénéfice maximum ?



2 Fonctions quadratiques

2.1 Définition

Une **fonction quadratique** est une fonction polynomiale du 2e degré.

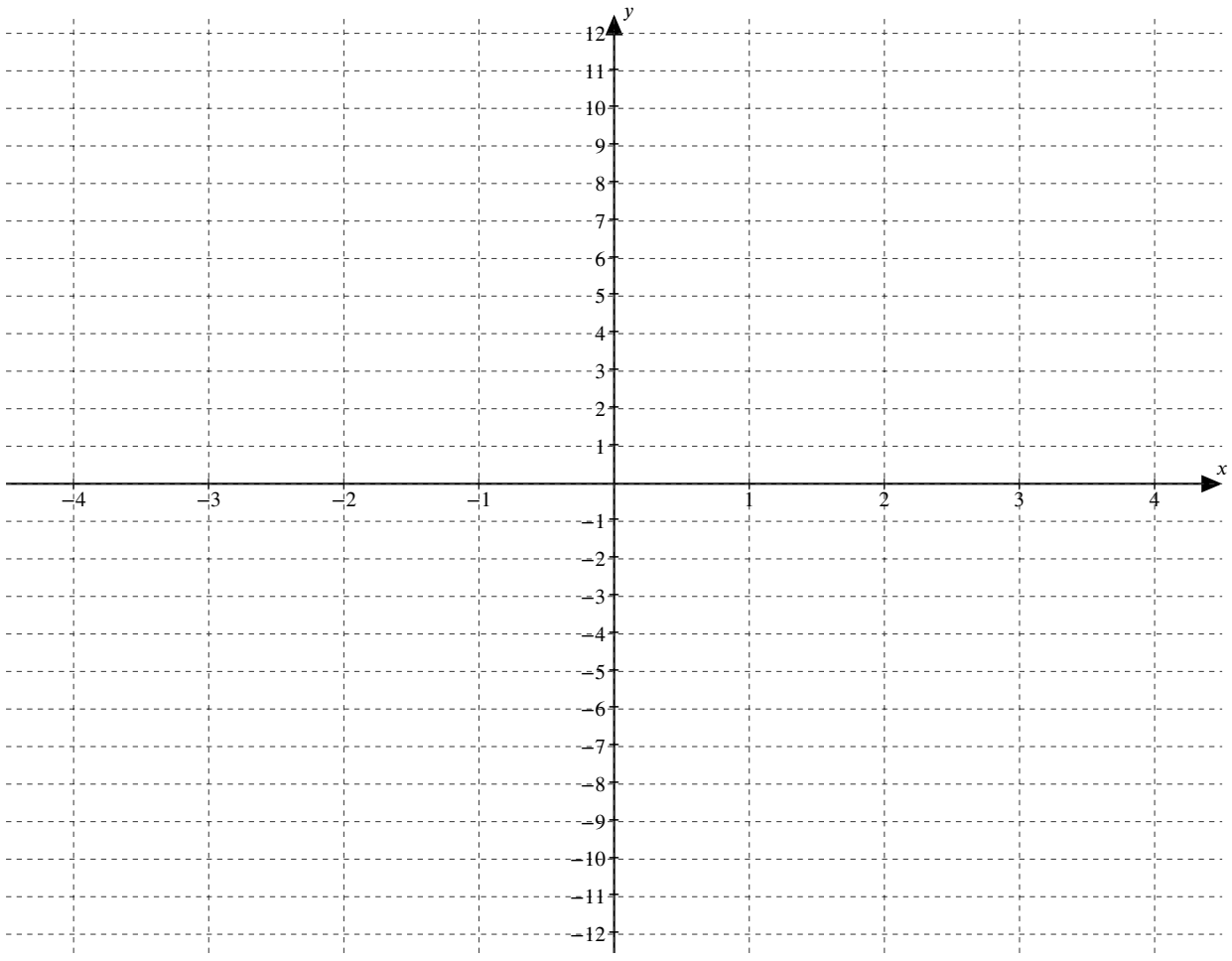
Son expression peut se ramener à une expression du type :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{où } a,\ b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels avec } a \neq 0.$$

Exemples :

Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions f et g.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2 + 3x$									
$g(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 2$									



2.2 Graphe et points caractéristiques

Le graphe de la fonction quadratique $f(x)=ax^2+bx+c$ est une **parabole**.

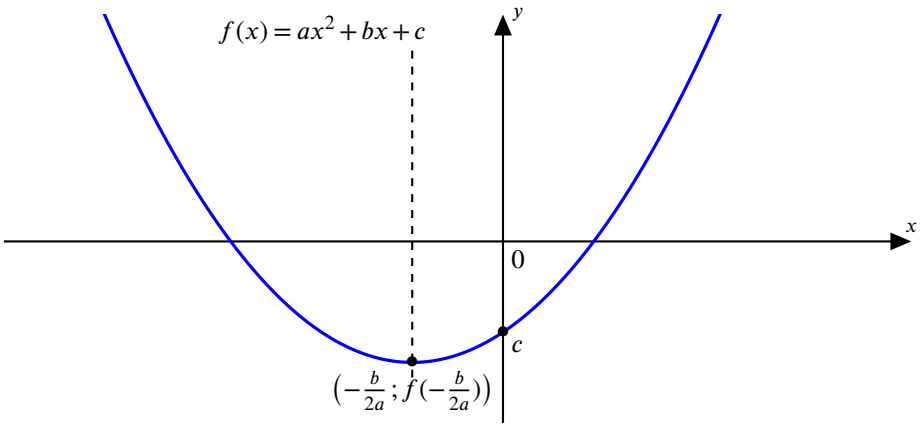
Son **ordonnée à l'origine** est le coefficient c.

La parabole a un **sommet**, noté S, et un **axe de symétrie vertical** qui passe par ce sommet.

La première coordonnée du sommet peut se calculer grâce aux coefficients de l'expression de la fonction :

$$\boxed{x_S=-\frac{b}{2a}}$$

Pour trouver la deuxième coordonnée, il suffit de remplacer x par la valeur de x_S dans l'expression de la fonction.

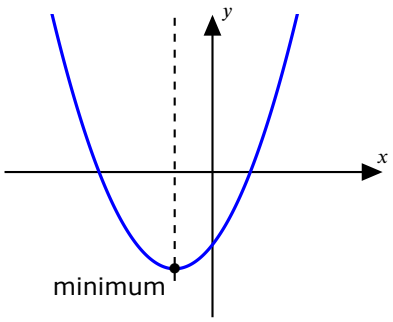


Exemple : Déterminer l'ordonnée à l'origine et calculer les coordonnées du sommet S de la parabole d'équation $y=x^2+3x$, puis vérifier sur le graphe du paragraphe 2.1.

Si $\boxed{a>0}$:

La parabole « sourit », elle est **convexe**.

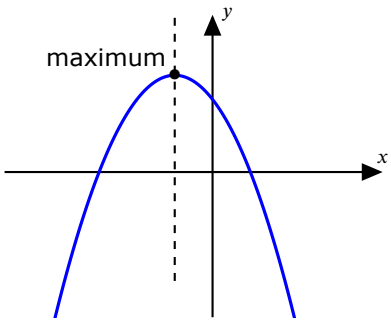
Le sommet est alors un **minimum**.



Si $\boxed{a<0}$:

la parabole « est triste », elle est **concave**.

Le sommet est alors un **maximum**.



Exemple : Soit $g(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 2$.

a) Calculer les coordonnées de son sommet. Indiquer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

b) Déterminer son ordonnée à l'origine.

c) Vérifier sur le graphe du paragraphe 2.1.

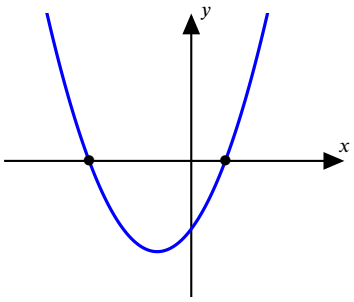
Une parabole peut couper l'axe Ox en 0, 1 ou 2 points, qui correspondent aux **zéros** de la fonction.
On peut les trouver en résolvant l'équation $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$.

Si $\Delta > 0$:

L'équation a 2 solutions.

La fonction a 2 zéros.

La parabole coupe l'axe Ox en 2 points.

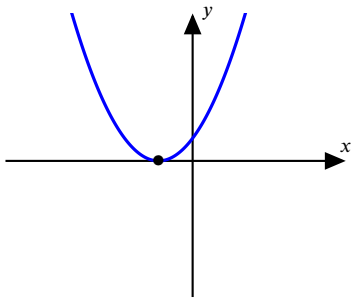


Si $\Delta = 0$:

L'équation a 1 solution.

La fonction a 1 zéro.

La parabole est tangente à l'axe Ox.

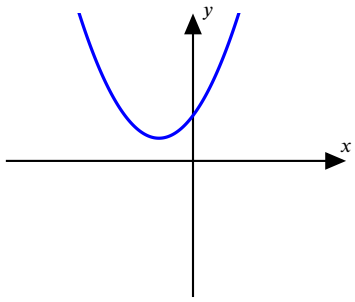


Si $\Delta < 0$:

L'équation n'a pas de solution.

La fonction n'a pas de zéro.

La parabole ne coupe pas l'axe Ox.



Exemple : Soit les fonctions $f(x) = -4x^2 + 4x + 15$ et $g(x) = x^2 - 2x + 5$.

a) Calculer les coordonnées du sommet du graphe de chaque fonction. Indiquer s'il s'agit de maximum ou de minimum.

b) Déterminer l'ordonnée à l'origine de chacune de ces fonctions.

c) Calculer les éventuels zéros de f et de g.

d) Esquisser le graphe de chaque fonction en indiquant tous les points particuliers.

Résumé

Dans chaque case, esquisser le graphe.

	$a>0$	$a<0$
$\Delta>0$		
$\Delta=0$		
$\Delta<0$		

2.3 Intersections

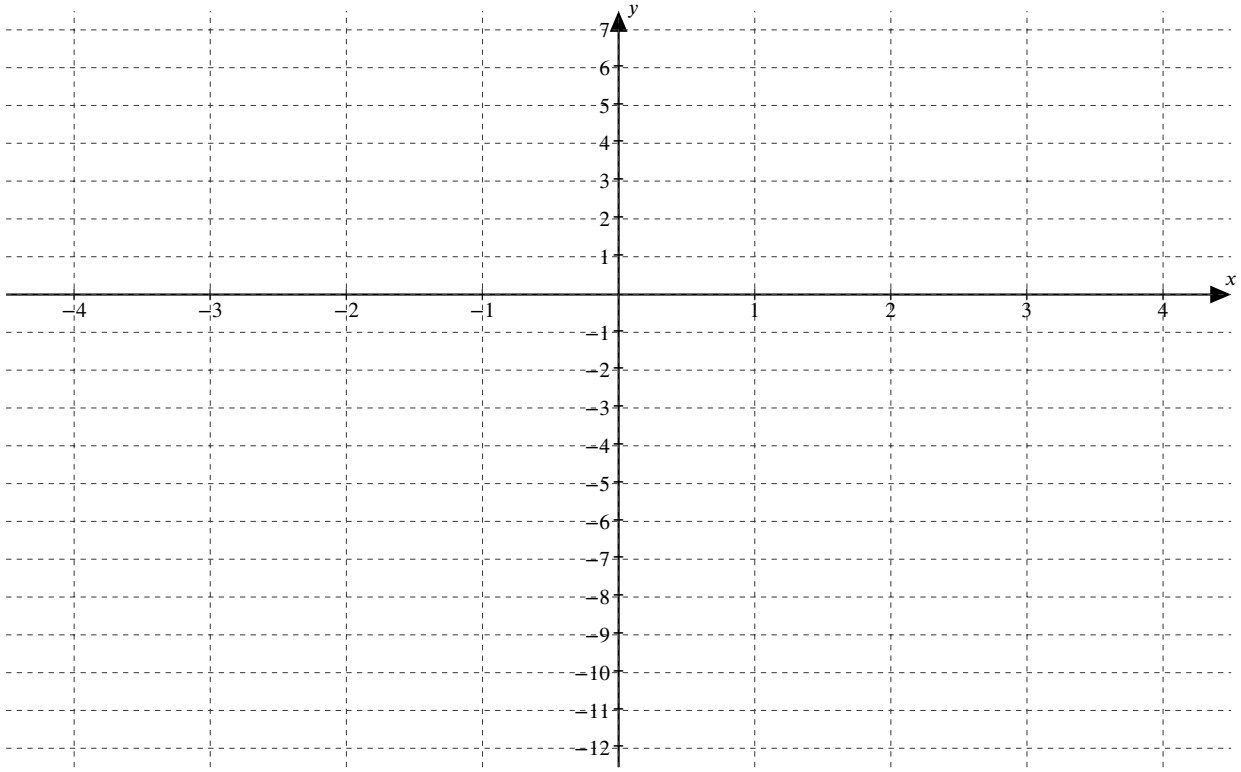
Pour trouver la première coordonnée des éventuels points d'intersection du graphe de f et du graphe de g, il faut résoudre l'équation :

$$\boxed{f(x)=g(x)}$$

Pour trouver la deuxième, on calcule l'image des valeurs obtenues.

Exemple : Soit $f(x)=-x^2+5$ et $g(x)=-\frac{3}{2}x-5$.

Calculer les coordonnées exactes des points d'intersection du graphe de f et du graphe de g, puis représenter graphiquement ces fonctions.



2.4 Optimisation quadratique

Les problèmes d'**optimisation** sont des problèmes où l'on cherche à déterminer quand une mesure sera maximum ou minimum.

On procédera de la manière suivante :

- lire soigneusement tout le problème et effectuer éventuellement un croquis de la situation,
- déterminer les variables avec leur unité ;
- écrire les équations liant les différentes variables (autant d'équations qu'il y a de variables) ;
- définir la quantité à optimiser avec son unité et l'exprimer en fonction des variables choisies ;
- substituer pour n'avoir plus qu'une seule variable dans la fonction ;
- déterminer les valeurs qui maximisent ou minimisent la fonction (sommet $\Longrightarrow -\frac{b}{2a}$ ou valeurs extrêmes) ;
- vérifier que les solutions obtenues sont cohérentes avec l'ensemble du problème ;
- donner la réponse au problème à l'aide d'une phrase, sans oublier les unités.

Exemple : Je désire construire un enclos rectangulaire pour mon lapin. Un des côtés de l'enclos sera le mur de ma maison et les trois autres seront faits grâce à une clôture de 6 mètres de longueur. Quelles dimensions vais-je choisir pour que mon lapin ait le plus de place possible ?

Exemple : De 2000 à 2010, les dépenses en communication d'une grande société ont évoluées selon la fonction suivante :

$$d(x) = -0{,}6x^2 + 5x + 130$$

où x est le nombre d'années depuis l'an 2000.

Durant cette période, en quelle année les dépenses ont été :

a) les plus élevées ?

b) les moins élevées ?

3 Polynômes et fonctions polynomiales

3.1 Rappel - Factorisation du degré 2

Factoriser un polynôme, c'est le transformer en un produit de deux ou plusieurs polynômes appelés **facteurs** :

$$10x^2+70x+100 \quad \Longleftrightarrow \quad 10(x+2)(x+5)$$

Lorsque l'on veut factoriser un polynôme, on commence par essayer la **mise en évidence** :

$$-88x^5-33x^3 \quad \Longleftrightarrow \quad -11x^3(8x^2+3)$$

La parenthèse obtenue doit, lorsque c'est possible, être encore factorisée.

Pour les **polynômes de degré 2**, les différentes méthodes sont :

- Repérer un **produit remarquable** :

$$\boxed{\begin{array}{l} A^2+2AB+B^2=(A+B)^2 \\ \\ A^2-2AB+B^2=(A-B)^2 \\ \\ A^2-B^2=(A+B)(A-B) \end{array}}$$

- Décomposer un **trinôme unitaire de degré 2 (somme-produit)** :

$$\boxed{x^2+(a+b)x+a\cdot b=(x+a)(x+b)}$$

- Utiliser la **formule du discriminant** :
  Si $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ alors $\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$

  où $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

  Si $\Delta<0$, le polynôme n'est pas factorisable.

Exemples : Factoriser par les méthodes les plus efficaces.

a) $x^3 - 7x^2 + 10x$

b) $100x^2 - 130x - 30$

c) $6x^4 - 6$

d) $-28x^6 + 63x^4$

e) $3x^2 - 10x + \frac{25}{3}$

f) $\frac{1}{10}x^4 + \frac{4}{5}x^3 + 2x^2$

g) $3x^2 - x - 2$

3.2 Factorisation pour les degrés supérieurs à 2

Dans ce chapitre, nous allons étudier plusieurs méthodes de factorisation pour des polynômes de degrés supérieurs à 2.

3.2.1 Changement de variable

Effectuer, réduire et comparer :

a) $(x^2+5)(x^2+2)$

b) $(y+5)(y+2)$

Dans certains cas, le polynôme à factoriser ressemble à un polynôme que l'on sait factoriser, mais ses puissances ont été doublées.

Exemple : x^4-7x^2+12

Pour le factoriser, on effectue un **changement de variable** : On pose que $y=x^2$ et donc que $y^2=x^4$.

Exemple : Factoriser x^4-18x^2+81.

Effectuer, réduire et comparer :

a) $(2x^3+1)(x^3-5)$

b) $(2y+1)(y-5)$

Un changement de variable peut donc aussi s'utiliser si les puissances ont été multipliées par un autre entier que 2.

Exemples :

a) x^6-9x^3+8

b) $8x^6-63x^3-8$

Mais comment factoriser les polynômes obtenus ? C'est ce que nous verrons dans le prochain paragraphe...

3.2.2 Produits remarquables du 3e degré

Tout comme pour le 2e degré, il existe des **produits remarquables** pour le 3e degré :

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A-B)^3$$

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

On peut les utiliser pour factoriser ou effectuer certains polynômes :

Exemples :

a) Effectuer $(2x+1)^3$

b) Effectuer $(3x-2)^3$

c) Factoriser $x^3 - 64$

d) Factoriser $1000x^3 + 27$

e) Factoriser $8x^3 - 35x^2 + 54x - 27$

3.2.3 Méthode du groupement

La **méthode du groupement** est une mise en évidence un peu plus complexe que celles effectuées jusque-là. Nous l'utiliserons avec des polynômes à 4 termes.

Effectuer les multiplications ci-dessous et observer les résultats obtenus :

a) $(3x^2+7)(2x+11)=$

b) $(x^2-5)(2x+11)=$

c) $(9x^3+1)(2x+11)=$

Exemples : Factoriser les polynômes ci-dessous :

a) $11x^3-3x^2-44x+12$

b) $x^4+7x^3+8x+56$

3.3 Division euclidienne

Pour factoriser, il faut parfois diviser.

Exemple : Écrire 5999 sous forme d'une multiplication, sachant qu'il est divisible par 7.

Pour les polynômes, nous allons procéder de la même manière et pour cela il nous faut apprendre à diviser des polynômes. La méthode est très similaire à la division en colonne pour les nombres.

Effectuer $92'737 : 5$ en colonne, avec reste et expliquer les étapes de la méthode. Écrire l'égalité fondamentale.

Nous allons maintenant diviser $14x^3 - 29x^2 - 5$ par $2x^2 - 3x + 1$.

Égalité fondamentale :

Exemples : Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x)=6x^2+x-5$ et $G(x)=3x+2$

b) $F(x)=4x^3-28x+24$ et $G(x)=x^2+2x-3$

Critère de divisibilité par $x-a$:

En observant le dernier exemple de la page précédente, on peut remarquer que l'écriture de l'égalité fondamentale est une manière de factoriser lorsque le reste est nul.

Exemple : $F(x)=4x^3-28x+24=$

Lorsque le résultat de la division de $F(x)$ par $G(x)$ est égal à zéro, on dit que $F(x)$ est **divisible** par $G(x)$. $G(x)$ est alors un **diviseur** de $F(x)$.

Exemple : $F(x)=4x^3-28x+24$ est divisible par $G(x)=x^2+2x-3$.
$G(x)=x^2+2x-3$ est un diviseur de $F(x)=4x^3-28x+24$.

Mais comment peut-on trouver un diviseur pour un polynôme $F(x)$ donné ?

Observons un exemple de polynôme factorisé :

Exemple : $F(x)=(x-10)(2x+1)(x+3)$

a) Réduire $F(x)$.

b) Comparer le terme de degré zéro avec la forme factorisée de $F(x)$. Que pouvez-vous en dire ? Pouvez-vous l'expliquer ?

c) Calculer $F(10)$ à l'aide du polynôme réduit, puis du polynôme factorisé. Que pouvez-vous en dire ? Pouvez-vous l'expliquer ?

Soit un polynôme $F(x)$ et un nombre réel a.

$F(x)$ est divisible par $x-a$ si et seulement si $F(a)=0$

Exemple :

a) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessous, les polynômes divisibles par $x-10$.

$A(x)=x^3+7x^2+6x-8$ $C(x)=2x^3-7x^2-200x+700$

$B(x)=x^{300}-5x^{23}+3x+1$ $D(x)=x^3-9x^2-16x+60$

b) Pour ceux qui sont divisibles par $x-10$, effectuer la division, écrire l'égalité fondamentale et finir la factorisation.

Factorisation grâce à la division euclidienne

1) Tester les diviseurs positifs et négatifs du terme de degré 0 de $F(x)$ jusqu'à avoir trouvé un nombre a tel que $F(a)=0$.

2) Effectuer la division de $F(x)$ par $x-a$. Son reste doit être nul.

3) Écrire l'égalité fondamentale de cette division. La première étape de factorisation est faite.

4) Si cela est possible, continuer la factorisation à l'aide de la même méthode ou d'une autre méthode connue.

Exemples : Factoriser.

a) $x^3+3x^2-10x-24$ b) $2x^3+7x^2-14x+5$

c) $6x^4 - 19x^3 + 13x^2 + 4x - 4$

Exemples : Résoudre par factorisation.

a) $6x^4 + 43x^3 + 6x^2 - 7x = 0$

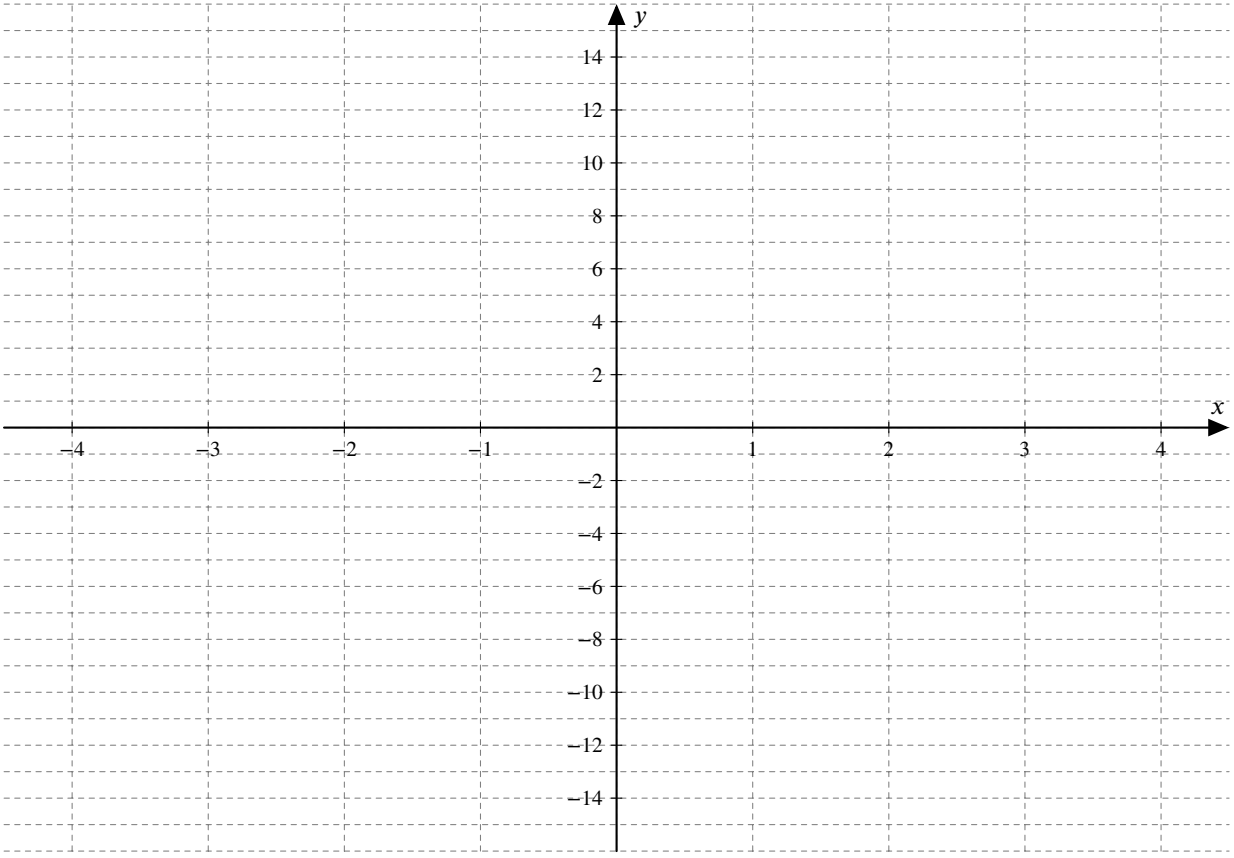
b) $x^3 + 7x^2 + 11x = -5$

3.4 Fonctions polynomiales

3.4.1 Généralités

Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement la fonction f.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=(x+2)(x+\frac{1}{2})(x-3)$							



On peut remarquer que le tableau de valeurs n'est pas forcément l'outil idéal pour représenter une fonction polynomiale. Les valeurs intéressantes, par exemple les zéros de la fonction, n'apparaissent pas systématiquement dedans. De plus, il y a beaucoup de calculs à effectuer pour le remplir.

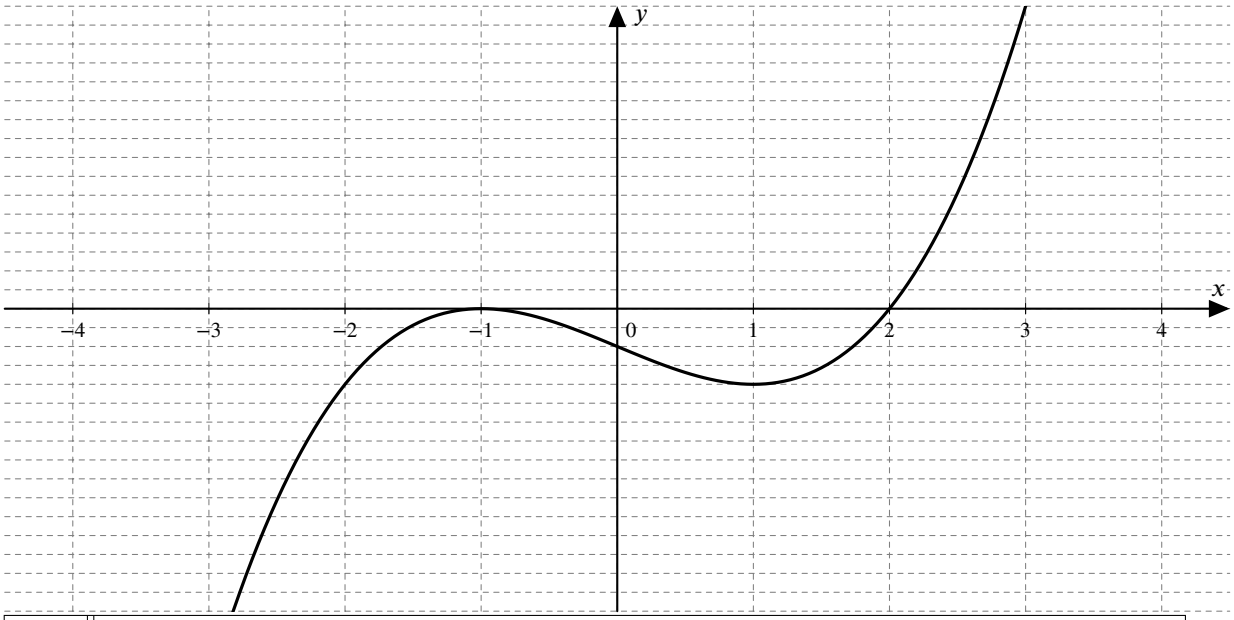
Il est souvent plus simple et approprié d'utiliser le **tableau des signes de la fonction**. C'est un tableau dans lequel la première ligne contient les zéros et les valeurs interdites de la fonction, tandis que la deuxième indique le signe des images obtenues :

x		-2		$-0{,}5$		3	
$f(x)=(x+2)(x+0{,}5)(x-3)$	−	0	+	0	−	0	+

On dit alors qu'on **étudie le signe de la fonction**.

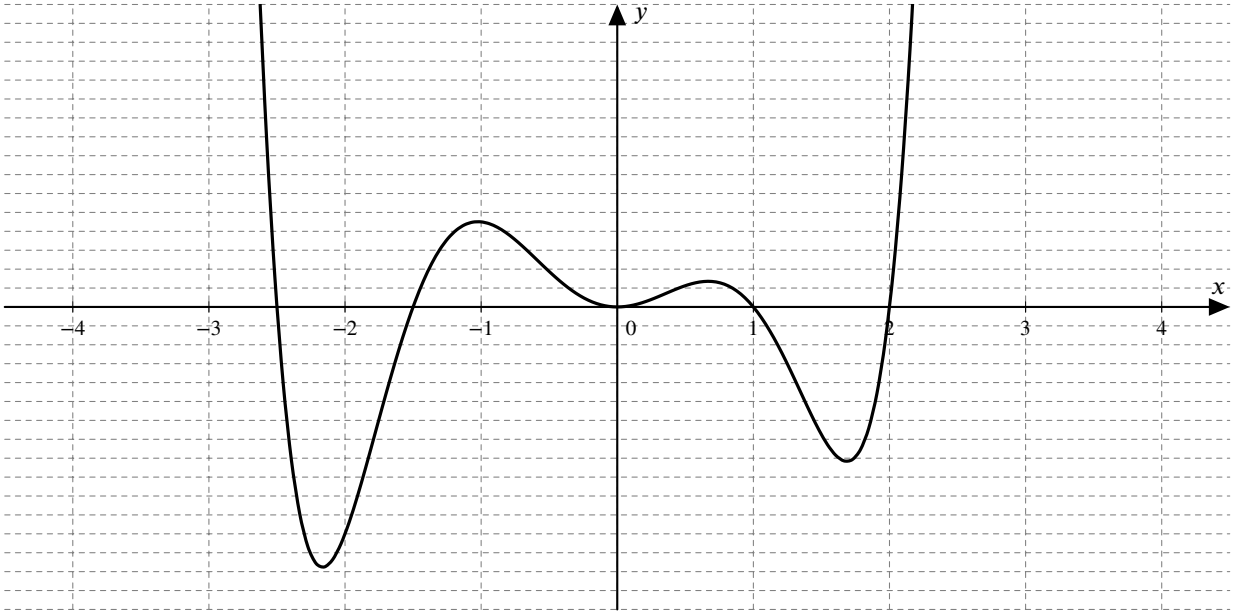
Exemples : Compléter le tableau des signes des fonctions représentées ci-dessous.

a)



x	
$f(x)$	

b)

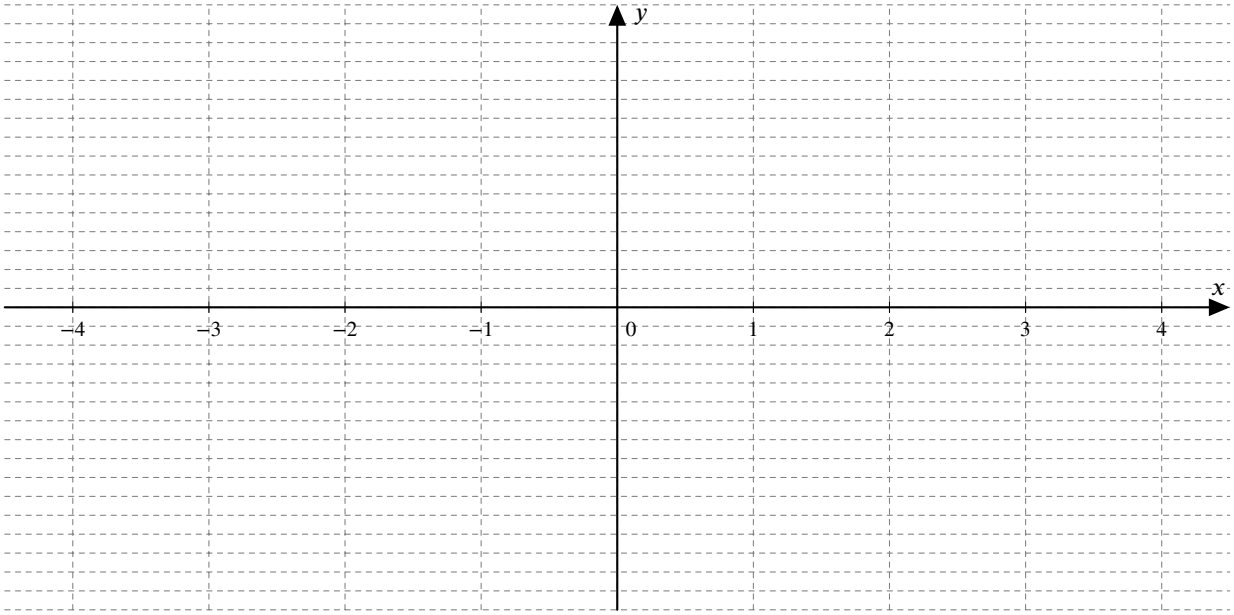


x	
$f(x)$	

Exemples : Faire une esquisse du graphe d'une fonction correspondant au tableau des signes.

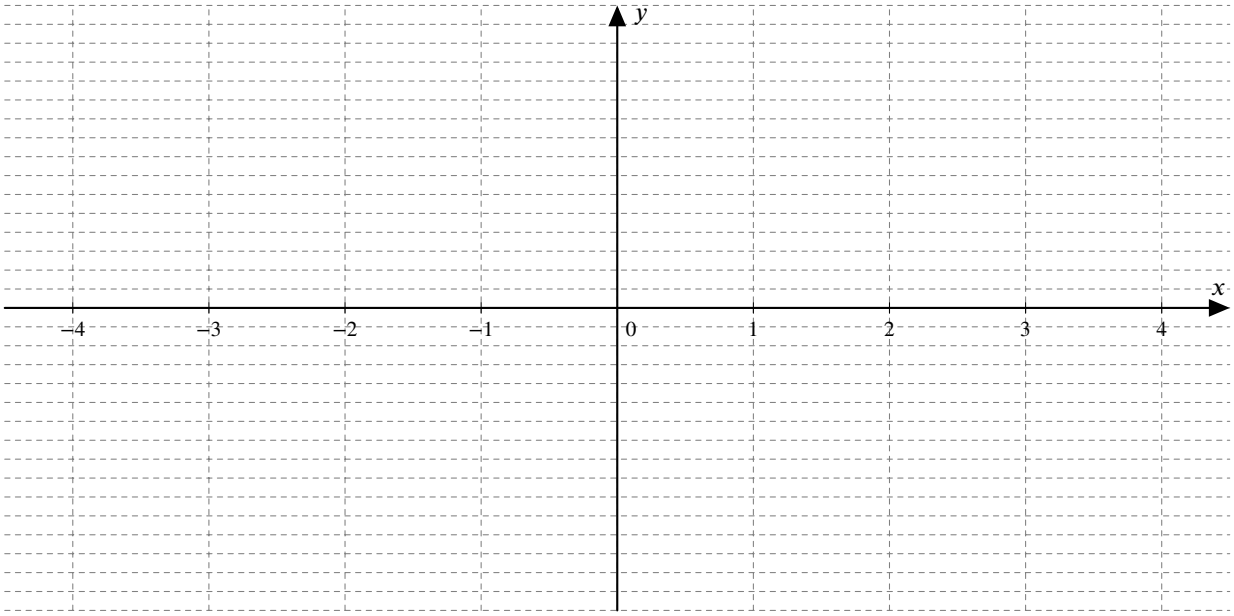
a)

x		-3		-1		$\frac{7}{2}$	
$f(x)$	–	0	+	0	+	0	+



b)

x		-2		0		$\frac{3}{2}$		3	
$f(x)$	+	0	–	0	+	0	–	0	–



Exemples : Compléter ce tableau de valeurs, puis le tableau des signes correspondant.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$4x$									
$x+3$									
$2-x$									
$4x(x+3)(2-x)$									

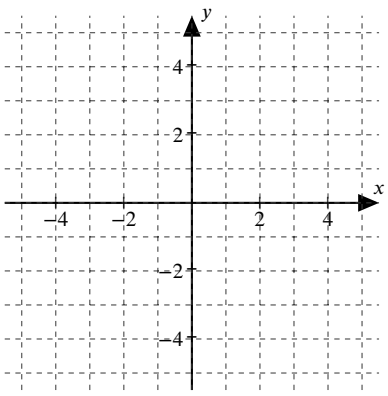
x	
$4x$	
$x+3$	
$2-x$	
$4x(x+3)(2-x)$	

On peut observer que le signe du produit est déterminé par les signes des facteurs et la règle des signes. Or, tout polynôme est décomposable en produit de facteurs du 1er et du 2e degrés. Nous allons donc étudier le signe des fonctions affines et quadratiques et nous en servir pour trouver le signe des autres fonctions polynomiales.

3.4.2 Signe d'une fonction affine

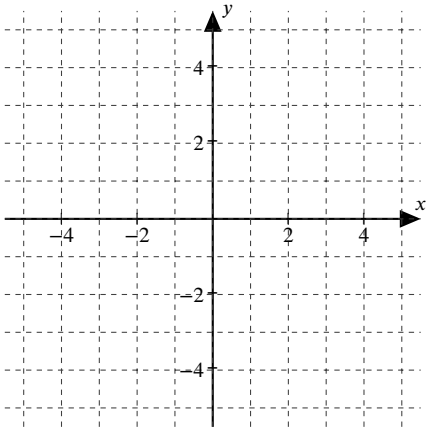
Exemples : Représenter le graphe de la fonction puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x)=\frac{1}{2}x+1$



x	
$f(x)$	

b) $g(x)=-\frac{1}{2}x+1$



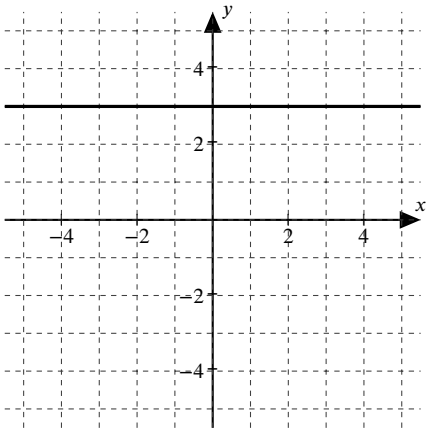
x	
$g(x)$	

Le graphe d'une fonction affine $f(x)=mx+h$ est une droite. On a donc les cas de figure suivants :

– Si $m=0$, la fonction est constante et son signe est celui de h.

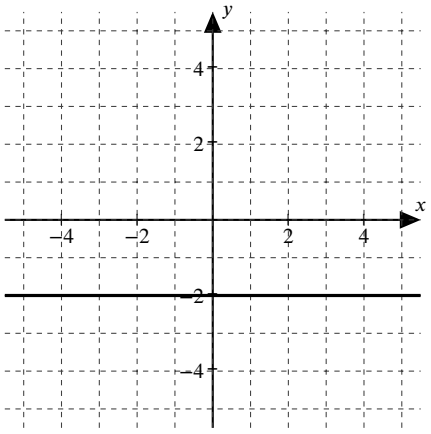
Exemples :

a) $f(x)=3$



x	
$f(x)$	+

b) $g(x)=-2$

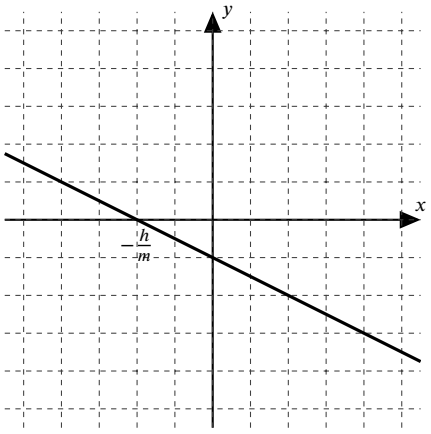


x	
$g(x)$	–

– Si $m\neq 0$, la fonction a un unique zéro, que l'on trouve en résolvant l'équation $mx+h=0$.

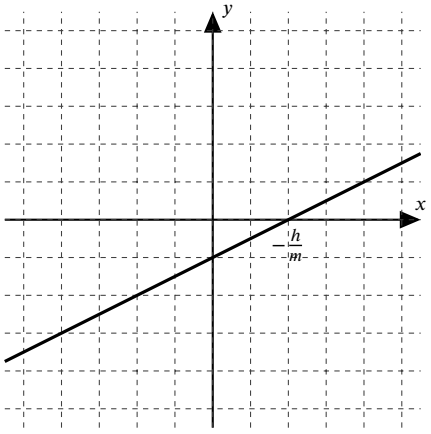
Le signe de la fonction dépend du signe de la pente m.

- si la pente est négative



x		$-\frac{h}{m}$	
$f(x)$	+	0	–

- si la pente est positive



x		$-\frac{h}{m}$	
$f(x)$	–	0	+

Remarque : $-\dfrac{h}{m}$ n'est pas toujours négatif. Cela dépend des signes de h et de m.

Exemple : Pour $f(x)=-2x+3$ $\qquad -\dfrac{h}{m}=-\dfrac{3}{-2}=+\dfrac{3}{2}.$

Exemples : Remplir les tableaux des signes ci-dessous.

a)

x	
$5x+10$	

b)

x	
$5x-10$	

c)

x	
$-5x+10$	

d)

x	
$-5x-10$	

e)

x	
$-5x$	

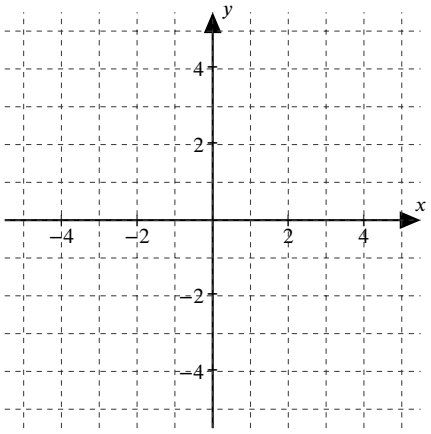
f)

x	
-10	

3.4.3 Signe d'une fonction quadratique

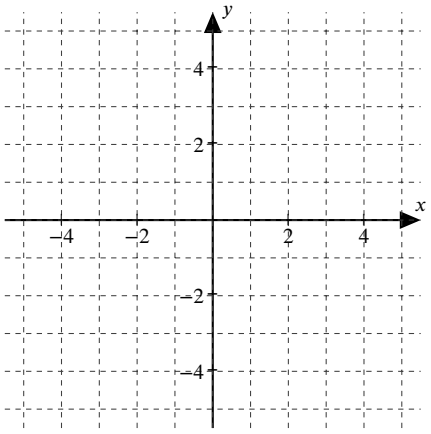
Exemples : Représenter le graphe de la fonction puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x)=x^2-9$



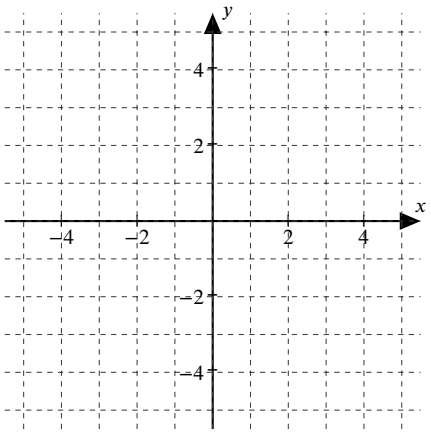
x	
$f(x)$	

c) $h(x)=-x^2+9$



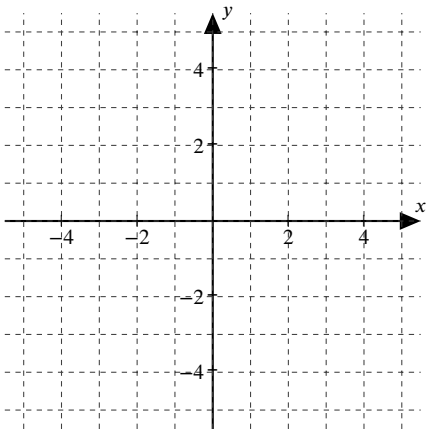
x	
$h(x)$	

b) $g(x)=x^2+3x$



x	
$g(x)$	

d) $i(x)=-0{,}5x^2$



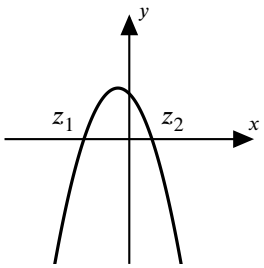
x	
$i(x)$	

Le graphe d'une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole. On a donc les cas de figure suivants :

– Si $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif, la fonction a deux zéros, que l'on peut calculer grâce à :

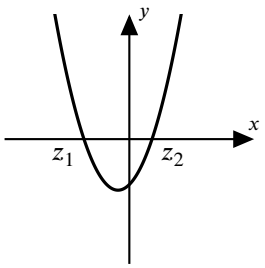
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $a < 0$



x		z_1		z_2	
$f(x)$	–	0	+	0	–

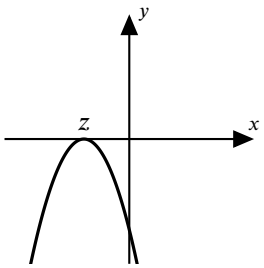
- si $a > 0$



x		z_1		z_2	
$f(x)$	+	0	–	0	+

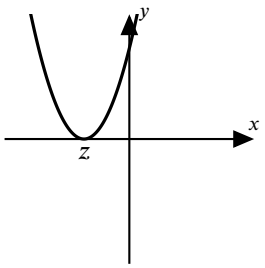
– Si $\Delta = 0$, la fonction a un seul zéro, que l'on peut calculer grâce à $z = \frac{-b}{2a}$.

- si $a < 0$



x		z	
$f(x)$	–	0	–

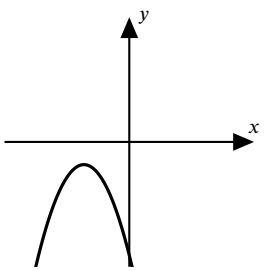
- si $a > 0$



x		z	
$f(x)$	+	0	+

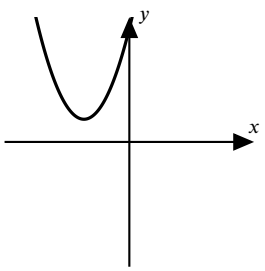
– Si Δ est négatif, la fonction n'a pas de zéro.

- si $a < 0$



x	
$f(x)$	–

- si $a > 0$



x	
$f(x)$	+

Exemples : Remplir les tableaux des signes ci-dessous.

a)

x	
$x^2+7x+10$	

b)

x	
$-9x^2+6x-1$	

c)

x	
$2x^2+x+1$	

d)

x	
$-x^2-16$	

e)

x	
x^2-6x+9	

f)

x	
$-2x^2+x+1$	

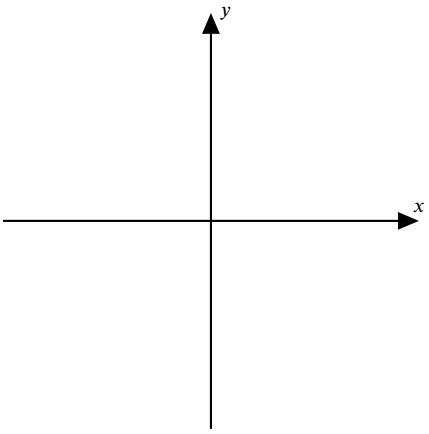
3.4.4 Signe d'une fonction polynomiale

La première étape est de factoriser le polynôme à l'aide des différentes méthodes que nous avons étudiées :

- mise en évidence,
- identités remarquables,
- changement de variable,
- méthode du groupement,
- division polynomiale.

Ensuite, il faut faire un tableau des signes avec une ligne par facteur, puis remplir la ligne finale à l'aide de la règle des signes.

Exemple : Étudier le signe de la fonction $f(x)=-2x^6+20x^4-18x^2$ et faire une esquisse du graphe de la fonction.



3.4.5 Signe de $(g(x))^n$

Exemples :

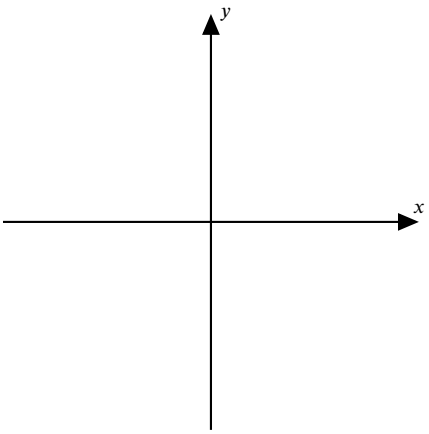
a) Étudier le signe de la fonction $f(x)=(x+2)^4$.

b) Étudier le signe de la fonction $f(x)=(x+2)^5$.

Lorsque n est pair, le signe de $(g(x))^n$ est :

Lorsque n est impair, le signe de $(g(x))^n$ est :

Exemple : Étudier le signe de la fonction $f(x) = -5x^6(2-x)^5(7x+4)^4$ et faire une esquisse du graphe de la fonction.



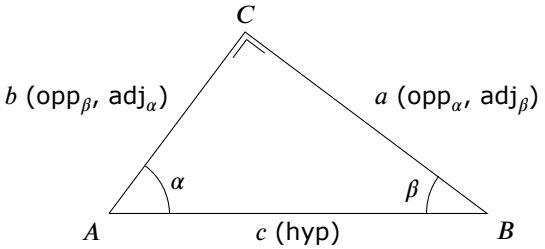
Quels sont les zéros de la fonction qui occasionnent un changement de signe ?

4 Trigonométrie II

4.1 Rappel - Trigonométrie dans le triangle rectangle

Soit un triangle ABC rectangle en C.

- Le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse**. Il est abrégé par « hyp ». C'est le côté le plus long.
- Les deux autres côtés sont appelés **cathètes**. Pour les différencier, il faut se repérer par rapport à l'un des angles.
  La **cathète adjacente** à l'angle α, notée « adj_α », est la cathète qui est un des côtés de α. L'autre cathète est la **cathète opposée** à l'angle α, notée « opp_α ».



Pour chaque angle non droit du triangle ABC, on peut définir les rapports trigonométriques **sinus**, **cosinus** et **tangente**. Par exemple, pour α :

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opp}_\alpha}{\text{hyp}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\text{adj}_\alpha}{\text{hyp}} \qquad \tan(\alpha) = \frac{\text{opp}_\alpha}{\text{adj}_\alpha}$$

À l'aide des rapports trigonométriques, il est possible de **résoudre un triangle rectangle**. Cela signifie calculer les longueurs de tous ses côtés, les valeurs de ses angles et son aire.

Exemples :

a) Résoudre le triangle ABC rectangle en C dont on donne le côté $b = 8{,}2$ cm et l'angle $\alpha = 37°$.

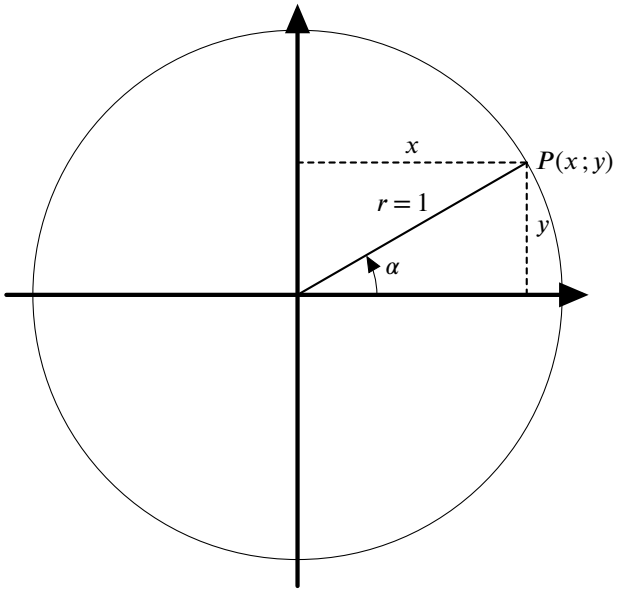
b) Résoudre le triangle ABC rectangle en C dont on donne les côtés $a = 7{,}6$ cm et $c = 18{,}4$ cm.

4.2 Cercle trigonométrique

4.3 Rapports trigonométriques généralisés

Jusqu'à présent, nous avons défini les rapports trigonométriques pour des angles dans des triangles rectangles, donc des angles aigus. Nous aimerions maintenant pouvoir travailler dans des triangles quelconques et donc aussi avec des angles obtus. Et pourquoi se limiter aux angles convexes ? Comment peut-on généraliser la notion de rapports trigonométriques à tous les angles ?

Pour cela nous allons avons besoin du cercle trigonométrique. Avant de définir cette nouvelle notion, observons la figure ci-dessous. Il s'agit d'un cercle de centre $O(0\,;0)$ et de rayon 1. Le point $P(x\,;y)$ est sur le cercle et l'angle entre Ox et OP est α.



Déterminer $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ à l'aide des coordonnées de P.

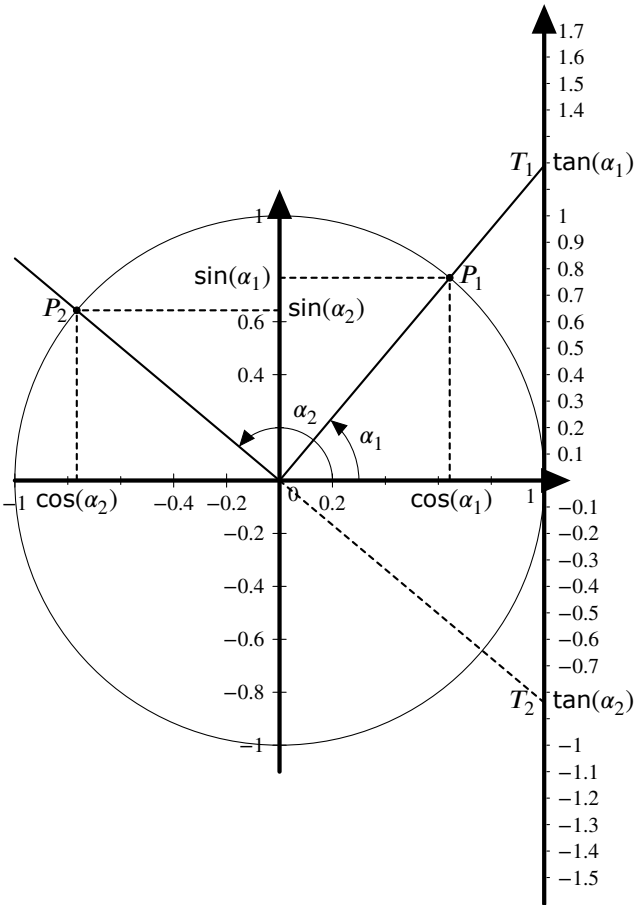
Sur cette même figure, représenter un triangle rectangle dont un des angles est α et tel que adj_α mesure 1.

Où peut-on retrouver la valeur de $\tan(\alpha)$?

Définition 4.1 On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre $O(0;0)$ de rayon 1 muni de 3 axes gradués tels que ci-dessous.

On définit les **rapport trigonométriques** de l'angle α de la manière suivante :

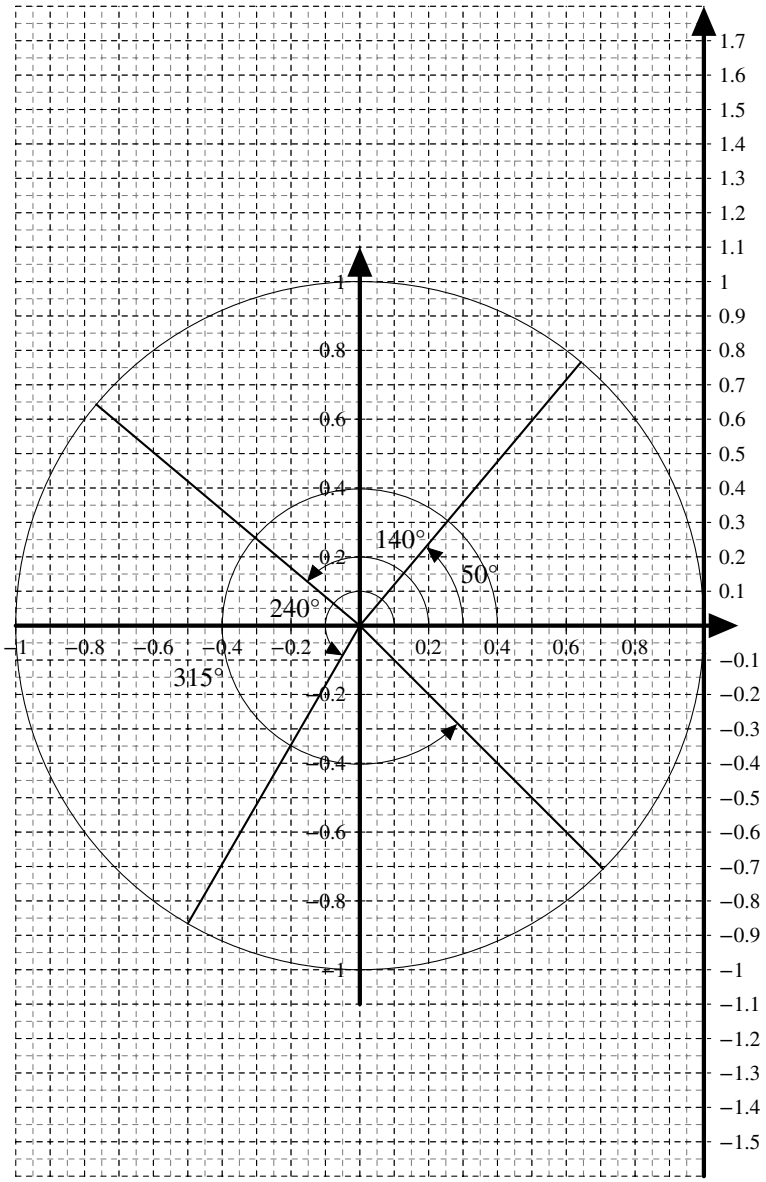
- Le **cosinus de l'angle** α, $\cos(\alpha)$, est la 1re coordonnée du point P, où P est le point du cercle tel que l'angle entre Ox et OP est α.
- Le **sinus de l'angle** α, $\sin(\alpha)$, est la 2e coordonnée du point P.
- La **tangente de l'angle** α, $\tan(\alpha)$, est la 2e coordonnée du point T, où T est le point de la tangente verticale telle que l'angle entre Ox et OT est α.



Remarques :

- Cette définition induit que $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ donnent des valeurs comprises entre -1 et 1.
- Par contre, $\tan(\alpha)$ peut prendre n'importe quelles valeurs.
- Pour les angles aigus, cette définition est équivalente à celle vue précédemment.
- Le cercle trigonométrique est en quelque sorte un formulaire interactif !

Exemple : Estimer les rapports trigonométriques des angles ci-dessous grâce au cercle trigonométrique. Comparer ensuite aux valeurs données par la calculatrice.



degrés	240°	140°	50°	315°	−45°	0°	90°	180°	270°	500°
sin										
cos										
tan										

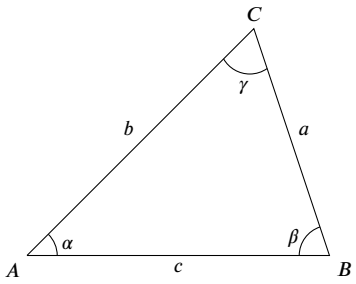
Quelles sont les valeurs interdites de la fonction tan ?

4.4 Trigonométrie dans le triangle quelconque

Théorème du cosinus

Nous avons vu comment résoudre un triangle rectangle. Nous allons maintenant faire de même pour les triangles quelconques.

Soit un triangle quelconque ABC, nous nommerons les côtés et les angles comme ci-dessous :



Exemple :

a) Calculer la longueur a d'un triangle quelconque, sachant que l'angle $\alpha = 60°$, $c = 5$ et $b = 6$. Pour y arriver, partager le triangle en deux triangles rectangles à l'aide de la hauteur issue de C et utiliser uniquement le cosinus comme rapport trigonométrique. Noter soigneusement le raisonnement.

b) En utilisant le raisonnement fait ci-dessus, exprimer a à l'aide des lettres α, c et b.

Théorème 4.1 (Théorème du cosinus ou de Pythagore généralisé) *Soit un triangle ABC. On a :*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Exemple : Calculer, à l'aide de ce théorème, la longueur a d'un triangle quelconque, sachant que l'angle $\alpha = 60°$, $c = 5$ et $b = 6$.

Remarque : Si $\alpha = 90°$, on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(90) = b^2 + c^2$. On retrouve le théorème de Pythagore.

Nous utiliserons le théorème du cosinus pour résoudre des triangles lorsqu'on connaît la longueur des trois côtés ou deux côtés et un angle.

Exemple : Résoudre le triangle ABC sachant que $a = 4$, $b = 5$ et $c = 7$ (sauf l'aire). Vérifier par construction.

Exemple : Résoudre le triangle ABC sachant que $\alpha = 40^\circ$, $b = 5$ et $c = 7$ (sauf l'aire).

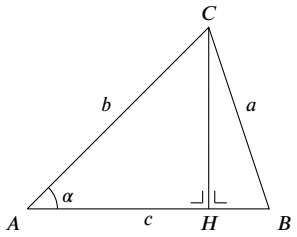
Vérifier par construction.

Exemple : Résoudre le triangle ABC sachant que $\alpha = 40^\circ$, $a = 4$ et $b = 5$ (sauf l'aire).

Vérifier par construction.

Théorème de l'aire

Exemple : Soit un triangle quelconque ABC avec $\alpha = 60°$, $c = 5$ et $b = 6$.



a) Calculer la hauteur CH.

b) Calculer l'aire du triangle en fonction.

Théorème 4.2 (théorème de l'aire) *Soit un triangle ABC. On a :*

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}ab \cdot \sin(\gamma)$$

Exemple : En utilisant le théorème de l'aire, calculer l'aire du triangle ABC tel que l'angle $\alpha = 60°$, $c = 5$ et $b = 6$.

Théorème du sinus

Théorème 4.3 (théorème du sinus) *Soit un triangle ABC. On a :*

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

Exemple : Calculer l'angle β du triangle ABC, à l'aide de ce théorème, sachant que l'angle $\alpha = 40^\circ$, $a = 4$ et $b = 5$. Trouver toutes les possibilités et vérifier par construction.

Exemple : Calculer l'angle β du triangle ABC, à l'aide du théorème du sinus, sachant que l'angle $\alpha = 40^\circ$, $b = 5$ et $c = 3$. Trouver toutes les possibilités et vérifier par construction.

Remarque : Ce théorème est plus facile d'utilisation que le théorème du cosinus. Néanmoins, lorsqu'on l'utilise pour trouver un angle, il donne parfois des solutions que l'on doit éliminer.

Malheureusement, il n'y a pas toujours des critères simples, à part la construction, pour savoir si l'on doit éliminer une possibilité ou non. De ce fait, il vaut mieux éviter d'utiliser le théorème du sinus pour trouver des angles.

Nous utiliserons le théorème du sinus pour résoudre des triangles lorsqu'on connaît deux angles et un côté.

Exemple : Résoudre le triangle ABC sachant que $a = 6$, $\alpha = 45^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$. Vérifier par construction.

5 Analyse combinatoire

5.1 Principes fondamentaux

L'analyse combinatoire est la branche des mathématiques qui étudie le dénombrement.

Cela nous permettra de répondre, par exemple, aux questions suivantes :

- Combien d'équipes de 4 personnes peut-on former à partir des membres de la classe ?
- Combien d'anagrammes peut-on former à partir du mot ANAGRAMME ?
- Combien y a-t-il de grilles possibles à l'EuroMillion ?

Et si je sais combien de grilles il y a à l'EuroMillion, je peux calculer la probabilité d'y gagner...

Principe de multiplication

Exemple : Il y a 3 chemins pour aller de A à B et 2 pour aller de B à C. Combien de chemins différents y a-t-il pour aller de A à B puis à C ?

Supposons qu'un événement E se décompose en k étapes successives. Si la première étape à n_1 réalisations différentes, la deuxième n_2, etc ..., alors l'événement E admet $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ réalisations différentes.

En combinatoire, les **réalisations** sont le terme employé pour désigner les cas possibles.

Il est possible de visualiser ce principe par la méthode des « gobelets ». Chaque étape est représentée par un gobelet et les réalisations sont les objets que l'on peut mettre dans chaque gobelets.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent.

Chaque trajet est un goblet : $|\underbrace{\quad}_{A\to B}| \quad |\underbrace{\quad}_{B\to C}|$

Puis, on note le nombre de chemins :

Si certaines étapes ont des contraintes, on commence par celles qui en ont le plus :

Exemple : Combien de nombres pairs à trois chiffres existe-t-il ?

Principes d'addition et de soustraction

Exemple : Combien de codes de 5 lettres peut-on écrire s'ils sont composés, soit uniquement de voyelles, soit uniquement de consonnes ?

Supposons qu'un événement E se décompose en 2 sous-événements disjoints E_1 et E_2, alors le nombre de réalisations de E est égal à la somme du nombre de réalisations de E_1 avec le nombre de réalisations de E_2.
On dit que deux événements sont **disjoints** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps

Exemple : De combien de manières différentes peut-on obtenir une somme comprise entre 6 et 8 en lançant deux dés distincts ?

Ce principe peut s'utiliser sous forme de soustraction, par exemple lorsqu'il y a la formulation **« au moins un »**.

Supposons qu'un événement E_1 soit un sous-événement de l'événement E, alors le nombre de réalisations de E_1 est égal au nombre de réalisations de E moins celles du complémentaire de E_1.

Exemple : Combien de codes de cadenas à 5 chiffres peut-on écrire s'ils doivent contenir au moins un 0 ?

Exemple : Calculer de deux manières différentes le nombre de paires d'initiales comprenant au moins un X.

5.2 Les permutations

La fonction factorielle

Exemples :

a) Combien de codes de 3 lettres peut-on former avec les lettres A, B et C en n'utilisant qu'une seule fois chaque lettre ?

b) Combien de codes de cadenas à 10 chiffres peut-on former en n'utilisant qu'une seule fois chaque chiffre ?

On se rend compte que le calcul du deuxième exemple est fastidieux à faire, même à la calculatrice. On a donc inventé une fonction qui donne directement le résultat à partir du premier nombre :

La **fonction factorielle**, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, est définie par :

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \text{ si } n \neq 0$$

Par convention, on définit $0! = 1$.

Comment utiliser cette fonction sur ma calculatrice :

Exemple :

a) $5! =$

b) $20! =$

c) $70! =$

d) $\dfrac{70!}{67!} =$

Exemple : Combien de plans de classe peut-on faire pour placer les 24 élèves de la classe s'il y a exactement 24 places à disposition ?

Les permutations simples

Une **permutation** à n éléments est une disposition **ordonnée** de n objets .

Une permutation est **permutation simple** si les n objets sont **distincts**.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n le nombre des permutations simples à n éléments.

Les exemples de la page précédente sont des permutations. On peut constater que :

$$\boxed{P_n = n!}$$

Preuve : Représentons chaque emplacement et indiquons le nombre de possibilités en dessous :

___	___	...	___	___	___
n	$n-1$	...	3	2	1

Il y a n possibilités pour la première position. Il ne reste ensuite plus que $n-1$ objets pour la suivante et ainsi de suite.

On conclut grâce au principe de multiplication. #

Exemple : Combien y a-t-il d'anagrammes du mot GYMNASE ?

Exemple : Combien y a-t-il de classements différents dans une course où il y a 10 coureurs ?

Les permutations avec répétitions

Exemple : Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ELEVE ?

On parle de **permutation avec répétions** lorsqu'il y a des objets indiscernables parmi la collection.

Prenons une collection de n objets composés de p_1 objets identiques d'une première sorte, p_2 d'une deuxième sorte, etc... avec $p_1 + p_2 + \ldots p_k = n$.

On note $\overline{P_n}(p_1 ; p_2 ; \ldots ; p_k)$ le nombre des permutations avec répétitions de cette collection .

En observant l'exemple précédent, on peut constater que :

$$\overline{P_n}(p_1 ; p_2 ; \ldots ; p_k) = \frac{n!}{p_1 ! \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k}$$

Exemples :

a) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot EXCELLENCE ?

b) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ANAGRAMMES ?

5.3 Les arrangements

5.3.1 Les arrangements simples

Exemple : Combien de codes de 5 lettres différentes peut-on former ?

On appelle **arrangement** une disposition **ordonnée** de p éléments choisis parmi une collection de n objets.

On parle **arrangement simple** si les p éléments choisis **doivent être différents les une des autres**.

Soit p et $n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p \leq n$.

On note A_p^n le nombre d'arrangements simples de p éléments choisis parmi une collection de n objets distincts.

On peut constater que :

$$A_p^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemples :

a) Combien y a-t-il de podiums possibles lors de la finale d'une course comprenant 8 participants ?

b) Combien de plans de classe peut-on faire s'il y a 24 élèves et 26 places ?

Comment utiliser cette fonction sur ma calculatrice :

Remarque : Une permutation simple à n éléments est un arrangement simple de n éléments choisis parmi n objets, donc $P_n = A_n^n$. Cela justifie le choix de $0! = 1$, car ainsi $A_n^n = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$

Les arrangements avec répétitions

Exemple : Combien de codes de 5 lettres peut-on former ?

On appelle **arrangement avec répétions** un arrangement dont les éléments choisis **n'ont pas besoin d'être différents les une des autres**.

Soit p et $n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p \leq n$.

On note $\overline{A_p^n}$ le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments choisis parmi n objets.

On peut constater que :

$$\boxed{\overline{A_p^n} = n^p}$$

Exemples : On effectue un tirage au sort parmi les 24 élèves de la classe chaque vendredi durant les 10 premières semaines de cours. On écrit ensuite la liste des numéros de semaines avec le nom de l'élève à côté.

a) Combien y a-t-il de listes possibles si le nom est remis en jeu après chaque tirage ?

b) Combien y a-t-il de listes possibles si le nom n'est pas remis en jeu après chaque tirage ?

5.4 Les combinaisons

Exemple : On choisit 3 personnes dans une classe de 24 personnes. Combien de groupes différents puis-je obtenir ?

On appelle **combinaison simple** un choix **non ordonné** de p éléments différents parmi une collection de n objets distincts.

Soit p et $n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p \leq n$.

On note C_p^n le nombre de combinaisons simples de p éléments parmi n objets distincts.

On peut constater que :

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Exemple : Pour remplir une grille d'*Euromillion*, il faut choisir 5 numéros et 2 étoiles.

a) Les 5 numéros sont choisis entre 1 et 50. Combien cela fait-il de possibilités ?

b) Les 2 étoiles sont choisies parmi 12. Combien cela fait-il de possibilités ?

c) Combien y a-t-il de grilles différentes ?

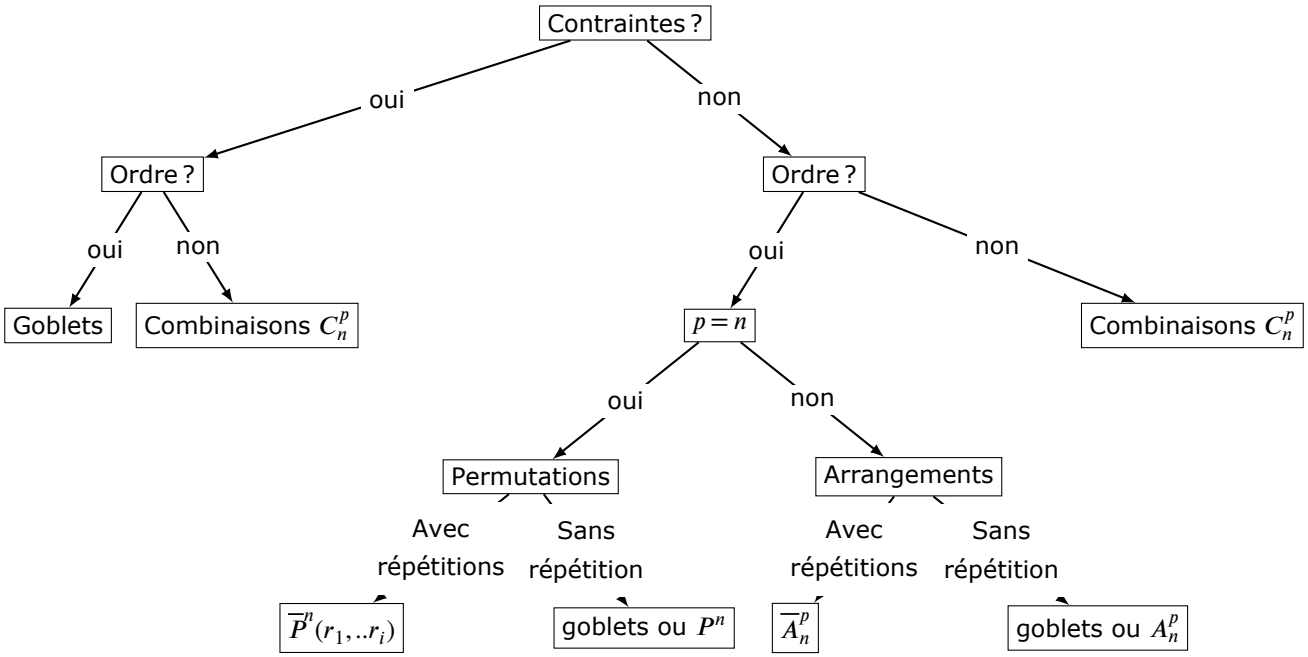
Comment utiliser cette fonction sur ma calculatrice :

5.5 Synthèse

La difficulté est de reconnaître quelle formule utiliser. Les questions de base sont toujours : « L'ordre est-il important ou non ? » et « Y a-t-il des répétitions ou non ? »

Les situations ne sont souvent pas aussi simples que les exemples précédents. Il faudra utiliser judicieusement les principes de multiplication et d'addition avec les différentes formules. Seule la pratique de multiples situations vous fera gagner en aisance.

L'arbre ci-dessous peut vous aider à identifier la bonne méthode :



Remarques :

- Lors d'un tirage si les objets sont tirés « successivement » l'ordre est important, s'il sont tirés « simultanément » l'ordre ne compte pas.
- Un tirage avec remise a forcément des répétitions.
- Lors de la distribution d'une main dans un jeu de cartes, l'ordre ne compte pas.

Exemple : Une enseignante de mathématiques prépare un test de combinatoire qui aura 9 exercices.

a) Elle choisit parmi sa banque de données qui contient 50 exercices. Combien y a-t-il de tests différents possibles si l'on ne tient pas compte de l'ordre des exercices ?

b) Elle choisit parmi sa banque de données qui contient 16 exercices de permutations, 20 exercices d'arrangements et 14 exercices de combinaisons. Combien y a-t-il de tests différents possibles si l'on ne tient pas compte de l'ordre des exercices et qu'elle choisit 3 exercices de chaque sorte ?

c) Les 9 exercices ont été choisis. Combien y a-t-il d'ordres possibles ?

d) Les 9 exercices ont été choisis. Combien y a-t-il d'ordres possibles si les 3 exercices de permutations doivent être l'un après l'autre ?

e) Les 9 exercices ont été choisis. Combien y a-t-il d'ordres possibles si les 3 exercices de permutations ne doivent pas être tous l'un après l'autre ?

f) Les 9 exercices ont été choisis. Combien y a-t-il d'ordres possibles si le premier et le dernier exercice doivent être choisis parmi les 3 exercices de permutations ?

Exemple : Une classe, qui compte 14 filles et 4 garçons, part en voyage d'études.

a) De combien de manières différentes peut-on choisir les 8 filles qui dormiront dans le premier dortoir et les 6 filles qui dormiront dans le deuxième ?

b) Je veux choisir un groupe de 5 personnes pour m'aider à l'organisation du voyage d'études. Combien de possibilités y a-t-il pour qu'il compte exactement un garçon ?

c) Je veux choisir un groupe de 5 personnes pour m'aider à l'organisation du voyage d'études. Combien de possibilités y a-t-il pour qu'il compte au moins un garçon ?

d) Je veux choisir un groupe de 5 personnes pour m'aider à l'organisation du voyage d'études. Combien de possibilités y a-t-il pour qu'il compte au moins deux garçons ?

e) Sur place, pour faire la commande des boissons du petit-déjeuner, chacun des élèves devra choisir entre prendre un thé, un café ou un jus d'orange. De combien de manières différentes la classe pourrait-elle faire sa commande ?

6 Exercices

6.1 Programmation linéaire

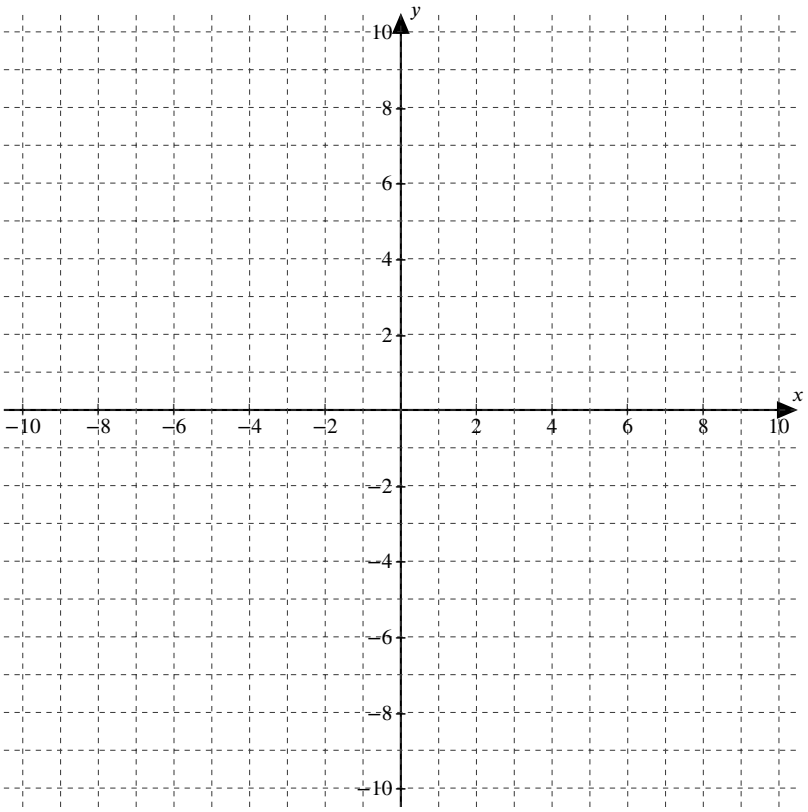
Inéquations linéaires à deux inconnues

Exercice 1.1

a) Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions de l'inéquation $x+3y>6$?

$(0;0)$	$(5;5)$	$(-6;6)$	$(4;-4)$	$(-10;1)$
$(0;5)$	$(6;0)$	$(-7;0)$	$(0;-8)$	$(10;-1)$

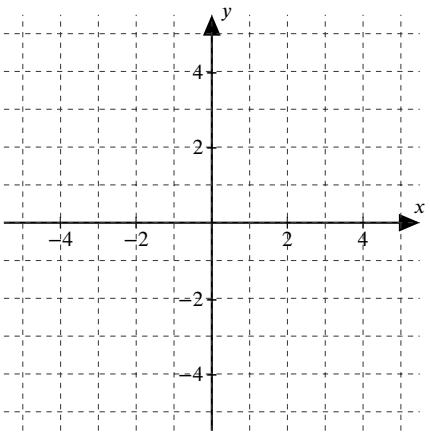
b) Représenter graphiquement la droite $x+3y=6$.



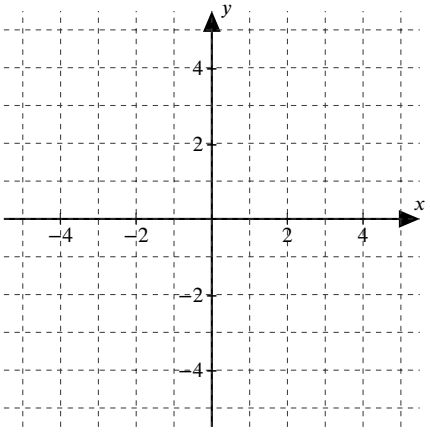
c) Placer les points dont les coordonnées sont les couples proposés au a) et colorier en rouge ceux qui sont solutions de l'inéquation $x+3y>6$. Que constate-t-on ?

Exercice 1.2 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des inéquations ci-dessous :

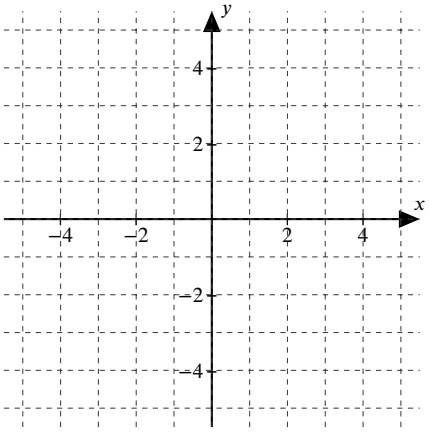
a) $x - y < 4$



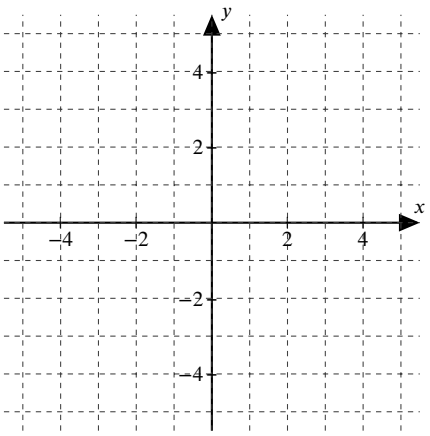
b) $2x + 5y \geq 10$



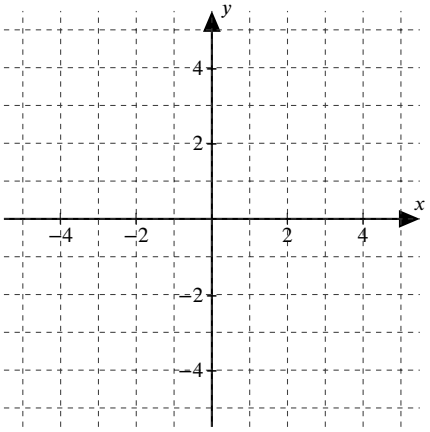
c) $x \leq -3$



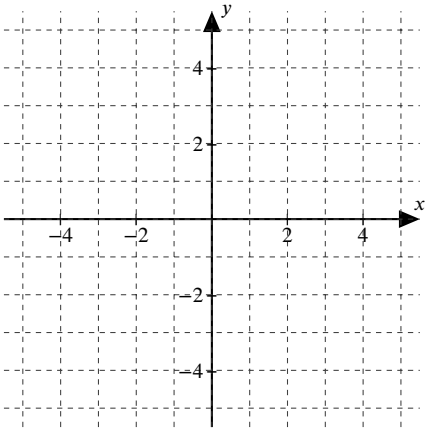
d) $y > 2$



e) $5x + 2y \leq 5$



f) $x - y > 0$



Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues

Exercice 1.3 Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions du système ?

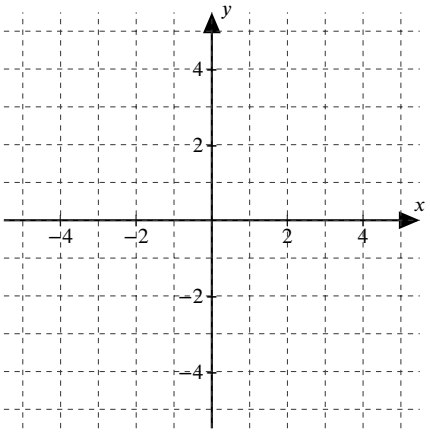
$$\begin{cases} x+y<4 \\ x-y<2 \\ x\geq -2 \\ y\leq 5 \end{cases}$$

$(-2;5)$ $(2;-1)$ $(2;1)$

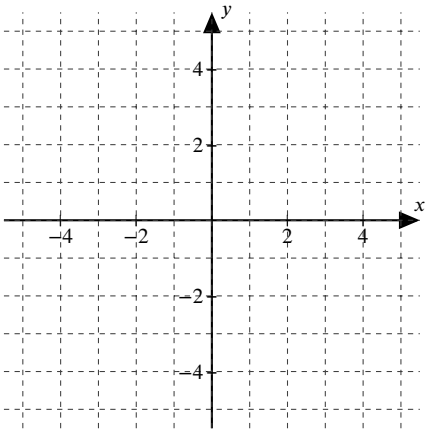
$(0;-1)$ $(-1;7)$ $(1;1)$

Exercice 1.4 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes d'inéquations suivants :

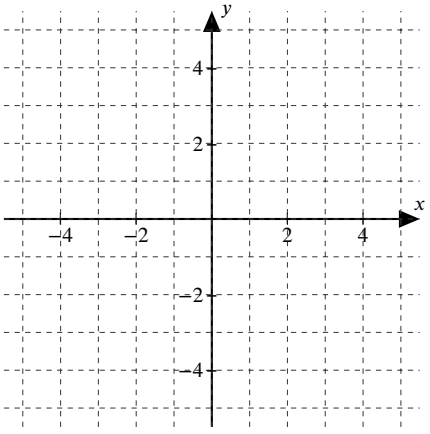
a) $\begin{cases} 3x+y>3 \\ 2x-y<4 \end{cases}$



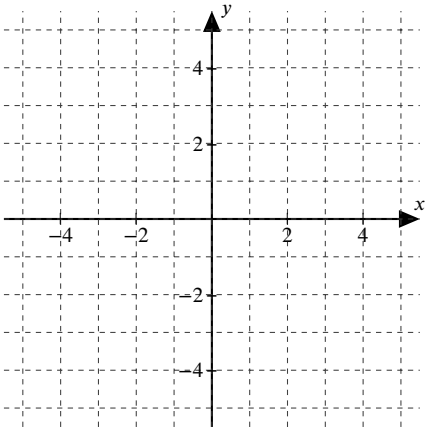
c) $\begin{cases} -2x+y>3 \\ -x+y\leq 4 \end{cases}$



b) $\begin{cases} x+2y<4 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

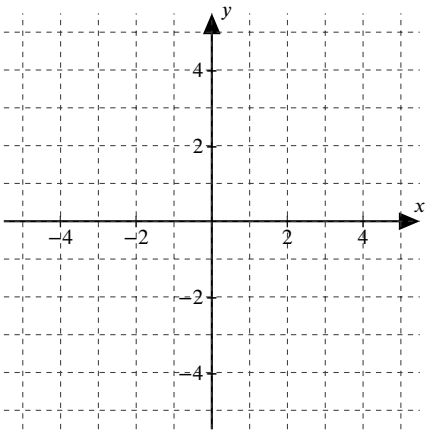


d) $\begin{cases} x-y\geq 0 \\ x+y\leq 0 \\ y>-3 \end{cases}$

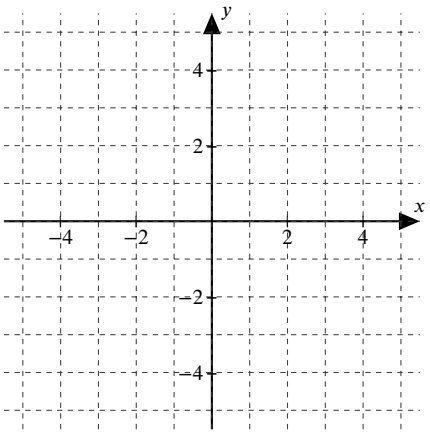


Exercice 1.5 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} 2x+3y \leq 6 \\ 2x-y \leq 3 \\ y \leq 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$



b) $\begin{cases} 3x+4y \leq 12 \\ x+y \geq 2 \\ x \leq 3 \\ y \leq 4 \end{cases}$



Exercice 1.6 Déterminer les coordonnées des sommets des polygones des solutions des systèmes d'inéquations de l'exercice 1.4

Exercice 1.7 Déterminer les coordonnées des sommets des polygones des solutions des systèmes d'inéquations de l'exercice 1.5

Exercice 1.8 Un confiseur prépare des emballages de pralinés et de truffes. Dans les sachets, il y a 15 pralinés et 5 truffes. Dans les boîtes, il y a 10 pralinés et 10 truffes.

On note x le nombre de sachets et y le nombre de boîtes.

a) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 70 pralinés à disposition pour préparer ces emballages.

b) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 30 truffes à disposition pour préparer ces emballages.

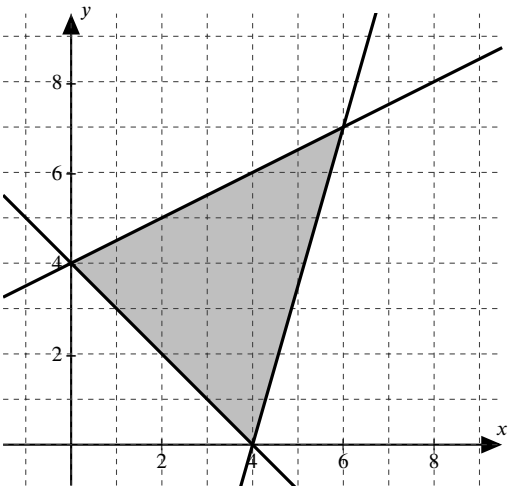
c) Écrire des inéquations qui expriment le fait que x et y sont des nombres positifs.

d) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de ce système d'inéquations.

e) Énumérer toutes les solutions possibles.

Introduction à la programmation linéaire à deux variables

Exercice 1.9 Les contraintes sont représentées par le polygone ci-dessous :



a) Chercher la valeur maximale et la valeur minimale de la fonction $P_1(x\,;y)=4x-2y$.

b) Pour quels points $(x\,;y)$ à coordonnées entières la fonction $P_1(x\,;y)=4x-2y$ vaut-elle 2 ?

c) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_2(x\,;y)=x+y$.

d) Chercher la valeur minimale de la fonction $P_2(x\,;y)=x+y$.

e) Écrire le système d'inéquations correspondant à ce polygone des solutions.

Exercice 1.10 Trouver les valeurs maximum et minimum de la fonction objectif $P(x\,;y)=x-y$ avec les contraintes :

$$\begin{cases} 3x+4y<12 \\ 4x+3y\geq 0 \\ x\leq 4 \\ y\leq 3 \end{cases}$$

a) si x et y peuvent être réels.

b) si x et y doivent être entiers.

Applications

Exercice 1.11 Une entreprise fabrique deux types de boîtes en métal. La fabrication d'une boîte de type A demande 1 heure de travail et 3 kg de métal, alors que le type B , demande 2 heures de travail et 2 kg de métal. L'entreprise dispose de 80 heures de temps de travail et de 120 kg de métal.

Pour une boîte, le profit est de CHF $50.-$ pour le type A et de CHF $20.-$ pour le type B.

a) En posant x pour le nombre de boîtes de type A et y pour le nombre de boîtes de type B, déterminer la fonction objectif, puis exprimer les contraintes.

b) Représenter graphiquement le polygone des solutions.

c) Comment organiser la production afin de maximiser le profit ? Quel est ce profit ?

d) Même question si le profit est de CHF $20.-$ pour une boîte de type A et de CHF $30.-$ pour une de type B.

Exercice 1.12 On désire préparer des rations alimentaires contenant au moins 65 g de protéines, 120 g de carbone et $2'400$ calories à partir de deux produits A et B. Ces deux produits sont fournis par dose non partageable.

Une dose du produit A coûte CHF $1.-$ et contient 15 g de protéines, 20 g d'hydrate de carbone et 300 calories.
Une dose du produit B coûte CHF $1.-$ et contient 10 g de protéines, 30 g d'hydrate de carbone et 400 calories.

Quelle est la composition de la ration alimentaire la plus économique ?

Exercice 1.13 Un sculpteur décide de créer deux styles de statues ; le modèleA et le modèle B.

Le modèle A nécessite 1 heure de sculpture, 2 heures de ponçage et 1 heure de finition.

Le modèle B nécessite 2 heures de sculpture, 1 heure de ponçage et 1 heure de finition.

Il dispose quotidiennement de 20 heures à l'atelier de sculpture, de 22 heures à l'atelier de ponçage et de 12 heures à l'atelier de finition.

Les profits qu'il peut réaliser pour chacun des modèles sont de CHF $200.-$ pour le modèle A et de CHF $300.-$ pour le modèle B.

Quel nombre de statues de chaque modèle doit-il fabriquer par jour, afin obtenir un profit maximal ?

Exercice 1.14 Une société importatrice de café achète des lots de grains de café en vrac, puis les sépare en grains de premier choix, ordinaires et inutilisables. La société a besoin d'au moins 280 t de grains de premier choix et 200 t de grains ordinaires.

Elle peut acheter des grains non triés à volonté chez deux fournisseurs. Des échantillons provenant des deux fournisseurs contiennent les pourcentages suivants de grains de premier choix, ordinaires et inutilisables :

Fournisseur	Premier choix	Ordinaires	Inutilisables
A	20%	50%	30%
B	40%	20%	40%

Si le fournisseur A facture CHF $125.-$ la tonne et le fournisseur B CHF $200.-$ la tonne, quelle quantité la société devrait-elle acheter chez chacun des fournisseurs pour satisfaire à ses besoins pour un coût minimum ?

Exercice 1.15 Un ébéniste fabrique des tables et des armoires avec trois sortes de bois : chêne, pin et noyer. Dans le tableau ci-dessous, on donne le nombre de mètres carrés de bois nécessaire à la fabrication de chaque type de meubles et le nombre de mètres carrés de bois disponible.

	Armoire	Table	Disponible
Chêne	$4\ m^2$	$5\ m^2$	$210\ m^2$
Pin	$5\ m^2$	$2{,}5\ m^2$	$180\ m^2$
Noyer	$6\ m^2$	$5\ m^2$	$240\ m^2$

Combien d'armoires et de tables cet artisan doit-il fabriquer pour rendre son gain maximum si :

a) il gagne CHF $1'000.-$ par armoire et CHF $900.-$ par table ?

b) il gagne CHF $1'200.-$ par armoire et CHF $1'000.-$ par table ?

Exercice 1.16 Sophie projette un voyage d'une longueur de $8'000$ km aux USA, qu'elle parcourra en train, en car et en bateau. Les prix et les vitesses de déplacement sont donnés ci-dessous :

	Bateau	Car	Train
Prix en CHF au km	0,15	0,2	0,25
Vitesse en km/h	30	40	80

Elle souhaite parcourir au moins $3'000$ km en bateau, et ne désire pas effectuer plus de kilomètres en train qu'en autobus.

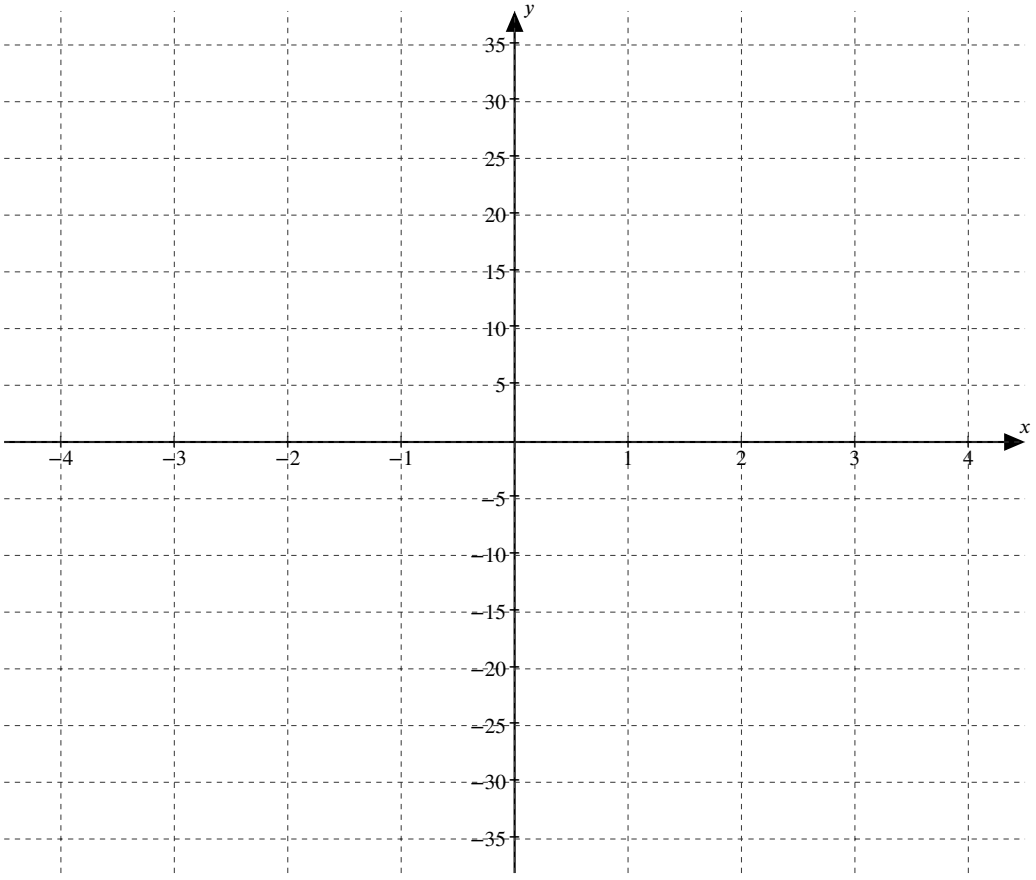
Quelles distances doit-elle parcourir avec chaque moyen de transport si elle veut que le prix total de son voyage ne dépasse pas CHF $1'500.-$ et que sa durée soit minimum ?

6.2 Fonctions quadratiques

Définition

Exercice 2.1 Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

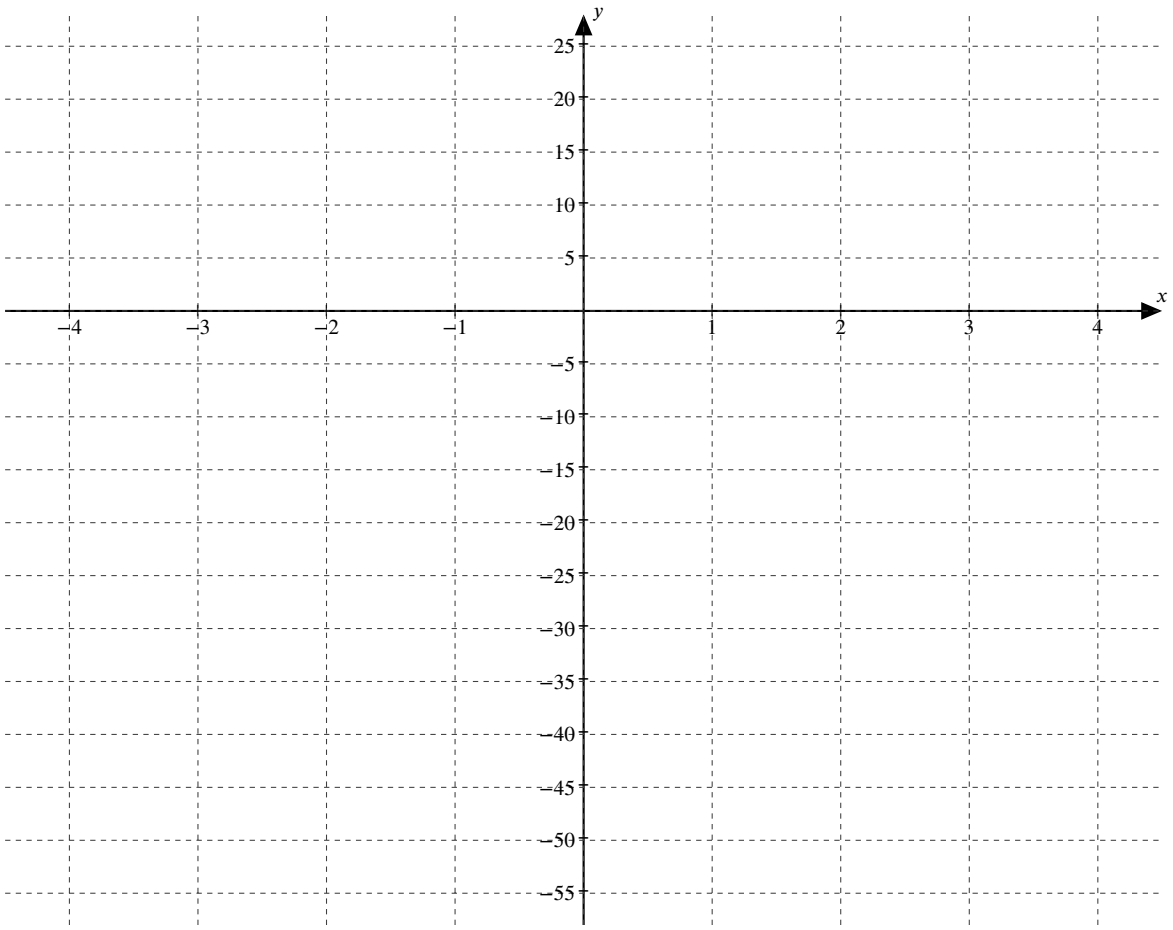
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)=x^2$									
$g(x)=2x^2$									
$h(x)=-x^2$									
$i(x)=-\frac{1}{2}x^2$									



Que peut-on observer de particulier ?

Exercice 2.2 Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)=-2x^2$									
$g(x)=-2x^2-10$									
$h(x)=-2x^2+20$									



Que peut-on observer de particulier ?

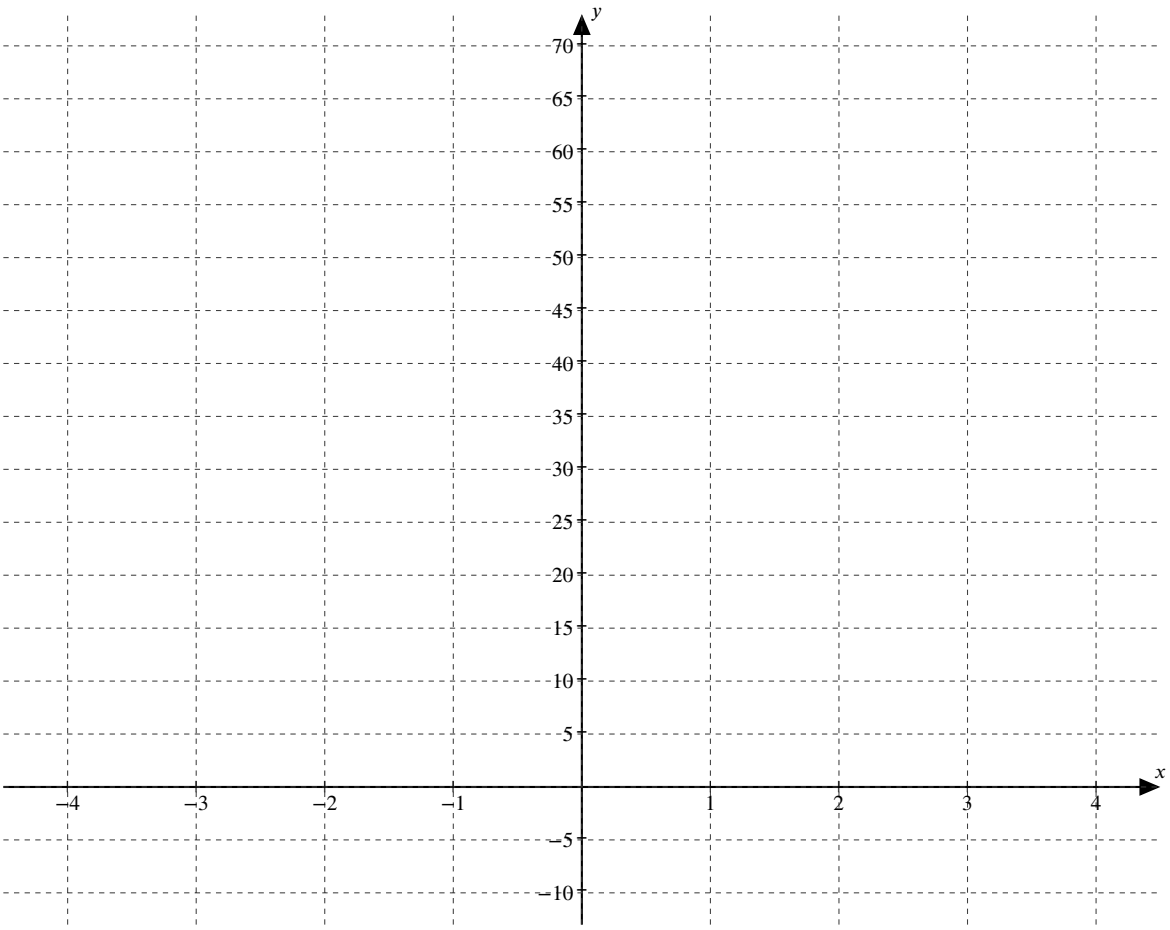
Exercice 2.3 Soit $f(x)=x^2+3x$, $g(x)=3x^2-6x$ et $h(x)=2x^2+8x$.

a) Déterminer algébriquement les zéros de ces fonctions.

b) Quels sont les zéros d'une fonction du type ax^2+bx.

c) Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)=x^2+3x$									
$g(x)=3x^2-6x$									
$h(x)=2x^2+8x$									



d) Quelles sont les coordonnées des sommets de ces paraboles ?

e) Comparer la première coordonnée du sommet de chaque parabole avec les zéros de cette même parabole.

f) En déduire la première coordonnée du sommet de la parabole $y=ax^2+bx$.

g) En déduire la première coordonnée du sommet de la parabole $y=ax^2+bx+c$.

Graphe et points caractéristiques

Exercice 2.4 Pour les fonctions quadratiques ci-dessous, calculer les coordonnées des points caractéristiques (intersections avec les axes, sommet), déterminer l'orientation de son graphe, puis tracer son esquisse.

a) $f(x)=x^2+8x+12$

b) $f(x)=x^2-4x$

c) $f(x)=2x^2+8x+9$

d) $f(x)=-2x^2+8x-13$

e) $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+3$

f) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}$

Intersections

Exercice 2.5 Déterminer les points d'intersection des graphes de f et g.

a) $f(x)=x^2-5x+4$ et $g(x)=-4x+10$.

b) $f(x)=3x^2-2x+7$ et $g(x)=3x+5$.

c) $f(x)=2x^2+3x-1$ et $g(x)=x-4$.

Exercice 2.6 Déterminer les points d'intersection des graphes de f et g.

a) $f(x)=2x^2-4x+3$ et $g(x)=3x^2-12x+18$.

b) $f(x)=-x^2+13x-48$ et $g(x)=x^2-11x+24$.

c) $f(x)=-x^2+x$ et $g(x)=2x^2+6$.

Exercice 2.7 Vérifier que la parabole d'équation $y=(x-3)^2$ est tangente à la droite $y=2x-7$ et déterminer les coordonnées du point de contact.

Optimisation quadratique

Exercice 2.8 Sur son terrain, un fermier veut clôturer un enclos rectangulaire et le diviser en 2 rangées de 3 rectangles identiques, à l'aide à 1000 m de barrière. Quel est le plus grand enclos qu'il pourra obtenir ?

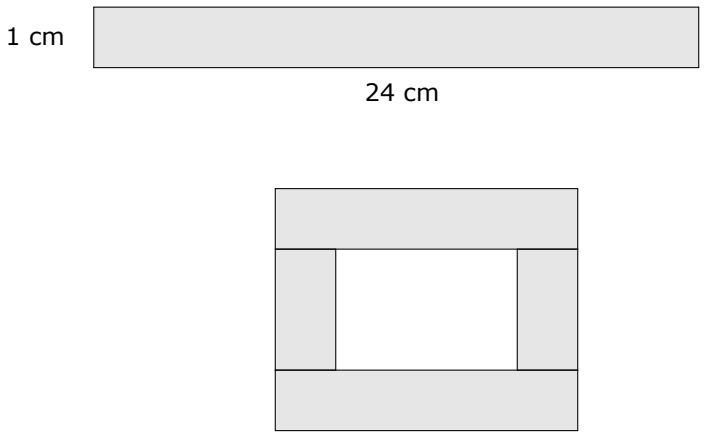
Exercice 2.9 Une compagnie désire fabriquer des gouttières à partir de feuilles d'aluminium de 27 cm de largeur en repliant les deux extrémités perpendiculairement à la base. Quelle largeur doit-on replier de chaque côté pour que la gouttière puisse contenir un maximum d'eau ?

Exercice 2.10 Déterminer les deux nombres dont la somme est 36 et qui ont un produit maximal.

Exercice 2.11 Quelle est la valeur minimale du produit de deux nombres si leur différence est égale à 12 ?

Exercice 2.12 La somme de deux nombres est 36.
On étudie la somme des carrés de ces deux nombres. A-t-elle un maximum ou un minimum ? Justifier puis calculer ce maximum ou ce minimum.

Exercice 2.13 Un photographe désire fabriquer un cadre pour une photo rectangulaire en coupant une planche de 24 cm de long et 1 cm de large en quatre morceaux.



Comment devra-t-il couper cette planche pour que l'aire intérieure du cadre soit maximale ?

Exercice 2.14 On considère le carré $ABCD$ de 6 cm de côté.Le point I est le milieu du côté $[CD]$. M est un point quelconque du côté $[AB]$ et N est le point du côté $[CB]$ tel que $CN = BM$.
Quelle doit être la position de M sur $[AB]$ pour que l'aire du triangle MNI soit minimale ?

Exercice 2.15 On considère le carré $ABCD$ de 8 cm de côté et le carré $AB'C'D'$ de x cm de côté où B' est un point du côté $[AB]$ et D' un point du côté $[AD]$.

a) On considère le domaine formé du triangle $B'BC'$ et du trapèze $DD'C'C$. Pour quelle valeur de x, l'aire de ce domaine est-il maximal ?

b) Que vaut alors cette aire optimale ?

Exercice 2.16 On considère le carré $ABCD$ de 8 cm de côté et le triangle AEF où E est un point du côté $[BC]$ et F un point du côté $[CD]$ sachant que $CE = 2 \cdot DF$.

a) Déterminer la position du point F sur $[DC]$ pour laquelle l'aire du triangle AEF est minimum.

b) Déterminer alors la proportion de l'aire du triangle par rapport à celle du carré.

Exercice 2.17 La distance d en kilomètres que peut parcourir une voiture avec 4 litres d'essence à la vitesse v en km/h est donnée par la fonction

$$d(v) = -\frac{1}{48}v^2 + \frac{5}{2}v$$

pour $0 < v < 120$.

a) Déterminer la vitesse la plus économique pour un trajet durant lequel on aura consommé 4 litre d'essence.

b) Déterminer la valeur maximale de la distance que l'on peut parcourir durant un tel trajet.

Exercice 2.18 Un objet est lancé verticalement vers le haut depuis le toit d'un bâtiment avec une vitesse initiale de 20 m/s. Sa distance d en mètres au-dessus du sol après t secondes est donnée par la fonction

$$d(t) = -5t^2 + 20t + 105$$

pour $0 < v < 120$.

a) Déterminer la distance maximale atteinte par l'objet au-dessus du sol.

b) Déterminer la hauteur du bâtiment.

c) Après combien de temps l'objet retombe-t-il au sol ?

Exercice 2.19 Le propriétaire d'un champ estime que s'il plante 60 poiriers, le rendement moyen sera de 480 poires par arbre. Ce rendement diminuera de 5 poires par arbre pour chaque poirier additionnel planté dans le champ.

Combien le propriétaire devrait-il planter de poiriers pour que le rendement du verger soit maximal ?

Exercice 2.20 Si un ostréiculteur récolte des huîtres cette semaine, il pourrait en obtenir 120 paniers qu'il pourrait vendre CHF $240.-$ pièce. Pour chaque semaine d'attente, sa récolte augmenterait de 30 paniers, mais le prix de chaque panier diminuerait de CHF 40.

a) Dans combien de semaines, la récolte sera-t-elle la plus favorable financièrement ?

b) À ce moment-là, quel sera le montant que lui rapportera la récolte ?

Exercice 2.21 Une agence de voyages offre des voyages organisés au prix de CHF $60.-$ par personne pour les 30 premiers participants.

Pour les plus grands groupes, jusqu'à 90, chaque personne bénéficie d'un rabais de CHF $0,50$ pour tout participant en plus des 30 premiers. Par exemple, si 31 personnes participent, le prix par personne est de CHF $59,50$ et donc le voyage coûte CHF $1844,50$.

Pour quel nombre de participants l'agence gagnera-t-elle le plus ?

6.3 Polynômes et fonctions polynomiales

Factorisation

Exercice 3.1 Effectuer et réduire.

a) $(x-5)^2$

b) $(3x+7y)^2$

c) $a(5a+4)(5a-4)$

d) $3(x-10)(x+5)$

e) $4y^2(y-10)(y-5)$

f) $(10x+3)(10x-3)-(11x-4)^2$

g) $(x+6)(x+1)-3(x-4)(x+4)$

h) $t(t+10)(t-3)+\frac{1}{3}(t+3)^2$

Exercice 3.2 Factoriser.

a) x^7-49x^5

b) $5y^2+80-50y$

c) $\frac{1}{8}x^4-x^3+2x^2$

d) $196x^2+28x+1$

e) $-6m^2+7m-m^3$

f) $x^9y^2-3x^7y^2$

g) $\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{4}x-2$

h) $-3c^2-45$

Exercice 3.3 Factoriser.

a) $20x^2+10x-210$

b) $25y^2+16-50y$

c) $6x^3-17x^2+5x$

d) $10x^5-23x^4+12x^3$

e) $9x^2+30x+25$

f) $100a^2+9a+1$

Exercice 3.4 Factoriser.

a) $11x^4+11x^3-66x^2$

b) $36x^2-21x+3$

c) $35x^2y+25xy+10y$

d) $2x^7-288x^5$

e) $-49c^2-42c-9$

f) $3x^4y^4-x^3y^4-10x^2y^4$

Exercice 3.5 Factoriser.

a) $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-5x$

b) $\frac{1}{2}x^2-5x+12$

c) $7x^2-225$

d) $2x^2-23x-12$

e) $36x^6+81x^7+4x^5$

f) $\frac{1}{6}x^2-\frac{3}{2}x+3$

Changement de variable

Exercice 3.6 Effectuer et réduire.

a) $(5x+4)^2$

b) $(5x^2+4)^2$

c) $(5x^3+4)^2$

d) $(z-15)(z+15)$

e) $(z^2-15)(z^2+15)$

f) $(z^{10}-15)(z^{10}+15)$

g) $(x-3)(x+22)$

h) $(x^2-3)(x^2+22)$

i) $(3x+4)(x-11)$

j) $(3x^2y+4)(x^2y-11)$

Exercice 3.7 Factoriser.

a) x^4-625

b) x^4-11x^2+28

c) $2x^4+23x^2+11$

d) $81x^4-72x^2+16$

e) z^4-8z^2-9

f) x^4+8x^2-9

Exercice 3.8 Factoriser.

a) $a^6-21a^4-100a^2$

b) $5x^4-55x^2+90$

c) $-7x^7+x^5+6x^3$

d) $\frac{1}{3}x^4-27$

e) $32x^5y+400x^3y+1250xy$

f) $\frac{1}{7}x^8+\frac{10}{7}x^6+3x^4$

Produits remarquables du 3e degré

Exercice 3.9 Effectuer et réduire.

a) $(x+4)^3$

b) $(2x-5)^3$

c) $(10c-1)^3$

d) $(3x+\frac{1}{3})^3$

e) $(x-2)^3$

f) $(x^2-2)^3$

g) $(x^3+1)^3$

h) $(x^{10}y^4+1)^3$

Exercice 3.10 Factoriser.

a) x^3+125

b) x^3-125

c) $8V^3+T^3$

d) $27x^3-8$

e) x^3+3x^2+3x+1

f) $q^3-30q^2+300q-1000$

Exercice 3.11 Factoriser.

a) x^6-1

b) x^4+8x

c) x^6+2x^3+1

d) $8n^3+24n^2+24n+8$

e) $8x^6+7x^3-1$

f) $x^6+9x^5+27x^4+27x^3$

Méthode du groupement

Exercice 3.12 Factoriser.

a) $x^3+5x^2+3x+15$

b) $x^3+6x^2-4x-24$

c) $5z^3-8z^2-5z+8$

d) x^4+8x^3+x+8

e) x^4+x^3+8x+8

f) $2w^4+3w^3-250w-375$

Exercice 3.13 Factoriser.

a) $6x^4-10x^3+66x^2-110x$

b) $-8x^7-64x^6-27x^4-216x^3$

c) $\frac{1}{11}x^3+\frac{2}{11}x^2-11x-22$

d) $120y^5-80y^4-30y^3+20y^2$

e) $10x^4-65x^3+10x-65$

f) $10x^4+65x^3-10x-65$

Exercice 3.14 Résoudre.

a) $x^3+15x^2+75x+125=0$

b) $a^4-a^2-12=0$

c) $x^3-2x^2+5x-10=0$

d) $1000x^3+x^2-27=x^2$

e) $x^4+5x^3=x+5$

f) $6x^4-23x^3=4x^2$

Division Euclidienne

Exercice 3.15 Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x)=3x^4-8x^3+10x+5$ $G(x)=x-2$

b) $F(x)=x^3-8x^2+16x-5$ $G(x)=x-5$

c) $F(x)=3x^3+4x^2-2x+8$ $G(x)=x+2$

d) $F(x)=x^4-8x^2-7$ $G(x)=x-3$

Exercice 3.16 Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x)=-2x^3+7x^2-8x-1$ $G(x)=2x-3$

b) $F(x)=-16x^3-32x2-7x+10$ $G(x)=4x+5$

c) $F(x)=9x^3-34x-26$ $G(x)=3x-7$

d) $F(x)=x^3-5x^2+4x$ $G(x)=2x-4$

Exercice 3.17 Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x)=x^5-x^4-4x^3+2x^2+3x-1$ $G(x)=x^2+2x-1$

b) $F(x)=5x^4+3x^3-1$ $G(x)=x^2-1$

c) $F(x)=6x^5+5x^4-25x^3+31x^2-12x+5$ $G(x)=2x^2-3x+2$

d) $F(x)=3x^4-7x^3-18x^2+28x+24$ $G(x)=3x^2+8x+4$

Exercice 3.18 Déterminer un polynôme $F(x)$ qui donne un quotient de $Q(x)=x^2+7$ et un reste de $R(x)=x+1$ lorsqu'on le divise par $D(x)=x^2-3$. Y a-t-il plusieurs possibilités ?

Utilisation de la division euclidienne pour factoriser

Exercice 3.19 Trouver un polynôme $F(x)$ du 3e degré, qui soit divisible par $x-3$ et par x^2+3x-2. Y a-t-il plusieurs possibilités ?

Exercice 3.20

a) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessous, les polynômes divisibles par $x+2$.

i) $A(x)=x^3+7x^2+6x-8$

ii) $B(x)=x^3-5x^2+3x+7$

iii) $C(x)=x^4-2x^2+3x+6$

iv) $D(x)=3x^3+5x^2+x+6$

v) $E(x)=10x^3+x^2+x+4$

vi) $F(x)=10x^4+23x^3+6x^2-3x-6$

vii) $G(x)=x^{2000}-3x^{1999}+40x^{1997}+347$

viii) $H(x)=x^6+4x^5-2x^4+8x^3+11$

b) Pour ceux qui sont divisibles par $x+2$, effectuer la division et écrire l'égalité fondamentale.

Exercice 3.21

a) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessous, les polynômes divisibles par $x+1$.

i) $A(x)=x^2-1$

ii) $B(x)=x^3-1$

iii) $C(x)=x^4-1$

iv) $D(x)=x^5-1$

v) $E(x)=x^6-1$

vi) $F(x)=x^7-1$

b) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessus, les polynômes divisibles par $x-1$.

Exercice 3.22 Donner la liste de tous les zéros entiers des polynômes suivants :

a) $2x^3-x^2-8x+4$

b) $3x^3+10x^2+x-6$

Exercice 3.23 Factoriser.

a) $x^3+4x^2-11x-30$

b) $x^3+10x^2+17x-28$

c) $2x^3+3x^2-11x-6$

d) $x^4+7x^3+16x^2+28x+48$

Exercice 3.24 Résoudre.

a) $x^4-6x^3-22x^2-30x-135=0$

b) $x^4+10x^3+35x^2+50x+24=0$

c) $3x^3-17x-6=-4x^2$

d) $x^4+16x^3+54x^2=16x+55$

Exercice 3.25 Factoriser.

a) $x^3+3x^2-16x-48$

b) $x^3-9x^2+23x-15$

c) $x^3+5x^2-8x-48$

d) $x^3-9x^2+26x-24$

e) $x^4+2x^3-4x^2-5x-6$

f) $35x^3+47x^2+13x+1$

Exercice 3.26 Factoriser.

a) x^3-64x

b) x^3-64

c) x^4-64

d) $x^3+8x^2+8x+64$

e) x^4+16x^2+64

f) $x^3+14x^2+56x+64$

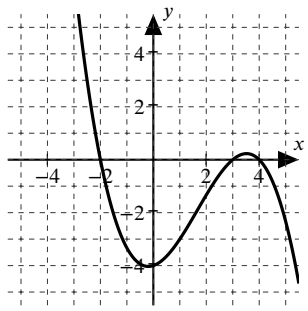
g) $3x^3+16x^2-64x$

h) $x^3+16x^2-4x-64$

Signe d'une fonction polynomiale

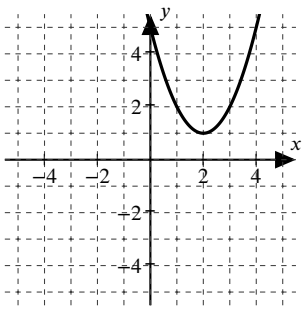
Exercice 3.27 Compléter le tableau des signes des fonctions représentées ci-dessous.

a)



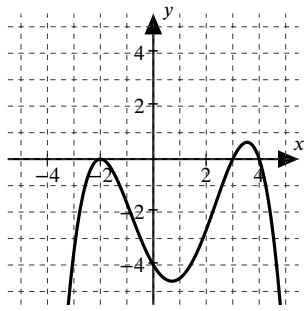
x	
$f(x)$	

c)



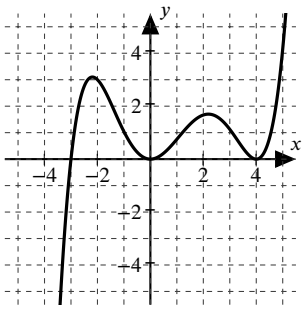
x	
$h(x)$	

b)



x	
$g(x)$	

d)

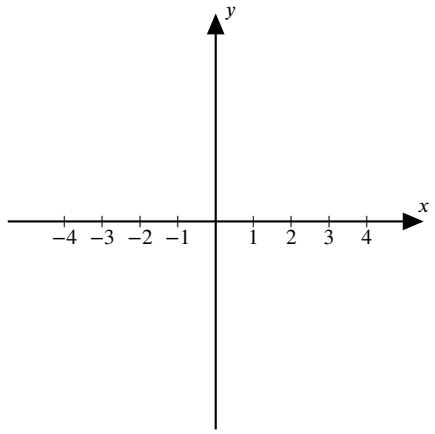


x	
$i(x)$	

Exercice 3.28 Faire une esquisse du graphe d'une fonction correspondant au tableau des signes.

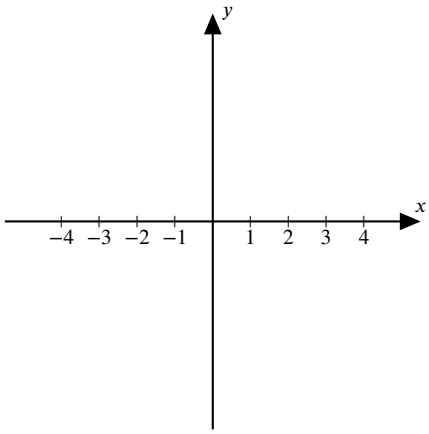
a)

x		-3		0		2	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$



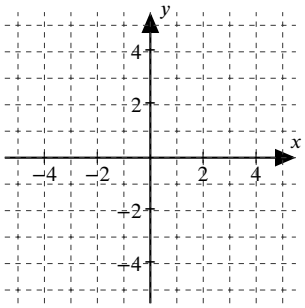
b)

x		-3		2	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$



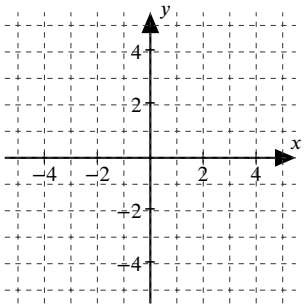
Exercice 3.29 Représenter le graphe de la fonction puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x) = -\frac{3}{4}x + 1$



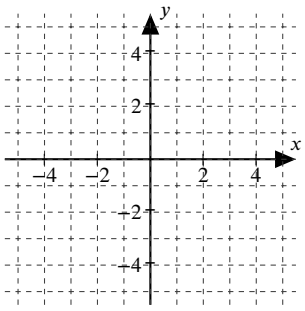
x	
$f(x)$	

b) $g(x) = x$



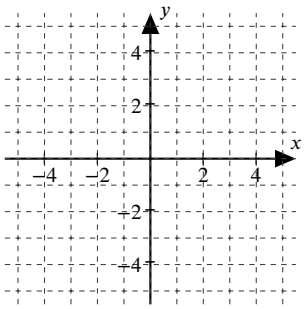
x	
$g(x)$	

c) $h(x) = -1$



x	
$h(x)$	

d) $i(x) = 3x - 2$



x	
$i(x)$	

Exercice 3.30 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$7 - x$	

b)

x	
$4x - 7$	

c)

x	
$-\frac{1}{3}x + 2$	

d)

x	
$\frac{4}{5}x$	

e)

x	
13	

f)

x	
$-6 + x$	

Exercice 3.31 Trouver l'expression de deux fonctions affines différentes correspondant à ce tableau des signes :

x		4	
$f(x)$	+	0	–

Exercice 3.32 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
3	
$5-x$	
$2x+3$	
$3(5-x)(2x+3)$	

c)

x	
-4	
$x+4$	
$x-6$	
$-4(x+4)(x-6)$	

b)

x	
$3x$	
$-5+4x$	
$3x(-5+4x)$	

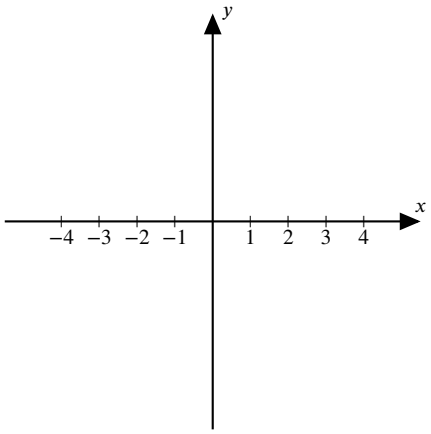
d)

x	
$-4x$	
$7x+1$	
$-4x(7x+1)$	

Exercice 3.33 Remplir le tableau des signes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

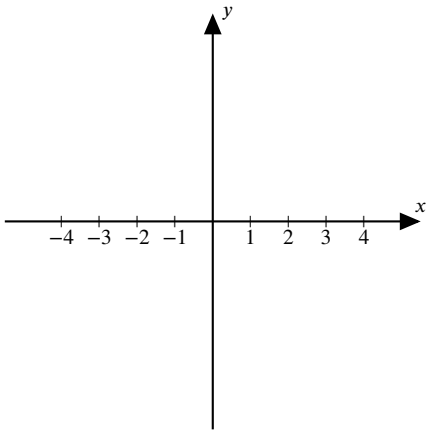
a)

x	
$(x+2)^2$	



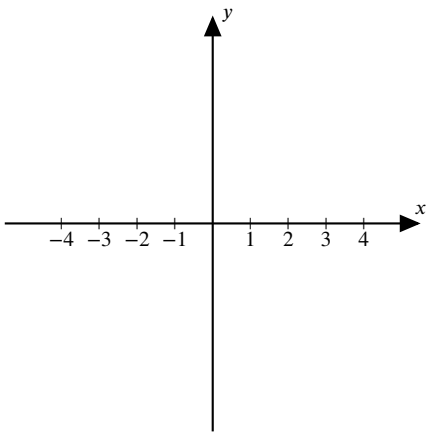
c)

x	
$-2x^2+7x$	



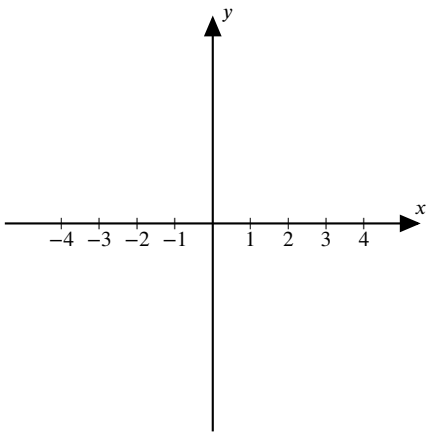
b)

x	
x^2+2	



d)

x	
x^2-x-6	



Exercice 3.34 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$-x^2-16x-55$	

b)

x	
$13x^2+12x-1$	

c)

x	
$4x^2+12x+9$	

d)

x	
$-5+x^2$	

e)

x	
x^2+x+9	

f)

x	
$-9x^2+2x$	

g)

x	
$-x^2-9$	

h)

x	
$-5x^2$	

Exercice 3.35 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$5-x^2$	
$2x^2+3$	
$(5-x^2)(2x^2+3)$	

b)

x	
$x+3$	
x^2+x-6	
$(x+3)(x^2+x-6)$	

Exercice 3.36 Étudier le signe des fonctions suivantes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

a) $5x(3x+2)(7-x)$

b) $-4(x-8)(5x+1)(x^2+2)$

c) $(x+7)^3$

d) $x^2(-2x+5)$

Exercice 3.37 Étudier le signe des fonctions suivantes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

a) $9x^3-18x^2-x+2$

b) $16-x^4$

c) x^3+x^2-2

d) $-25x^3+30x^2-9x$

Exercice 3.38 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$(5-x)^3$	

b)

x	
$(3x+7)^4$	

c)

x	
$x^3(x-2)^2$	

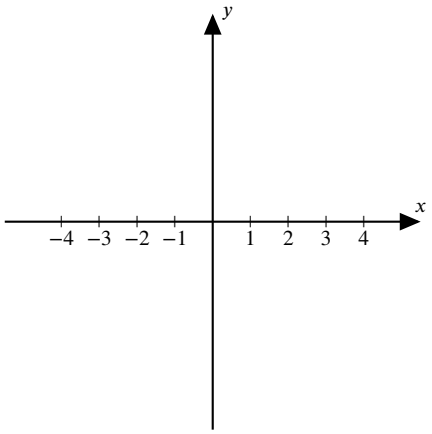
d)

x	
$-3x(x+4)^4(6-x)^2$	

Exercice 3.39 Remplir le tableau des signes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

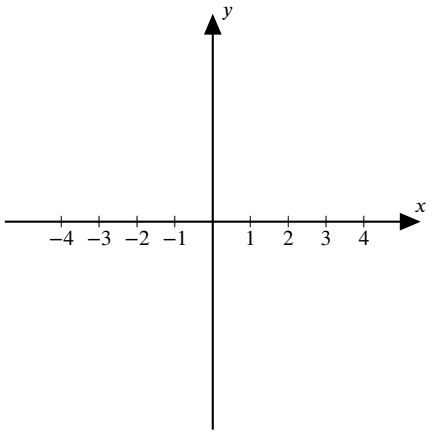
a)

x	
$(x-1)^2(x+2)^2$	



b)

x	
$(x-1)^2(x+2)^5$	

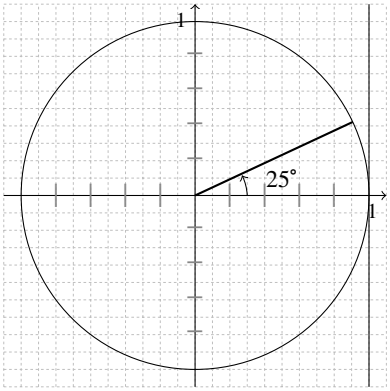


6.4 Trigonométrie II

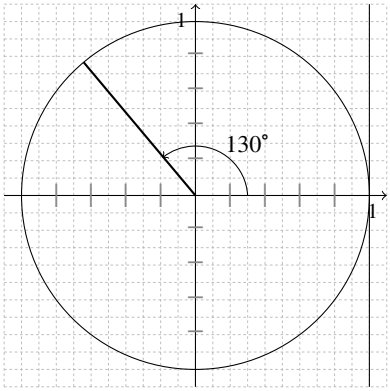
Cercle trigonométrique

Exercice 4.1 À l'aide du cercle trigonométrique, donner une bonne approximation des valeurs des rapports trigonométriques (cos, sin, tan) des angles suivants :

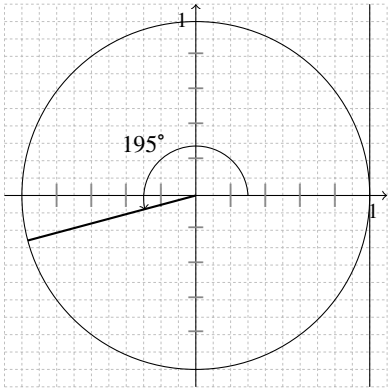
a) $\alpha = 25°$



b) $\alpha = 130°$

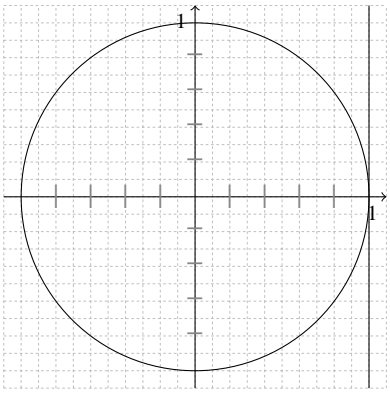


c) $\alpha = 195°$

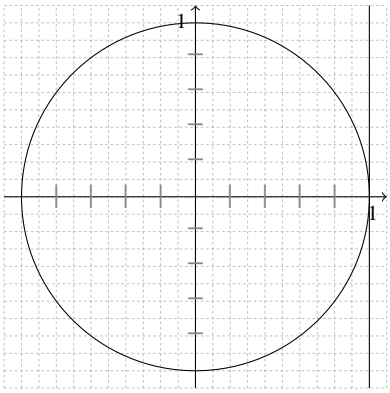


Exercice 4.2 À l'aide du cercle trigonométrique, donner une bonne approximation des valeurs des rapports trigonométriques (cos, sin, tan) des angles suivants :

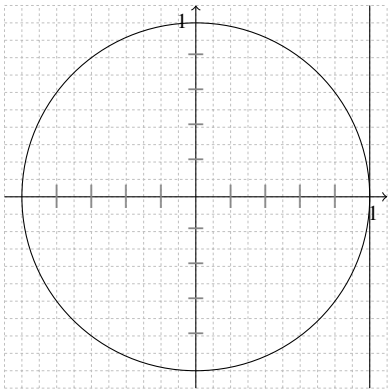
a) $\alpha = 45°$



b) α =330°

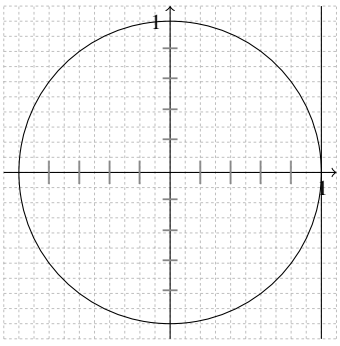


c) $\alpha = 210°$

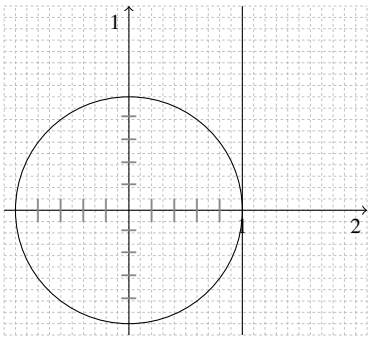


Exercice 4.3 Représenter dans le cercle trigonométrique les triangles équilatéraux et isocèles rectangles qui permettent de justifier les valeurs exactes des rapports trigonométriques (cos, sin, tan) des angles en radians suivants. Donner ces valeurs exactes uniquement grâce aux dessins.

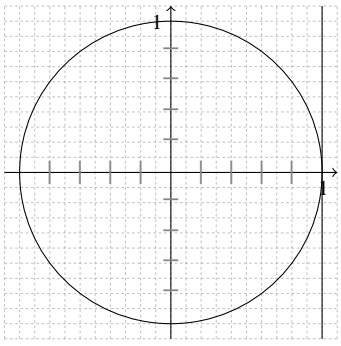
a) $\alpha = 45°$



b) $\alpha = 60°$

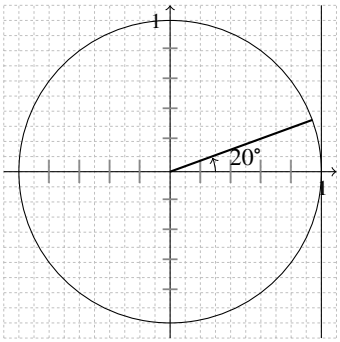


c) $\alpha = 30°$

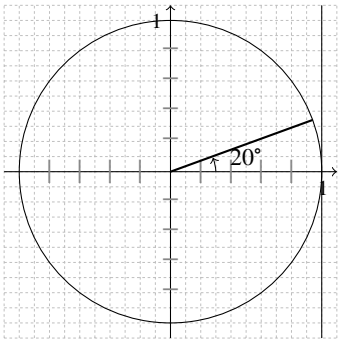


Exercice 4.4 Représenter l'angle demandé, donner les rapports trigonométriques des deux angles et les comparer. Expliquer le pourquoi de ce que l'on peut observer.

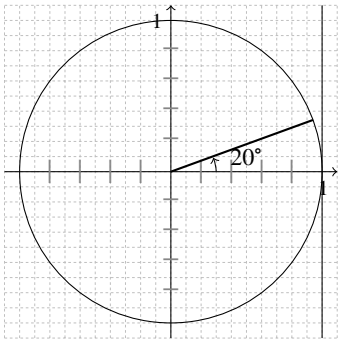
a) $\alpha = 160^\circ$



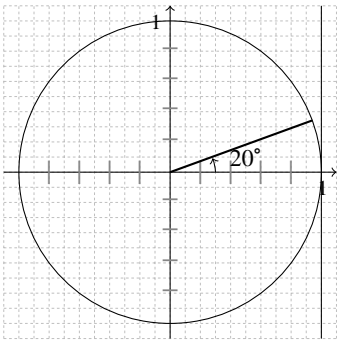
c) $\alpha = 200^\circ$



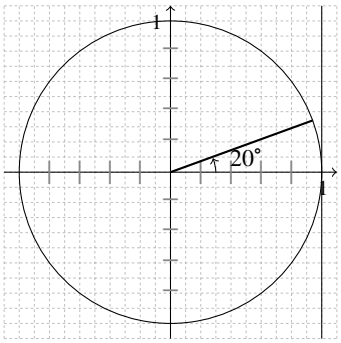
e) $\alpha = 70^\circ$ (sauf tan)



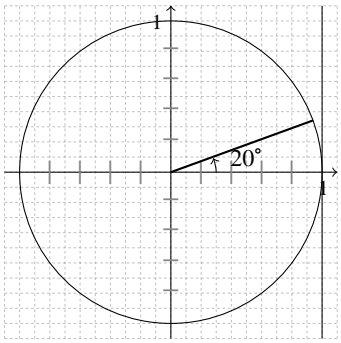
b) $\alpha = 340^\circ$



d) $\alpha = 110^\circ$ (sauf tan)



f) $\alpha = 740^\circ$



Trigonométrie dans le triangle quelconque

Exercice 4.5 Résoudre les triangles ABC suivants à l'aide du théorème du cosinus (sauf l'aire).

a) $a = 7$ $b = 9$ $\gamma = 35^\circ$

b) $a = 13,4$ $b = 9,7$ $c = 8,1$

c) $a = 57,89$ $b = 10,48$ $\beta = 7,26^\circ$

Exercice 4.6 Soit un triangle ABC avec $c = 6$ et $\alpha = 30^\circ$. Calculer b à l'aide du théorème du cosinus et faire à la construction pour comparer. Expliquer le nombre de solutions obtenues dans chaque cas.

a) $a = 2$ b) $a = 3$ c) $a = 4$ d) $a = 6$ e) $a = 7$

Exercice 4.7 Pour calculer la distance entre deux points A et B, un géomètre choisit un point C qui est à 420 m de A et à 540 m de B. Si l'angle $\angle ACB = 63,2^\circ$, calculer la distance séparant A et B.

Exercice 4.8 Calculer l'aire des triangles de l'exercice 4.5.

Exercice 4.9 Résoudre les triangles ABC suivants à l'aide du théorème du sinus.

a) $a = 10$ $\alpha = 85°$ $\gamma = 40°$

b) $a = 85,67$ $\beta = 123,18°$ $\gamma = 24,54°$

c) $c = 78,54$ $\alpha = 67,66°$ $\beta = 85,93°$

Exercice 4.10 Pour calculer la distance entre deux points A et B, un géomètre choisit un point C qui est à 375 m de A et à 530 m de B. Si l'angle $\angle BAC = 49,5°$, calculer la distance séparant A et B.

Exercice 4.11 Calculer tous les angles des triangles ABC suivants.

a) $a = 4$ $b = 9$ $c = 10$

b) $a = 60$ $b = 94$ $c = 38$

c) $a = 68,87$ $b = 35,57$ $c = 81,46$

Exercice 4.12 Résoudre les triangles ABC suivants.

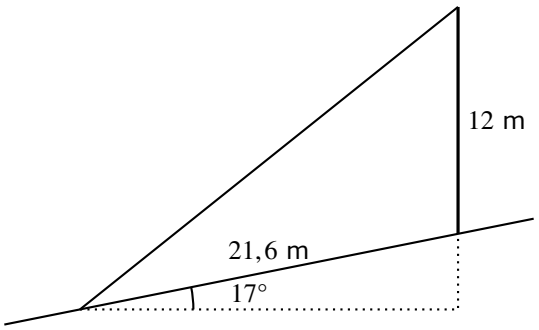
a) $a = 70,24$ $b = 82,12$ $\gamma = 30,69°$

b) $a = 20,46$ $\beta = 58,25°$ $\gamma = 39,38°$

c) $a = 98,06$ $b = 364,04$ $\beta = 30,65°$

d) $a = 85,80$ $c = 57,29$ $\beta = 117,81°$

Exercice 4.13 Un poteau haut de 12 m est planté sur le flanc d'une colline dont la pente forme un angle de $17°$ avec l'horizontale Calculer la longueur minimale d'un câble tendu entre le sommet du poteau et un point en contrebas distant de $21,6$ m de la base du poteau.



Exercice 4.14 Soit le parallélogramme $ABCD$. On a $AB = 30$ cm, $BC = 20$ cm et $\beta = 60°$.
Calculer la longueur des diagonales AC et BD, ainsi que l'angle aigu θ qu'elles forment entre elles.

Exercice 4.15 Soit un quadrilatère convexe $ABCD$ dont on connaît l'angle $\alpha = 110°$ ainsi que les longueurs de ses quatre côtés : $AB = 3$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 6$ cm et $DA = 5$ cm.
Que peut-on dire sur le triangle BCD ? Utiliser cette observation pour calculer l'aire et les angles du quadrilatère.

6.5 Analyse combinatoire

Principes fondamentaux

Exercice 5.1 Une personne a quatre jupes et six chemisiers. Combien de tenues « jupe et chemisier » différentes peut-elle porter ?

Exercice 5.2 Une personne veut acheter une voiture. Elle constate qu'elle a non seulement le choix entre 8 modèles, mais que chaque modèle est disponible en 15 couleurs différentes, peut être manuel ou automatique, et encore à essence, hybride ou électrique.

De combien de manières différentes peut-elle faire sa commande ?

Exercice 5.3 Mon fitness possède 4 appareils de cardio et 10 appareils de musculation différents. Mon coach me prépare un programme que je dois faire dans l'ordre indiqué. Le programme peut être un entraînement d'endurance composé de 3 appareils cardio différents ou alors être un programme de force composé d'un appareil de cardio suivi de 3 appareils de musculation différents.

Combien existe-t-il de programmes différents ?

Exercice 5.4 Pour chaque condition suivante, combien de "mots" peut-on former en utilisant que les lettres A, B, C et D ?

a) Le "mot" comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois.

b) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois. La première et la dernière lettre doivent être identiques.

c) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois. Il ne doit contenir aucun A.

d) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois. Il doit contenir exactement un A.

e) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois. Il doit contenir au moins un A.

f) Le « mot » comporte quatre lettres. Chaque lettre n'est utilisée qu'une seule fois.

g) Le « mot » comporte cinq lettres. Chaque lettre n'est utilisée qu'une seule fois.

h) Le « mot » comporte cinq lettres, qui doivent être toutes identiques.

Exercice 5.5 Dans certains pays, les plaques d'immatriculation des automobiles commencent par une lettre de l'alphabet, suivie de cinq chiffres. Calculer combien de plaques d'immatriculation sont réalisables dans les situations suivantes.

a) Le premier chiffre suivant la lettre ne peut pas être 0.

b) La première lettre ne peut pas être O ou I et le premier chiffre ne peut pas être 0 ou 1.

c) Les lettres X, Y ou Z sont réservées pour des plaques de collection. Dans ce cas, les 5 chiffres sont identiques. Sinon, les lettres et les chiffres peuvent être choisis de toutes les manières possibles.

Les permutations

Exercice 5.6 Calculer le nombre d'anagrammes que l'on peut former avec les mots suivants :

a) ART

b) ARA

c) $DIPLOME$

d) $MATURITE$

e) $BACCALAUREAT$

f) $MISSISSIPPI$

Exercice 5.7 Un étudiant possède cinq livres de math, trois livres d'histoire et huit livres en allemand. De combien de manières peuvent-ils être rangés sur une étagère si les livres traitant de la même matière sont placés les uns à côté des autres ?

Exercice 5.8 Combien de mots peut-on écrire avec les lettres du mot $TOULOUSE$, si les consonnes doivent occuper les 1re, 2e et 7e positions ?

Exercice 5.9 Les quatre remplaçants d'une équipe de volley prennent place sur le banc des remplaçants. De combien de manières différentes peuvent-ils s'asseoir ?

Exercice 5.10 Neuf personnes prennent place autour d'une table ronde.

a) De combien de manières différentes peuvent-elles s'asseoir ? (On ne tient compte que de la position relative des neuf personnes les unes par rapport aux autres.)

b) Même question, mais un couple de deux amoureux désirent être voisins.

c) Dans le cas de la question a), combien y a-t-il de configurations dans lesquelles les deux amoureux ne sont pas assis l'un à côté de l'autre.

Exercice 5.11 Un représentant s'apprête à visiter cinq de ses clients. De combien de façons peut-il faire cette série de visite :

a) s'il les fait toutes le même jour ?

b) s'il en fait trois un jour et deux le lendemain ?

Exercice 5.12 De combien de manières peut-on partager un groupe de dix personnes :

a) en deux groupes de 7 et de 3 personnes ?

b) en trois groupes de cinq, trois et deux personnes ?

Exercice 5.13 Le client d'une banque se rappelle que 2, 4, 7 et 9 sont les chiffres de son code d'accès à quatre chiffres de sa carte bancaire. Malheureusement, il a oublié le code exact.
Calculer le plus grand nombre possible d'essais nécessaires pour obtenir le code secret.

Exercice 5.14 Le client d'une banque se rappelle que 2, 4 et 7 sont les chiffres de son code d'accès à quatre chiffres de sa carte bancaire. Malheureusement, il a oublié le code exact.
Sachant qu'un des chiffres apparaît deux fois dans le code, calculer le plus grand nombre possible d'essais nécessaires pour obtenir le code secret.

Exercice 5.15 Avec les lettres A, M, O, S et U, on peut créer 120 anagrammes. En les classant par ordre alphabétique, quelle sera la position du « mot » $SOUMA$?

Les arrangements

Exercice 5.16 Calculer le nombre de mots de 5 lettres que l'on peut former :

a) sans répétition (chaque lettre ne peut apparaître qu'une seule fois)

b) avec répétitions (chaque lettre peut apparaître plusieurs fois)

Exercice 5.17 Vous disposez de huit pièces de Scrabble™ permettant de composer le mot $EQUATION$. Combien de mots de quatre lettres pouvez-vous former ?

Exercice 5.18 De combien de manières peut-on agencer une vitrine qui contient 4 emplacements différents pour placer des sculptures, sachant que l'on a un choix de 10 sculptures.

Exercice 5.19 De combien de manières différentes cinq skieurs peuvent-ils s'asseoir sur un télésiège de huit places ?

Exercice 5.20 Dans l'alphabet Braille, chaque signe est représenté par six emplacements, qui contiennent chacun un point en relief ou rien.
Combien de signes distincts peut-on composer ?

Exercice 5.21 Un immeuble est composé d'un rez-de-chaussée et de huit étages.

a) Un ascenseur part du rez-de-chaussée avec cinq occupants. De combien de manières différentes ces cinq occupants peuvent-ils choisir les étages auxquels ils vont descendre ?

b) Même question si à chaque étage un occupant au plus quitte l'ascenseur.

Exercice 5.22

a) Combien y a-t-il d'initiales possibles formées de deux lettres ?

b) Combien un village doit-il avoir d'habitants pour que l'on soit sûr que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

Exercice 5.23 On considère les nombres 2, 5 et 7.

a) Combien peut-on former de nombres à deux chiffres distincts ?

b) Parmi eux, combien y a-t-il de nombres pairs ?

Exercice 5.24 Une cordée de sept personnes circulant en montagne comprend trois montagnards et quatre touristes. De combien de manières différentes, en tenant compte de l'ordre, peut-on disposer ces sept personnes en file, sachant que la première et la dernière personne de la cordée doivent être des montagnards ?

Exercice 5.25 Dix-sept chevaux sont au départ d'un grand-prix hippique. Combien y a-t-il de tiercés possibles :

a) au total ?

b) dans lesquels les trois chevaux gagnants sont-ils dans l'ordre d'arrivée ?

c) dans lesquels les trois chevaux gagnants sont-ils soit dans l'ordre d'arrivée, soit dans le désordre ?

d) dans lesquels les trois chevaux gagnants sont-ils dans le désordre ?

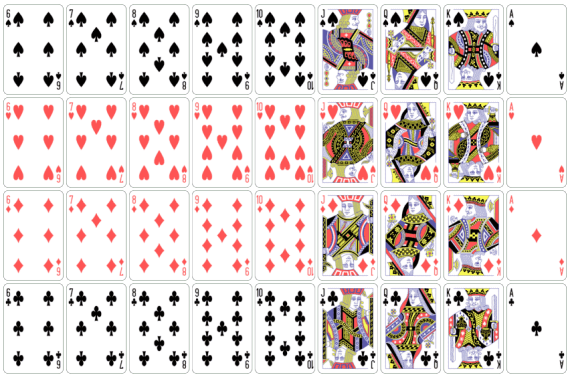
Exercice 5.26 Vos ancêtres sont votre père et votre mère, vos grands-parents, qui ont aussi chacun un père et une mère ...

a) Calculer le nombre de vos ancêtres de la 40^{e} génération (environ 1000 ans).

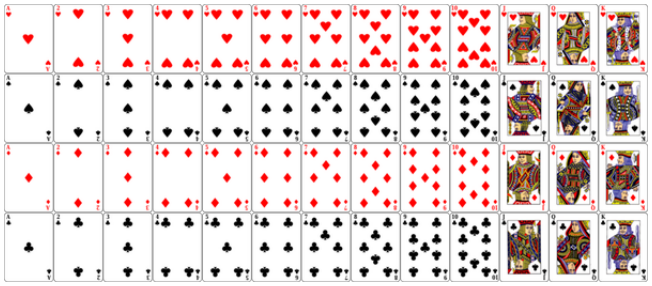
b) Ce nombre est plus grand que le nombre d'êtres humains ayant vécu sur Terre depuis 1000 ans. Où se trouve la faille dans ce raisonnement ?

À propos des jeux de cartes :

Un jeu de cartes de Jass est composé de 36 cartes. Il y a quatre couleurs différentes nommées *pique*, *coeur*, *carré* et *trèfle*. Il y a neuf cartes différentes de chaque couleur : l'as, le roi, la dame, le valet, puis les cartes numérotées de 10 à 6.



Un jeu de cartes de poker américain comporte 52 cartes. On ajoute au jeu de Jass les cartes numérotées de 5 à 2.



Dans un jeu de cartes, on appelle *main* les cartes qui sont distribuées au hasard à un joueur. L'ordre dans lequel les cartes de la main sont distribuées n'importe pas.

Les combinaisons

Exercice 5.27 On distribue une main de six cartes d'un jeu de Jass comportant 36 cartes.

a) Combien de mains différentes peut-on recevoir ?

b) Combien de mains comportent les quatre valets ?

c) Combien de mains comportent au moins un valet ?

Exercice 5.28 De combien de façons peut-on choisir une main de cinq cartes dans un jeu de Jass de 36 cartes, si l'on veut que ces cinq cartes contiennent :

a) les quatre as ?

b) deux as et deux rois ?

c) au moins un as ?

d) au moins deux rois ?

Exercice 5.29 Dix-sept chevaux sont au départ d'un grand-prix hippique. Combien y a-t-il de tiercés non ordonnés possibles ?

Exercice 5.30 Une classe doit élire un comité de trois personnes. Combien de comités différents peut-on former si la classe est constituée de 24 élèves ?

Exercice 5.31 Douze personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y a-t-il de poignées de main ?

Exercice 5.32 Vous devez organiser un tournoi de tennis dans le cadre de votre club. Il y a neuf personnes inscrites qui devront toutes jouer une fois contre leur adversaire. Combien de matchs vont devoir se dérouler ?

Exercice 5.33 Un marchand de glace a en stock 31 parfums différents. Il se vante de proposer environ 4500 glaces différentes à trois boules, chaque boule étant d'un parfum différent. Est-ce vrai ?

Exercice 5.34 Avec 10 députés et 6 sénateurs, on veut former une commission de 7 membres comprenant exactement 5 députés. Quel est le nombre de possibilités ?

Exercice 5.35 Une grille de la loterie suisse comporte 45 numéros et le joueur doit en choisir six.

a) Combien y a-t-il de grilles possibles ?

b) Combien de grilles permettent de réaliser 3 points (gain de $6.-$) ?

c) Combien de grilles permettent de réaliser 6 points (gain du gros lot) ?

Exercice 5.36 Un questionnaire comprend huit questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Combien peut-on donner de réponses différentes avec quatre oui et quatre non ?

Exercice 5.37 On jette vingt fois une pièce de monnaie.

a) Combien y a-t-il de séquences différentes ?

b) Combien de séquences contiennent une fois pile ?

c) Combien de séquences contiennent quatre fois pile ?

d) Combien de séquences contiennent dix fois pile ?

e) Combien de séquences contiennent vingt fois pile ?

Exercice 5.38 Une urne contient douze boules numérotées de 1 à 12. Calculer le nombre de tirages différents si l'on tire trois boules :

a) simultanément ;

b) successivement et sans remettre dans l'urne les boules qui ont été tirées ;

c) successivement et en remettant dans l'urne, après chaque tirage, chaque boule qui a été tirée.

Synthèse

Exercice 5.39 On choisit 5 élèves dans la classe.

a) Combien y a-t-il de possibilités différentes de les asseoir sur un canapé cinq places ?

b) Combien y a-t-il de possibilités différentes de les asseoir sur un canapé trois places ?

c) Combien y a-t-il de possibilités différentes de les asseoir dans une salle de sept places ?

Exercice 5.40 Combien de nombres entiers positifs inférieurs ou égaux à $10'000$ peuvent être formés avec les chiffres 1, 2, 3 et 4

a) si les répétitions sont permises ?

b) si les répétitions ne sont pas permises ?

Exercice 5.41 Combien de nombres différents de cinq chiffres distincts peut-on former avec les chiffres de 0 à 9

a) si les nombres doivent être impairs ?

b) si les deux premiers chiffres de chaque nombre doivent être pairs ?

Exercice 5.42 Le Sport-Toto (paris sportifs) est un jeu de pronostics sur 13 matchs de football. Il y a trois résultats possibles : l'équipe qui reçoit gagne (1), le visiteur gagne (2) ou match nul (X). Combien de pronostics différents peut-on faire ?

Exercice 5.43 On veut asseoir cinq hommes et quatre femmes dans une rangée de neuf chaises de manière à ce que les femmes occupent les places paires. Combien y a-t-il de possibilités ?

Exercice 5.44 On dispose des sept jetons suivants : ① ① ② ② ② ③ ③.

a) Combien de nombres de sept chiffres peut-on composer en juxtaposant ces sept jetons ?

b) Combien de ces nombres sont inférieurs à $1'300'000$?

Exercice 5.45 On range six jetons de couleurs différentes regroupés deux à deux dans trois boites. Combien de dispositions différentes existe-t-il ?

Exercice 5.46 De combien de manières différentes peut-on asseoir huit personnes en rang si :

a) aucune restriction n'est imposée ;

b) les personnes A et B veulent être assises côte à côte ;

c) les hommes ne doivent avoir que des voisines et inversement, sachant qu'il y a quatre femmes et quatre hommes ;

d) les hommes, qui sont au nombre de cinq, doivent être assis côte à côte ;

e) les personnes forment quatre couples et chaque couple doit rester uni ?

Exercice 5.47 Dans une course, douze chevaux prennent le départ.

a) De combien de manières le tableau d'arrivée des trois premiers peut-il se présenter ? (tiercé dans l'ordre)

b) Combien de trios gagnants peut-on avoir ? (tiercé dans le désordre)

Exercice 5.48 Une urne contient les six jetons suivants : ① ② ③ ④ ⑤ ⑥.

a) On tire simultanément cinq jetons. Combien de tirages différents contenant deux chiffres pairs et trois impairs peut-on former ?

b) On tire successivement les six jetons et on les aligne dans l'ordre du tirage. Combien de nombres différents de six chiffres peut-on ainsi former ?

c) On tire successivement quatre jetons et on les aligne dans l'ordre du tirage. Combien de nombres différents de quatre chiffres peut-on ainsi former ?

d) On tire simultanément quatre jetons. Combien de tirages différents peut-on former ?

e) On tire successivement quatre jetons. À chaque tirage, on note le chiffre obtenu puis on remet le jeton tiré dans l'urne. Combien de nombres différents de quatre chiffres peut-on ainsi former ?

f) On tire simultanément cinq jetons. On les aligne de manière à ce que deux chiffres pairs soient toujours séparés par un chiffre impair et réciproquement, deux chiffres impairs soient toujours séparés par un chiffre pair. Combien de nombres à cinq chiffres différents peut-on ainsi former ?

Exercice 5.49 Combien de nombres à trois chiffres peut-on former avec les six chiffres 2, 3, 5, 6, 7, 9 ?

Parmi ces nombres, combien sont :

a) inférieurs à 400 ; b) pairs ; c) multiples de 5.

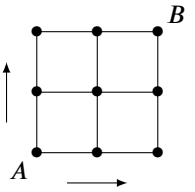
Exercice 5.50 Un étudiant doit résoudre huit problèmes sur dix lors d'un examen écrit.

a) Combien de choix peut-il faire ?

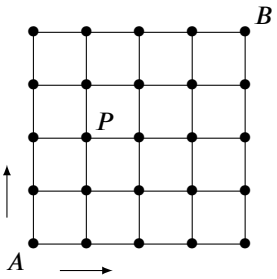
b) Combien de choix peut-il faire, en supposant qu'il doit obligatoirement résoudre les trois premiers problèmes ?

c) Combien de choix peut-il faire, en supposant qu'il doit obligatoirement résoudre au moins quatre des cinq premiers problèmes ?

Exercice 5.51 Sur un quadrillage $2x2$, on peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins reliant le point A (en bas à gauche) au point B (en haut à droite) ?



Exercice 5.52 Sur un quadrillage $4x4$, on peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut.



a) Combien y a-t-il de chemins reliant le point A (en bas à gauche) au point B (en haut à droite) ?

b) Parmi ces chemins, combien passent par le point $P(1\,;2)$?

Exercice 5.53 Combien de salades différentes peut-on préparer à partir d'un choix de laitue, scarole, endive, cresson et chicorée amère ? (Considérer d'abord le nombre possible constitué d'un légume, puis de deux ...)

Exercice 5.54 Dans combien de nombres compris entre 1000 et 9999

a) rencontre-t-on une fois le chiffre 3 ?

b) ne rencontre-t-on pas le chiffre 3 ?

c) rencontre-t-on trois fois le chiffre 3 ?

7 Solutions

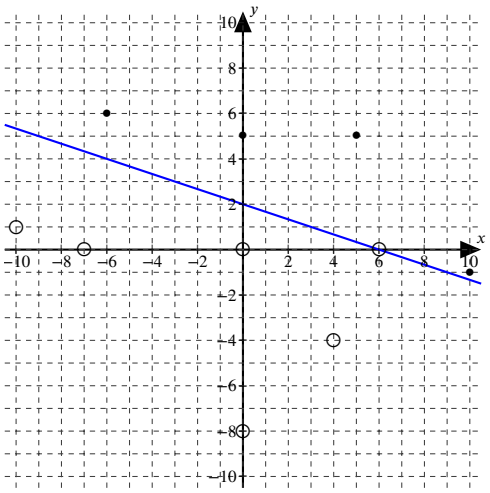
7.1 Solutions - Programmation linéaire

1.1

a) $0 < 6$ non $\quad 12 > 6$ oui $\quad -7 < 6$ non $\quad 6 = 6$ non $\quad -24 < 6$ non

$20 > 6$ oui $\quad -8 < 6$ non $\quad 15 > 6$ oui $\quad -7 < 6$ non $\quad 7 > 6$ oui

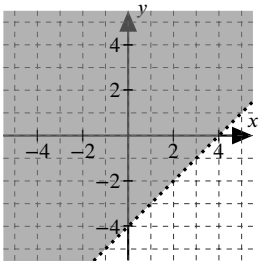
b)



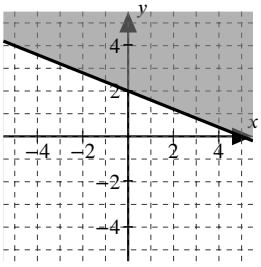
c) Les solutions sont au dessus de la droite.

1.2

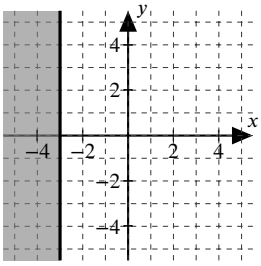
a)



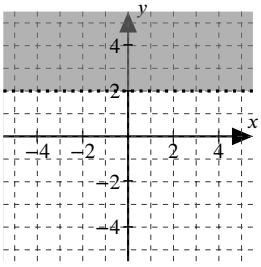
b)



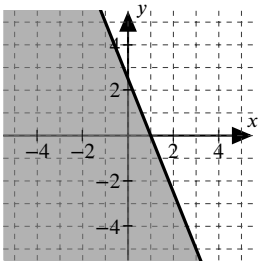
c)



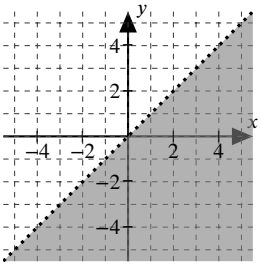
d)



e)



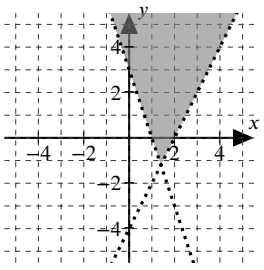
f)



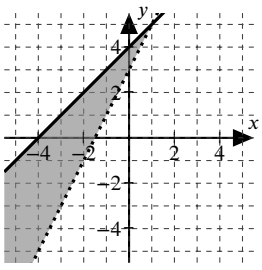
1.3 $(-2;5)$ oui $\quad (2;-1)$ non $\quad (2;1)$ oui $\quad (0;-1)$ oui $\quad (-1;7)$ non $\quad (1;1)$ non

1.4

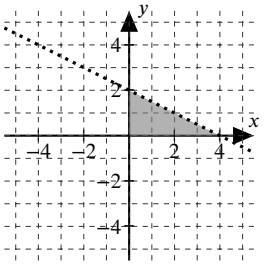
a)



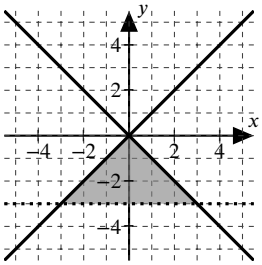
c)



b)

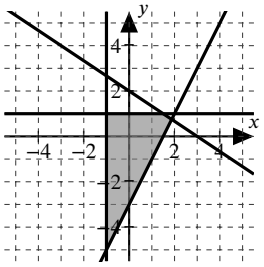


d)

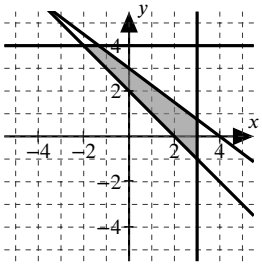


1.5

a)



b)



1.6

a) $(\frac{7}{5};-\frac{6}{5})$

b) $(0;0)$ $(0;2)$ $(4;0)$

c) $(1;5)$

d) $(0;0)$ $(-3;-3)$ $(3;-3)$

1.7

a) $(-1;1)$ $(-1;-5)$ $(\frac{15}{8};\frac{3}{4})$ $(\frac{3}{2};1)$

b) $(3;-1)$ $(3;\frac{3}{4})$ $(-\frac{4}{3};4)$ $(-2;4)$

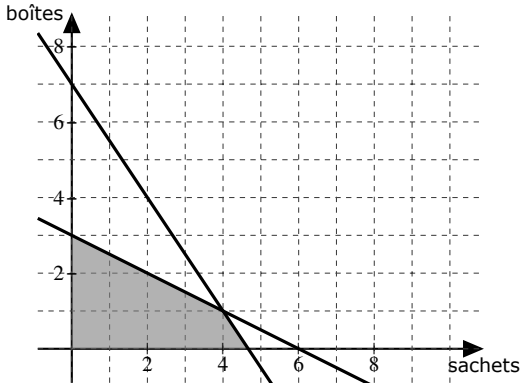
1.8

a) $15x+10y\leq 70$

b) $5x+10y\leq 30$

c) $x\geq 0$ et $y\geq 0$

d)



e) 0 sachet et 0, 1, 2 ou 3 boîtes
2 sachets et 0, 1 ou 2 boîtes
4 sachets et 0 ou 1 boîte
1 sachet et 0, 1 ou 2 boîtes
3 sachets et 0 ou 1 boîte

1.9

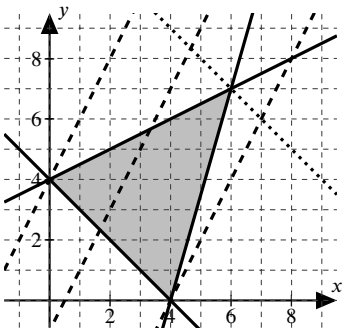
a) Max : $P_1(4;0)=16$ et Min $P_1(0;4)=-8$

b) $y=2x-1$, $(2;3)$ et $(3;5)$

c) $P_2(6;7)=13$

d) $P_2(4;0)=P_2(3;1)=P_2(2,5;1,5)=\cdots=4$

$$\begin{cases} x-2y\geq -8 \\ 7x-2y\leq 28 \\ x+y\geq 4 \end{cases}$$



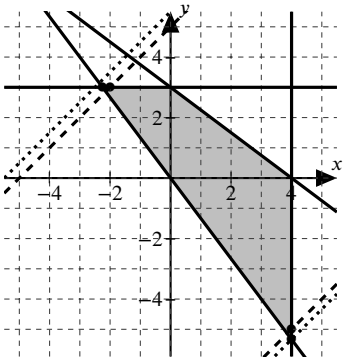
1.10

a) $P_{max}=P(4;-\frac{16}{3})=\frac{28}{3}$

$P_{min}=P(-\frac{9}{4};3)=-\frac{21}{4}$

b) $P_{max}=P(4;-5)=9$

$P_{min}=P(-2;3)=-5$



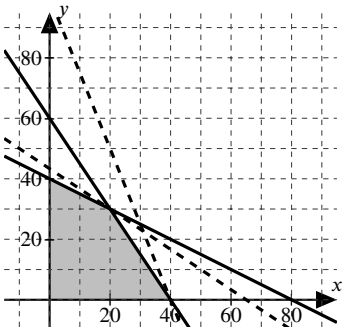
1.11

a) $P(x;y)=50x+20y$

$$\begin{cases} x+2y\leq 80 \\ 3x+2y\leq 120 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

c) Il faut produire 40 boîtes de type A et aucune de type B. Le profit sera de CHF $2000.-$.

d) Il faut produire 20 boîtes de type A et 30 de type B. Le profit sera de CHF $1300.-$.



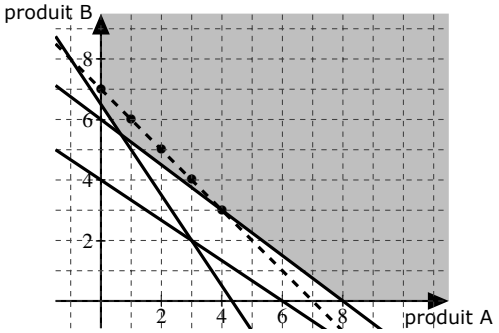
1.12

$P(x;y)=x+y$

$$\begin{cases} 15x+10y\geq 65 \\ 20x+30y\geq 120 \\ 300x+400y\geq 2400 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Il faut mettre 0 dose de produit A et 7 de produit B ou 1 de A et 6 de B ou 2 de A et 5 de B ou 3 de A et 4 de B ou 4 de A et 3 de B.

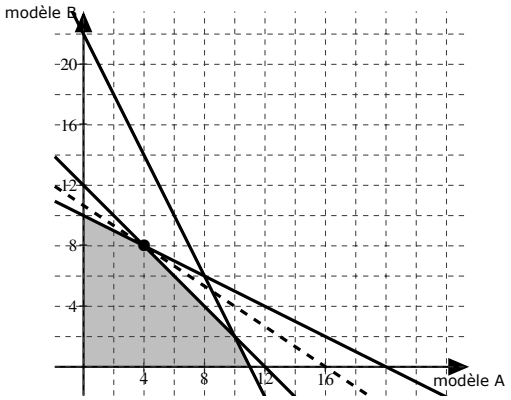
Le prix sera de CHF $7.-$.



1.13

$P(x\,;y) = 200x + 300y$

$$\begin{cases} x + 2y \le 20 \\ 2x + y \le 22 \\ x + y \le 12 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Il faut faire 4 statues A et 8 statues B. Le profit sera de CHF $3200.-$.

1.14 150 t du fournisseur A et 625 t du fournisseur B

1.15

a) 15 armoires et 30 tables.

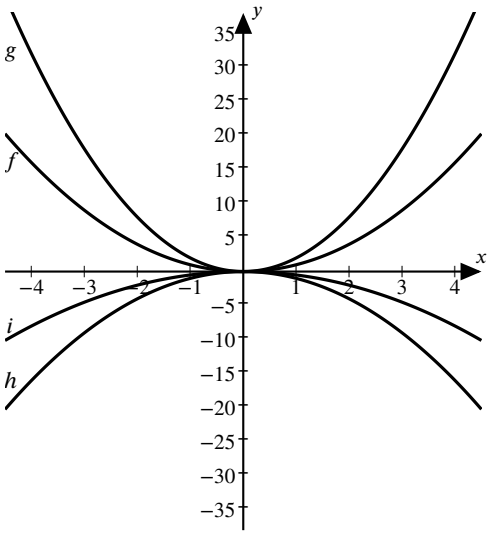
b) 15 armoires et 30 tables ou 20 armoires et 24 tables ou 25 armoires et 18 tables ou 30 armoires et 12 tables.

1.16 $4'000$ km en bateau, $2'000$ km en car et $2'000$ km en train.

7.2 Solutions - Fonctions quadratiques

2.1

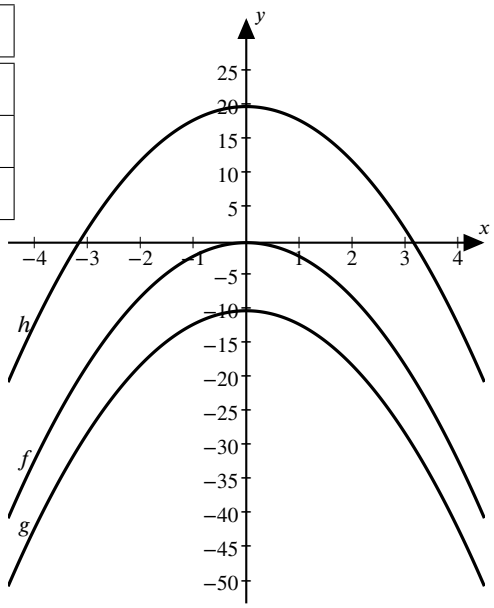
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$g(x) = 2x^2$	32	18	8	2	0	2	8	18	32
$h(x) = -x^2$	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16
$i(x) = -\frac{1}{2}x^2$	-8	$-4{,}5$	-2	$-0{,}5$	0	$-0{,}5$	-2	$-4{,}5$	-8



- Leur expression est de la forme ax^2. Les coefficients b et c sont nuls.
- Toutes ces paraboles passent par l'origine.
- Elles sont symétriques par rapport à l'axe Oy.
- Si $a > 0$, la parabole « sourit ». si $a < 0$, la parabole est « triste ».
- Faire varier le a change la courbure de la parabole.

2.2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)=-2x^2$	-32	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	-32
$g(x)=-2x^2-10$	-42	-28	-18	-12	-10	-12	-18	-28	-42
$h(x)=-2x^2+20$	-12	2	12	18	20	18	12	2	-12



- $a = -2$ pour toutes les paraboles. Elles sont toutes « tristes ». Elles ont la même courbure.
- Leur expression est de la forme $-2x^2+c$. Le coefficient b est nul.
- Elles sont symétriques par rapport à l'axe Oy.
- Faire varier c translate verticalement la courbe.
- c est l'ordonnée à l'origine de la parabole.

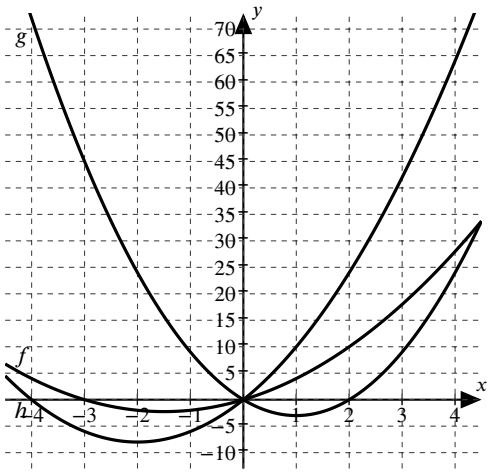
2.3

a) f : 0 et -3 g : 0 et 2 h : 0 et -4

b) 0 et $-\dfrac{b}{a}$

c)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)=x^2+3x$	4	0	-2	-2	0	4	10	18	28
$g(x)=3x^2-6x$	72	45	24	9	0	-3	0	9	24
$h(x)=2x^2+8x$	0	-6	-8	-6	0	10	24	42	64



d) $S_f=(-\frac{3}{2};-\frac{9}{4})$; $S_g=(1;-3)$; $S_h=(-2;-8)$

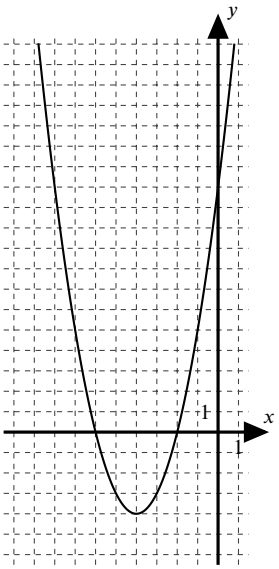
e) La première coordonnée du sommet est la moyenne des 2 zéros, quand ils existent. Ici, cela revient à prendre la moitié du zéro non nul.

f) $-\dfrac{b}{2a}$

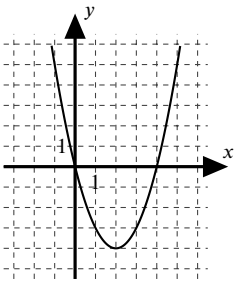
g) On a vu dans l'exercice précédent que changer le c translate verticalement la parabole. Cela ne change donc pas la première coordonnée du sommet. Ainsi, elle sera de $-\dfrac{b}{2a}$, comme à la question précédente.

2.4

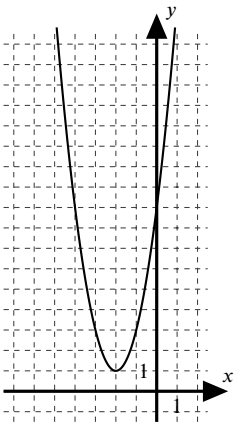
a) O. o. : 12
Zéros : -6 et -2
Sommet : $S(-4;-4)$
Orientation : convexe



b) O. o. : 0
Zéros : 0 et 4
Sommet : $S(2;-4)$
Orientation : convexe

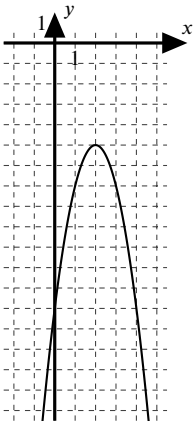


c) O. o. : 9
Zéros : aucun
Sommet : $S(-2;1)$
Orientation : convexe

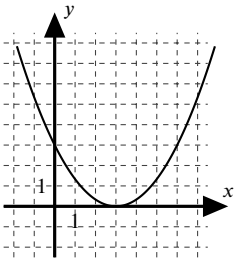


2.4

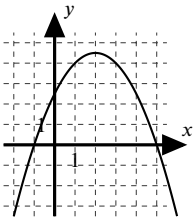
d) O. o. : -13
Zéros : aucun
Sommet : $S(2;-5)$
Orientation : concave



e) O. o. : 3
Zéros : 3
Sommet : $S(3;0)$
Orientation : convexe



f) O. o. : $\frac{5}{2}$
Zéros : -1 et 5
Sommet : $S\left(2;\frac{9}{2}\right)$
Orientation : concave



2.5 a) $(3;-2)$ et $(-2;18)$ b) $(1;8)$ et $\left(\frac{2}{3};7\right)$ c) Aucun point d'intersection.

2.6 a) $(3;9)$ et $(5;33)$ b) $(6;-6)$ c) Aucun point d'intersection

2.7 Les deux courbes sont bien tangentes, car elles n'ont qu'un point d'intersection : $(4;1)$

2.8 $A(y)=250y-\frac{3}{4}y^2$ $y=\frac{500}{3}$ $x=125$ Le champ mesure 125 m sur environ $166{,}7$ m.

2.9 $A(x) = 27x - 2x^2$ $x = \frac{27}{4}$ 6,75 cm de chaque côté.

2.10 $P(x) = 36x - x^2$ Les nombres sont 18 et 18.

2.11 $P(x) = 12x + x^2$ Les nombres sont -6 et 6 et le produit -36.

2.12 $S(x) = x^2 + (36-x)^2 = 2x^2 - 72x + 1296$ minimum = 648

2.13 $A(x) = (x-2)(12-x)$ 2 morceaux de 7 cm de long et 2 autres de 5 cm de long.

2.14
Variables : $x = BM = CN$, $y = BN$
À optimiser : $A_{MNI} = \frac{x+3}{2} \cdot 6 - \frac{3x}{2} - \frac{xy}{2}$ Contrainte : $y = 6 - x$
Fonction à optimiser : $\mathcal{A}_{MNI}(x) = \frac{x+3}{2} \cdot 6 - \frac{3x}{2} - \frac{x(6-x)}{2} = \frac{x^2 - 3x + 18}{2}$
Min : $x_{MIN} = \frac{3}{2}$ Le point M doit se situer à 1,5 cm du point B.

2.15 a) $x = 2$ cm b) aire max $= 36$ cm^2

2.16 a) Le point F doit être situé à 2 cm du point D. b) La proportion de l'aire du triangle est de $\frac{28}{64} = 43,75\%$.

2.17 a) 60 km/h b) 75 km

2.18 a) 125 m b) 105 m c) 7 s

2.19 $R(x) = x[480 - 5(x-60)]$ Il faut planter 78 poiriers.
Ou si x est le nb de poiriers en plus des 60 : $R(x) = (60+x)(480-5x)$

2.20 $R(x) = (120+30x)(240-40x) = 28'800 + 2400x - 1200x^2$

a) Dans une semaine. b) Le revenu sera de CHF 30'000.–.

2.21 Si $30 \le x \le 90$ $R(x) = (75 - 0,5x)x$ Pour 75 participants.

7.3 Solutions - Polynômes et fonctions polynomiales

3.1

a) $x^2-10x+25$
b) $9x^2+42xy+49y^2$
c) $25a^3-16a$
d) $3x^2-15x-150$
e) $4y^4-60y^3+200y^2$
f) $-21x^2+88x-25$
g) $-2x^2+7x+54$
h) $t^3+\frac{22}{3}t^2-28t+3$

3.2

a) $x^5(x+7)(x-7)$
b) $5(y-2)(y-8)$
c) $\frac{1}{8}x^2(x-4)(x-4)$
d) $(14x+1)^2$
e) $-m(m+7)(m-1)$
f) $x^7y^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
g) $\frac{1}{8}(x+2)(x-8)$
h) $-3(c^2+15)$

3.3

a) $10(2x+7)(x-3)$
b) $(5y-2)(5y-8)$
c) $x(2x-5)(3x-1)$
d) $x^2(2x-3)(5x-4)$
e) $(3x+5)^2$
f) $100a^2+9a+1$

3.4

a) $11x^2(x+3)(x-2)$
b) $3(4x-1)(3x-1)$
c) $5y(7x^2+5x+2)$
d) $2x^5(x-12)(x+12)$
e) $-(7c+3)^2$
f) $x^2y^4(3x+5)(x-2)$

3.5

a) $\frac{1}{3}x(x-5)(x+3)$
b) $\frac{1}{2}(x-6)(x-4)$
c) $(\sqrt{7}x+15)(\sqrt{7}x-15)$
d) $(x-12)(2x+1)$
e) $x^5(9x+2)^2$
f) $\frac{1}{6}(x-6)(x-3)$

3.6

a) $25x^2+40x+16$
b) $25x^4+40x^2+16$
c) $25x^6+40x^3+16$
d) z^2-225
e) z^4-225
f) $z^{20}-225$
g) $x^2+19x-66$
h) x^4+19x^2-66
i) $3x^2-29x-44$
j) $3x^4y^2-29x^2y-44$

3.7

a) $(x^2+25)(x-5)(x+5)$
b) $(x+2)(x-2)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$
c) $(x^2+11)(2x^2+1)$
d) $(3x+2)^2(3x-2)^2$
e) $(z+3)(z-3)(z^2+1)$
f) $(x+1)(x-1)(x^2+9)$

3.8

a) $a^2(a+5)(a-5)(a^2+4)$
b) $5(x+3)(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
c) $-x^3(7x^2+6)(x+1)(x-1)$
d) $\frac{1}{3}(x^2+9)(x-3)(x+3)$
e) $2xy(4x^2+25)^2$
f) $\frac{1}{7}x^4(x^2+7)(x^2+3)$

3.9

a) $x^3+12x^2+48x+64$
b) $8x^3-60x^2+150x-125$
c) $1000c^3-300c^2+30c-1$
d) $27x^3+9x^2+x+\frac{1}{27}$
e) $x^3-6x^2+12x-8$
f) $x^6-6x^4+12x^2-8$
g) $x^9+3x^6+3x^3+1$
h) $x^{30}y^{12}+3x^{20}y^8+3x^{10}y^4+1$

3.10

a) $(x+5)(x^2-5x+25)$
b) $(x-5)(x^2+5x+25)$
c) $(2V+T)(4V^2-2VT+T^2)$
d) $(3x-2)(9x^2+6x+4)$
e) $(x+1)^3$
f) $(q-10)^3$

3.11

a) $(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$
b) $x(x+2)(x^2-2x+4)$
c) $(x+1)^2(x^2-x+1)^2$
d) $8(n+1)^3$
e) $(x+1)(x^2-x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)$
f) $x^3(x+3)^3$

3.12

a) $(x+5)(x^2+3)$
b) $(x+6)(x+2)(x-2)$
c) $(5z-8)(z-1)(z+1)$
d) $(x+8)(x+1)(x^2-x+1)$
e) $(x+1)(x+2)(x^2-2x+4)$
f) $(2w+3)(w-5)(w^2+5w+25)$

3.13
a) $2x(3x-5)(x^2+11)$
b) $-x^3(x+8)(2x+3)(4x^2-6x+9)$
c) $\frac{1}{11}(x+2)(x+11)(x-11)$
d) $10y^2(3y-2)(2y-1)(2y+1)$
e) $5(2x-13)(x+1)(x^2-x+1)$
f) $5(2x+13)(x-1)(x^2+x+1)$

3.14
a) $\mathcal{S}=\left\{-5\right\}$
b) $\mathcal{S}=\left\{-2;2\right\}$
c) $\mathcal{S}=\left\{2\right\}$
d) $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{10}\right\}$
e) $\mathcal{S}=\left\{-5;1\right\}$
f) $\mathcal{S}=\left\{0;-\frac{1}{6};4\right\}$

3.15
a) $F(x)=(3x^3-2x^2-4x+2)(x-2)+9$
b) $F(x)=(x^2-3x+1)(x-5)$
c) $F(x)=(3x^2-2x+2)(x+2)+4$
d) $F(x)=(x^3+3x^2+x+3)(x-3)+2$

3.16
a) $F(x)=(-x^2+2x-1)(2x-3)-4$
b) $F(x)=(-4x^2-3x+2)(4x+5)$
c) $F(x)=(3x^2+7x+5)(3x-7)+9$
d) $F(x)=(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1)(2x-4)-4$

3.17
a) $F(x)=(x^3-3x^2+3x-7)(x^2+2x-1)+(20x-8)$
b) $F(x)=(5x^2+3x+5)(x^2-1)+(3x+4)$
c) $F(x)=(3x^3+7x^2-5x+1)(2x^2-3x+2)+(x+3)$
d) $F(x)=(x^2-5x+6)(3x^2+8x+4)$

3.18 x^4+4x^2+x-20 est la seule possibilité

3.19 $x^3-11x+6$ ou $k(x^3-11x+6)$ pour tout nombre réel k.

3.20
a.i) oui
a.ii) non
a.iii) non
a.iv) oui
a.v) non
a.vi) oui
a.vii) non
a.viii) non
b) $A(x)=(x^2+5x-4)(x+2)$ $D(x)=(3x^2-x+3)(x+2)$ $F(x)=(10x^3+3x^2-3)(x+2)$

3.21
a.i) oui
a.ii) non
a.iii) oui
a.iv) non
a.v) oui
a.vi) non
b) tous

3.22
a) Zéros : ± 2
b) Zéros : -3 ; -1

3.23
a) $(x-3)(x+2)(x+5)$
b) $(x-1)(x+7)(x+4)$
c) $2x^3+3x^2-11x-6$
d) $(x+3)(x^2+4)(x+4)$

3.24
a) $\mathcal{S}=\left\{-3;9\right\}$
b) $\mathcal{S}=\left\{-1;-2;-3;-4\right\}$
c) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{3};-3;2\right\}$
d) $\mathcal{S}=\left\{1;-1;-11;-5\right\}$

3.25
a) $(x-4)(x+3)(x+4)$
b) $(x-5)(x-3)(x-1)$
c) $(x-3)(x+4)^2$
d) $(x-4)(x-3)(x-2)$
e) $(x-2)(x+3)(x^2+x+1)$
f) $(x+1)(5x+1)(7x+1)$

3.26
a) $x(x-8)(x+8)$
b) $(x-4)(x^2+4x+16)$
c) $(x^2+8)(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8})$
d) $(x+8)(x^2+8)$
e) $(x^2+8)^2$
f) $(x+8)(x+2)(x+4)$
g) $x(x+8)(3x-8)$
h) $(x+16)(x-2)(x+2)$

3.27

a)

x		-2		3		4	
$f(x)$	+	0	−	0	+	0	−

b)

x		-2		3		4	
$g(x)$	−	0	−	0	+	0	−

c)

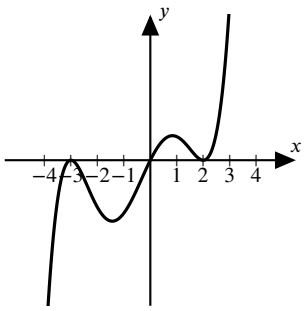
x	
$h(x)$	+

d)

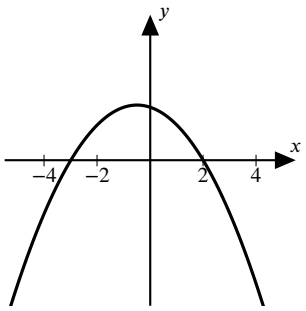
x		-3		0		4	
$i(x)$	−	0	+	0	+	0	+

3.28

a)

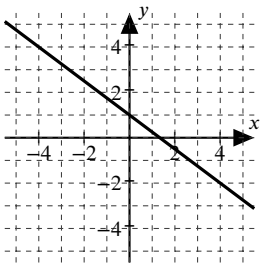


b)



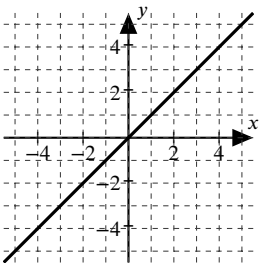
3.29

a)



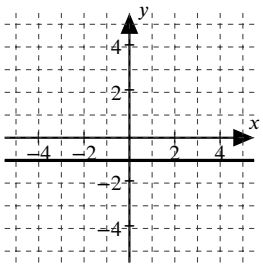
x		$\frac{4}{3}$	
$f(x)$	+	0	−

b)



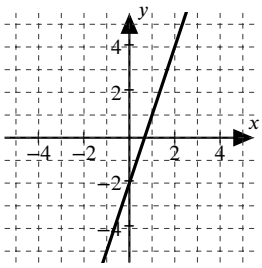
x		0	
$g(x)$	−	0	+

c)



x	
$h(x)$	−

d)



x		$\frac{2}{3}$	
$i(x)$	−	0	+

3.30

a)

x		7	
$7-x$	+	0	−

b)

x		$\frac{7}{4}$	
$4x-7$	−	0	+

c)

x		6	
$-\frac{1}{3}x+2$	+	0	−

d)

x		0	
$\frac{4}{5}x$	−	0	+

e)

x	
13	+

f)

x		6	
$-6+x$	−	0	+

3.31 Par exemple $f(x)=4-x$ ou $f(x)=8-2x$ ou $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$ ou ...

3.32

a)

x		$-\frac{3}{2}$		5	
3	+		+		+
$5-x$	+		+	0	−
$2x+3$	−	0	+		+
$3(5-x)(2x+3)$	−	0	+	0	−

b)

x		0		$\frac{5}{4}$	
$3x$	−	0	+		+
$-5+4x$	−		−	0	+
$3x(-5+4x)$	+	0	−	0	+

c)

x		-4		6	
-4	−		−		−
$x+4$	−	0	+		+
$x-6$	−		−	0	+
$-4(x+4)(x-6)$	−	0	+	0	−

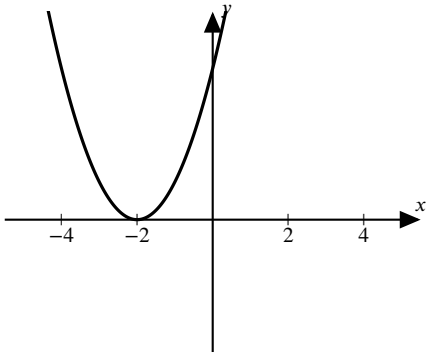
d)

x		$-\frac{1}{7}$		0	
$-4x$	+		+	0	−
$7x+1$	−	0	+		+
$-4x(7x+1)$	−	0	+	0	−

3.33

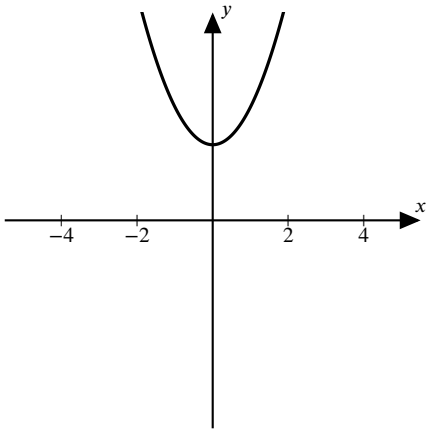
a)

x		-2	
$(x+2)^2$	+	0	+



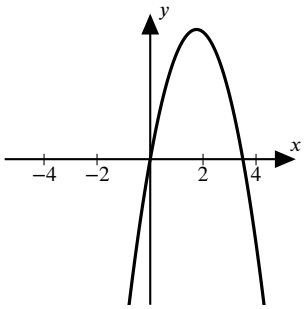
b)

x	
x^2+2	+



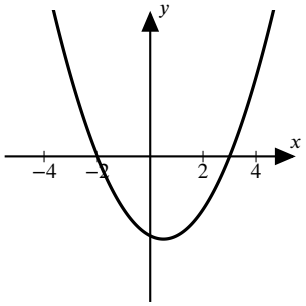
c)

x		0		$\frac{7}{2}$	
$-2x^2+7x$	−	0	+	0	−



d)

x		-2		3	
x^2-x-6	+	0	−	0	+



3.34

a)

x		-11		-5	
$-x^2-16x-55$	$-$	0	$+$	0	$-$

b)

x		-1		$\frac{1}{13}$	
$13x^2+12x-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

c)

x		$-\frac{3}{2}$	
$4x^2+12x+9$	$+$	0	$+$

d)

x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
$-5+x^2$	$+$	0	$-$	0	$+$

e)

x	
x^2+x+9	$+$

f)

x		0		$\frac{2}{9}$	
$-9x^2+2x$	$-$	0	$+$	0	$-$

g)

x	
$-x^2-9$	$-$

h)

x		0	
$-5x^2$	$-$	0	$-$

3.35

a)

x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
$5-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$2x^2+3$	$+$		$+$		$+$
$(5-x^2)(2x^2+3)$	$-$	0	$+$	0	$-$

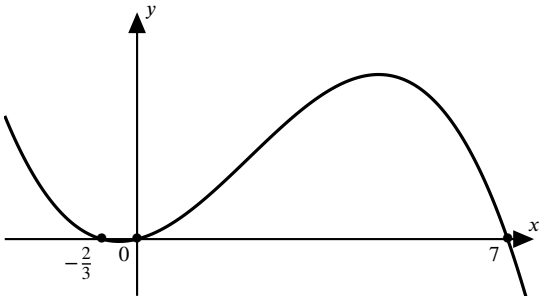
b)

x		-3		2	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
x^2+x-6	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x+3)(x^2+x-6)$	$-$	0	$-$	0	$+$

3.36

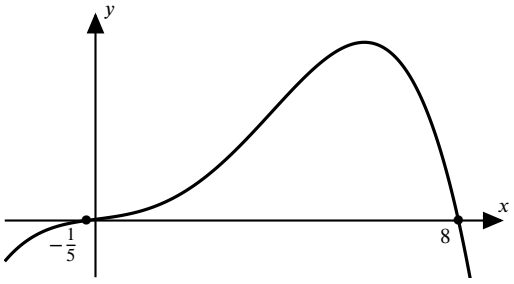
a)

x		$-\frac{2}{3}$		0		7	
$5x(3x+2)(7-x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$



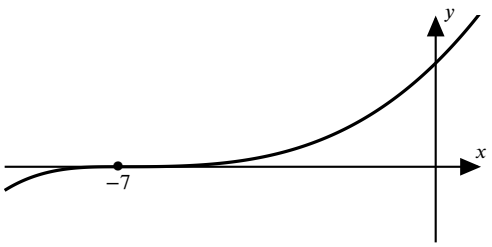
b)

x		$-\frac{1}{5}$		8	
$-4(x-8)(5x+1)(x^2+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$



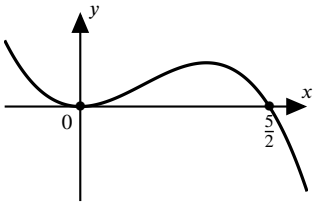
c)

x		-7	
$(x+7)^3$	$-$	0	$+$



d)

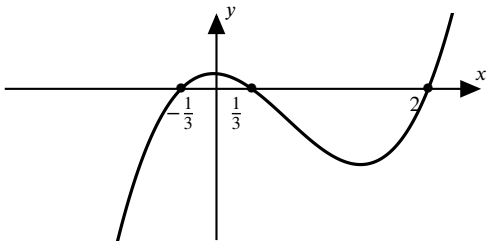
x		0		$\frac{5}{2}$	
$x^2(-2x+5)$	$+$	0	$+$	0	$-$



3.37

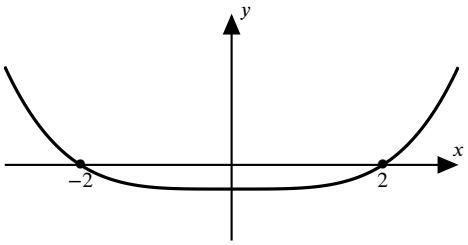
a)

x		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		2	
$(3x+1)(3x-1)(x-2)$	−	0	+	0	−	0	+



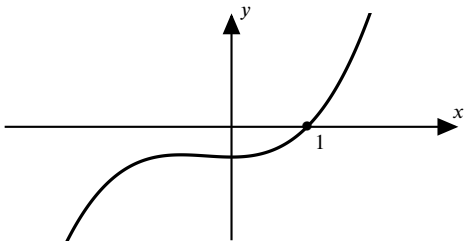
b)

x		-2		2	
$(2+x)(2-x)(4+x^2)$	−	0	+	0	−



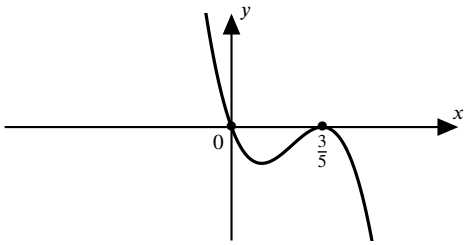
c)

x		1	
$(x-1)(x^2+2x+2)$	−	0	+



d)

x		0		$\frac{3}{5}$	
$-x(5x-3)^2$	+	0	−	0	−



3.38

a)

x		5	
$(5-x)^3$	+	0	−

b)

x		$-\frac{7}{3}$	
$(3x+7)^4$	+	0	+

c)

x		0		2	
$x^3(x-2)^2$	−	0	+	0	+

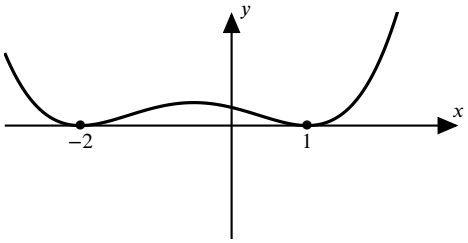
d)

x		-4		0		6	
$-3x(x+4)^4(6-x)^2$	+	0	+	0	−	0	−

3.39

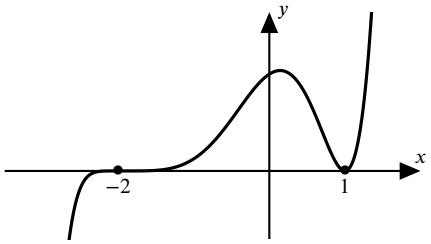
a)

x		-2		1	
$(x-1)^2(x+2)^2$	+	0	+	0	+



b)

x		-2		1	
$(x-1)^2(x+2)^5$	−	0	+	0	+



7.4 Solutions - Trigonométrie dans le triangle quelconque

4.1

a) $\cos(\alpha) \approx 0,91$
$\sin(\alpha) \approx 0,42$
$\tan(\alpha) \approx 0,47$

b) $\cos(\alpha) \approx -0,64$
$\sin(\alpha) \approx 0,77$
$\tan(\alpha) \approx -1,19$

c) $\cos(\alpha) \approx -0,97$
$\sin(\alpha) \approx -0,26$
$\tan(\alpha) \approx 0,27$

4.2

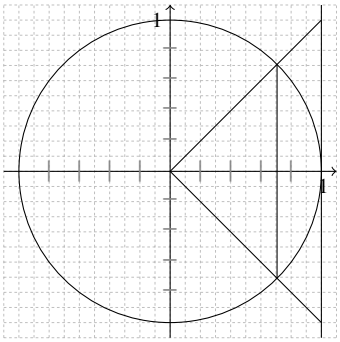
a) $\cos(\alpha) \approx 0,71$
$\sin(\alpha) \approx 0,71$
$\tan(\alpha) \approx 1$

b) $\cos(\alpha) \approx 0,87$
$\sin(\alpha) \approx -0,5$
$\tan(\alpha) \approx -0,58$

c) $\cos(\alpha) = -0,5$
$\sin(\alpha) \approx -0,89$
$\tan(\alpha) \approx 0,58$

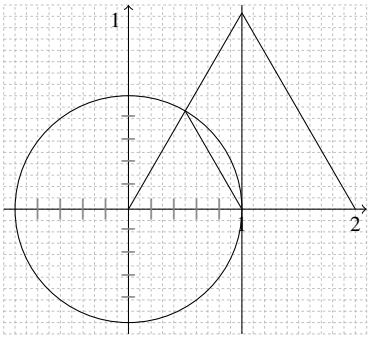
4.3

a) $\alpha = 45°$



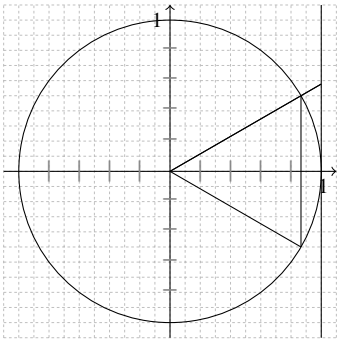
$\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan(45°) = 1$

b) $\alpha = 60°$



$\cos(60°) = \frac{1}{2}$
$\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan(60°) = \sqrt{3}$

c) $\alpha = 30°$



$\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(30°) = \frac{1}{2}$
$\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4.4

a) $\cos(160°) = -\cos(20°) \approx -0,94$
$\sin(160°) = \sin(20°) \approx 0,34$
$\tan(160°) = -\tan(20°) \approx -0,36$
symétrie d'axe Oy

b) $\cos(340°) = \cos(20°) \approx 0,94$
$\sin(340°) = -\sin(20°) = \approx -0,34$
$\tan(340°) = -\tan(20°) \approx -0,36$
symétrie d'axe Ox

c) $\cos(200°) = -\cos(20°) \approx -0,94$
$\sin(200°) = -\sin(20°) = \approx -0,34$
$\tan(200°) = \tan(20°) \approx 0,36$
symétrie de centre O ou rotation de $180°$

d) $\cos(110°) = -\sin(20°) \approx -0,34$
$\sin(110°) = \cos(20°) = \approx 0,94$
rotation de $90°$

e) $\cos(70°) = \sin(20°) \approx 0,34$
$\sin(70°) = \cos(20°) = \approx 0,94$
symétrie d'axe $y = x$

f) $\cos(740°) = \cos(20°) \approx 0,94$
$\sin(740°) = \sin(20°) = \approx 0,34$
$\tan(740°) = \tan(20°) \approx 0,36$
rotation de 2 tours complets $(2 \cdot 360°)$

4.5

a) $c = 5,18$
$\alpha = 50,87°$
$\beta = 94,13°$

b) $\alpha = 97,26°$
$\beta = 45,90°$
$\gamma = 36,84°$

c) $c = 64,94$
$\alpha = 44,23°$
$\gamma = 128,51°$

4.6

a) impossible : Δ est négatif et le cercle ne coupe pas le 2e côté de l'angle.

b) $b = 5,20$, 1 solution : $\Delta = 0$ et le cercle est tangent au 2e côté de l'angle.

c) $b = 7,84$ ou $b = 2,55$, 2 solutions : Δ est positif et le cercle coupe le 2e côté de l'angle en 2 points.

d) $b = 10,39$, 1 solution : Δ est positif mais une des solutions est 0 et le cercle coupe le 2e côté de l'angle en 2 points dont un est A.

e) $b = 11,52$, 1 solution : Δ est positif mais une des solutions est négative et le cercle coupe le 2e côté de l'angle en 1 point.

4.7 $513,3$ m

4.8

a) $18,1$ b) $39,0$ c) $237,4$

4.9

a) $\beta = 55°$, $b = 8,22$, $c = 6,45$, $\mathscr{A} = 26,4$

b) $\alpha = 32,28°$, $b = 134,26$, $c = 66,62$, $\mathscr{A} = 2388,5$

c) $\gamma = 26,41°$, $a = 163,32$, $b = 176,13$, $\mathscr{A} = 6397,6$

4.10 $690,30$ m

4.11

a) $\alpha = 23,56°$, $\beta = 64,06°$, $\gamma = 92,38°$

b) $\alpha = 20,76°$, $\beta = 146,26°$, $\gamma = 12,98°$

c) $\alpha = 56,98°$, $\beta = 25,66°$, $\gamma = 97,36°$

4.12

a) $c = 41,92$, $\alpha = 58,79°$, $\beta = 90,52°$, $\mathscr{A} = 1472$

b) $\alpha = 82,37°$, $b = 17,55$, $c = 13,10$, $\mathscr{A} = 113,9$

c) $\alpha = 7,89°$, $\gamma = 141,46°$, $c = 444,92$, $\mathscr{A} = 22'241,9$

d) $b = 123,41$, $\alpha = 37,95°$, $\gamma = 24,24°$, $\mathscr{A} = 2173,9$

4.13 $27,61$ m

4.14 $AC = 26,46$ cm $BD = 43,59$ cm $\theta = 64,31°$

4.15

Le triangle BCD est isocèle en C.

$\beta = 101,26°$ $\gamma = 67,34°$ $\delta = 81,4°$ $\mathscr{A}_{ABCD} = 23,7$ cm^2

7.5 Solutions - Analyse combinatoire

5.1 24 tenues

5.2 720 commandes

5.3 $24 + 2880 = 2904$ programmes

5.4 a) 256 b) 64 c) 81 d) 108 e) 175 f) 24 g) 0 h) 4

5.5 a) $2'340'000$ b) $1'920'000$ c) $2'300'030$

5.6
a) $3! = 6$
b) $\frac{3!}{2} = 3$
c) $7! = 5040$
d) $\frac{8!}{2!} = 20'160$
e) $\frac{12!}{4! \cdot 2!} = 9'979'200$
f) $\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650$

5.7 $3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 8! = 174'182'400$

5.8 $6 \cdot 30 = 180$

5.9 $4! = 24$

5.10 a) $\frac{9!}{9} = 40'320$ b) $2 \cdot \frac{8!}{8} = 10'080$ c) $40'320 - 10080 = 30'240$

5.11 a) $5! = 120$ b) $5! = 120$

5.12 a) $\frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$ b) $\frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = 2'520$

5.13 $4! = 24$

5.14 $3 \cdot \frac{4!}{2!} = 36$

5.15 $3 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 + 1 = 90$ ou $120 - 4! - 3! = 90$

5.16 a) $\frac{26!}{21!} = 7'893'600$ b) $26^5 = 11'881'376$

5.17 1680

5.18 $5'040$

5.19 $6'720$

5.20 $2^6 = 64$

5.21 a) $32'768$ b) $6'720$

5.22 a) 676 b) Au moins 677 habitants.

5.23 a) 6 b) 2

5.24 720

5.25 a) $4'080$ b) 1 c) 6 d) 5

5.26 a) $2^{40} = \sim 1'099$ milliards b) Parmi vos ancêtres, il y a des recoupements, ainsi plusieurs sont comptés à double (ou plus).

5.27 a) $\frac{36!}{30! \cdot 6!} = 1'947'792$ b) $\frac{32!}{30! \cdot 2!} = 496$ c) $1'041'600$

5.28 a) 32 b) $1'008$ c) $175'616$ d) $31'776$

5.29 Le nombre de tiercés non ordonnés sera $\frac{4'080}{6} = 680$.

5.30 $\frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3!} = 2'024$

5.31 $\frac{12 \cdot 11}{2!} = 66$

5.32 $\frac{9 \cdot 8}{2!} = 36$

5.33 $\frac{31 \cdot 30 \cdot 29}{3!} = 4495$. Oui, c'est vrai !

5.34 $\frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} = 252 \cdot 15 = 3'780$

5.35 a) $8'145'060$ b) $20 \cdot 9139 = 182'780$ c) 1

5.36 $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$

5.37 a) $2^{20} = 1'048'576$ c) $\frac{20!}{4! \cdot 16!} = 4'845$ d) $\frac{20!}{10! \cdot 10!} = 184'756$
b) 20 e) 1

5.38 a) 220 b) $1'320$ c) $1'728$

5.39 a) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ b) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ c) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

5.40 a) $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 340$ b) $4 + (4 \cdot 3) + (4 \cdot 3 \cdot 2) + (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 64$

5.41 a) $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 13'440$ b) $4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 5'376$

5.42 $3^{13} = 1'594'323$

5.43 $4! \cdot 5! = 2880$

5.44 a) $\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$ b) $\frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 40$

5.45 $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$

5.46 a) $8! = 40'320$ b) $2 \cdot 7! = 10'080$ c) $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1'152$ d) $4! \cdot 5! = 2'880$ e) $2^4 \cdot 4! = 384$

5.47 a) $\frac{12!}{9!} = 1320$ b) $\frac{12!}{9! \cdot 3!} = 220$

5.48 a) $C_2^3 \cdot C_3^3 = 3$ c) $\frac{6!}{2!} = 360$ e) $6^4 = 1296$
b) $6! = 720$ d) $C_4^6 = 15$ f) 72

5.49 a) $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ b) $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ c) $1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$

5.50 a) $C_8^{10} = 45$ b) $C_5^7 = 21$ c) $5 \cdot C_1^5 + C_2^5 = 35$

5.51 $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ chemins différents

5.52 a) $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$ b) $\frac{3!}{2!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 30$

5.53 $C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + 1 = 31$

5.54 a) $1 \cdot 9^3 + 3 \cdot 8 \cdot 9^2 = 2673$ b) $8 \cdot 9^3 = 5832$ c) $8 + 3 \cdot 9 = 35$

Références

[1] T. Besson : 2C Exercices de mathématiques, juin 2020.

[2] H. Bovet : Diplôme 2D. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2008.

[3] J.-P. Favre : Mathématiques pour la Matu pro. Promath Editions, 2019.

[4] J.-P. Javet : Mathématiques 2C. http://www.javmath.ch, 2021.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch

sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 2 août 2022