

3E

Mathématiques et semestre 6

Sarah Delmonico

Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2022-2023

Table des matières

1 Exponentielles et logarithmiques	2
1.1 Exponentielles	2
1.2 Fonctions exponentielles	4
1.3 Propriétés algébriques des exponentielles	5
1.4 Équations exponentielles	5
1.5 Logarithmes	6
1.6 Propriétés algébriques des logarithmes	7
1.7 Retour sur les équations exponentielles	8
1.8 Fonctions logarithmes	9
1.9 Équations logarithmiques	10
2 Mathématiques financières	11
2.1 Processus de croissance et de décroissance	11
2.2 Annuité, prêts et rentes	13
3 Exercices	18
3.1 Exponentielles et logarithmes	18
3.2 Mathématiques financières	22
4 Solutions	25
4.1 Solutions - Exponentielles et logarithmes	25
4.2 Solutions - Mathématiques financières	27

Cette brochure a bénéficié du précieux travail antérieur de plusieurs collègues, notamment Christophe Haton et Marie-Jo Lüthi. Nous tenons à les remercier ainsi que notre collègue Emmanuelle Vlcek pour son travail important de relecture et pour ses commentaires et apports constructifs qui ont permis d'améliorer cette brochure.

1 Exponentielles et logarithmiques

1.1 Exponentielles

« Quand vous recevrez cette lettre, versez-moi CHF 10.– puis recopiez la lettre 10 fois et envoyez-la à 10 de vos amis. Ainsi vous gagnerez CHF 100.– après avoir donné seulement CHF 10.– Ne brisez pas la chaîne car sinon le malheur s'abattra sur vous ! »

Imaginons que toutes les personnes qui reçoivent cette lettre en renvoient 10 le jour-même et que le courrier ne mette qu'un jour pour arriver à ses destinataires, compléter le tableau ci-dessous.

nb de jours depuis le début de la chaîne	nb de lettres envoyées ce jour-là
0	1
1	
2	
3	
4	
x	

Au bout de combien de temps, le nombre de lettres envoyées ce jour-là sera plus grand que la population mondiale (environ 8 milliards de personnes) ?

Les **problèmes de croissance exponentielle** sont des problèmes où **la quantité de départ est multipliée à chaque étape par une valeur constante**. C'est le cas, par exemple, avec les calculs d'intérêts composés.

Pour les résoudre, nous allons avoir besoin de nouvelles fonctions : les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle **exponentielle de base a** la fonction :

$$\begin{aligned}\exp_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ \exp_a(x) &= a^x\end{aligned}$$

Exemple :

a) Compléter l'expression de la fonction :

$\exp_2(x) =$

$\exp_{1,3}(x) =$

$\exp_{1/5}(x) =$

b) Calculer :

$\exp_4(2) =$

$\exp_4\left(\frac{1}{2}\right) =$

$\exp_4(-1) =$

$\exp_4\left(-\frac{1}{2}\right) =$

Pourquoi $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$?

- $a \neq 0$ pour éviter les problèmes du type 0^{-2} car
- $a > 0$ pour éviter les problèmes du type $(-1)^{1/2}$ car
- $a \neq 1$ car $\exp_1(x) = \quad = \quad$. C'est donc une fonction $\quad$, elle a donc des propriétés différentes des autres fonctions exponentielles.

Bases privilégiéesLes calculatrices sont munies des touches exponentielles $10^x = \exp_{10}$ et $e^x = \exp_e$.Le nombre e (pour Euler¹), est un nombre très utilisé en mathématiques, au même titre que π .

$$e \approx 2,71828183$$

Une des propriétés remarquable de $f(x) = e^x$ est qu'elle est la seule fonction à être sa propre dérivée.

$$(e^x)' = e^x$$

Exemples : Calculer à l'aide de la calculatrice :

a) $e^3 \approx$

b) $\sqrt{e} \approx$

c) $\sqrt[10]{e^3} \approx$

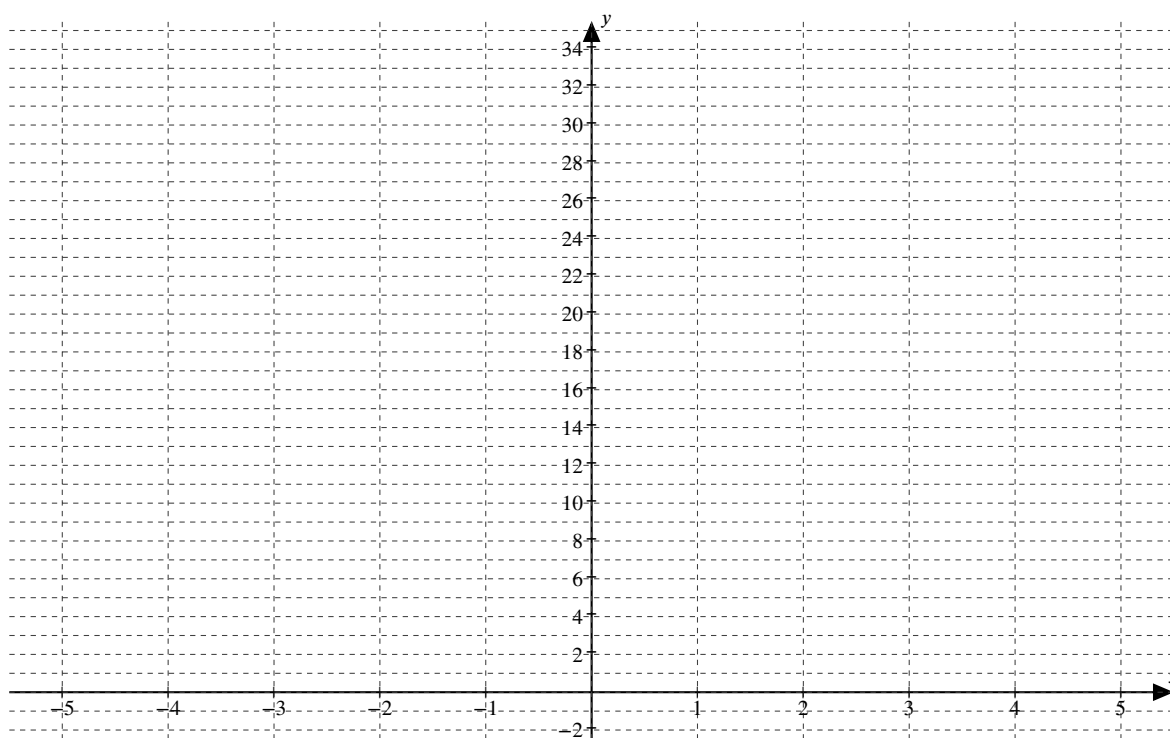
1. Léonard Euler, mathématicien suisse (1707-1783)

1.2 Fonctions exponentielles

Représenter les graphes des fonctions $\exp_2$ et $\exp_{1/2}$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\exp_2(x) = 2^x$									

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\exp_{1/2}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$									



Propriétés :

- La fonction exponentielle $f(x) = \exp_a(x) = a^x$ est définie pour tout nombre réel x , donc $D_f = \mathbb{R}$.
- Son ordonnée à l'origine est toujours 1 car
- Elle n'a pas de zéros car
- Son tableau des signes est :
- Elle est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.

Ajouter le graphe de la fonction $h(x) = x^2$ sur le graphique ci-dessus et comparer les graphes.

1.3 Propriétés algébriques des exponentielles

Propriétés :

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$(i) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(iv) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(ii) \quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$(v) \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(iii) \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Rappel : Si $x \neq 1$, $(a+b)^x \neq a^x + b^x$ $(a-b)^x \neq a^x - b^x$ et $k(a+b)^x \neq (ka+kb)^x$

Exemples :

$$a) \quad (3^x)^{x+1} =$$

$$b) \quad \frac{7^3}{7^x} =$$

$$c) \quad 3 \cdot \frac{12^{x-1}}{4^{x-1}} =$$

1.4 Équations exponentielles

Une **équation exponentielle** est une équation dans laquelle la variable apparaît en exposant. Pour la résoudre, on utilise la propriété :

$$\boxed{a^x = a^y \iff x = y}$$

Exemples : Résoudre les équations :

$$a) \quad 5^x = \frac{1}{25}$$

$$c) \quad 2^{4x^2-1} - \sqrt{2} = 0$$

$$b) \quad 3^x = 9^{x-1}$$

$$d) \quad 4 \cdot 2^x - 8 \cdot 4^{x+3} = 0$$

Nous verrons dans les prochains chapitres qu'il n'est pas possible de résoudre toutes les équations exponentielles de cette manière-là.

1.5 Logarithmes

Certaines équations exponentielles "simples" peuvent être résolues de tête mais d'autres non :

a) $10^x = 1'000'000$

b) $10^x = 2$

Il y a longtemps, les solutions de telles équations étaient listées dans des livres appelés "tables logarithmiques". Maintenant, la calculatrice nous permet de les trouver rapidement grâce aux touches **LOG** et **LN**.

Exemples : Les solutions des équations ci-dessus se trouvent en calculant :

a) $\log(1'000'000) =$

b) $\log(2) =$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle **logarithme en base a** la fonction réciproque de la fonction $\exp_a$, notée :

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

On a donc :

$$\begin{array}{ccc}
 & \exp_a & \\
 & \downarrow & \\
 x & & a^x \\
 \log_a(y) & & y \\
 & \uparrow & \\
 & \log_a & \\
 \boxed{x = \log_a(y) \iff a^x = y} & &
 \end{array}$$

En d'autres termes, calculer $\log_a(y)$ c'est se demander $y = a^?$.

Exemples : Compléter :

a) $\log_3(81) =$ car

b) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) =$ car

c) $\log_7(1) =$ car

On note $\log$ au lieu de $\log_{10}$. C'est le **logarithme décimal**.

On note $\ln$ au lieu de $\log_e$. C'est le **logarithme naturel** ou **logarithme népérien**².

Exemples :

a) $\log(0,01) =$

b) $\ln(e^5) =$

². John Néper, mathématicien britannique (1550-1617)

1.6 Propriétés algébriques des logarithmes

Calculer à l'aide de la définition et observer.

a) $\log_7(7^3) =$

b) $\log_7(49) =$

$7^{\log_7(49)} =$

c) $\log_7(1) =$

d) $\log_7(7) =$

e) $\log_3(9) =$

$\log_3(81) =$

f) $\log_3(9 \cdot 81) =$

$\log_3\left(\frac{9}{81}\right) =$

g) $\text{Log}(100) =$

$\text{Log}(100^4) =$

h) $\log_2(32) =$

$\log_2\left(\frac{1}{32}\right) =$

i) $\text{Log}(1'000'000) =$

$\text{Log}(100) =$

j) $\log_{100}(1'000'000) =$

Propriétés : Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in \mathbb{R}$.

(i) $\log_a(a^x) = x$

(v) $a^{\log_a(y)} = y$

(ii) $\log_a(1) = 0$

(vi) $\log_a(a) = 1$

(iii) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(vii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

(iv) $\log_a(x^q) = q \log_a(x)$

(viii) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

(ix) $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\text{Log}(x)}{\text{Log}(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Exemples : Calculer sans calculatrice.

a) $\text{Log}(2) + \text{Log}(5) =$

b) $\text{Log}(300) - \text{Log}(3) =$

La propriété (ix) de la page précédente est appelée **formule de changement de base**. Elle permet de calculer les logarithmes dans n'importe quelle base à l'aide des touches LN et LOG de la calculatrice.

Exemple : À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approximative de $\log_2(5)$.

Les propriétés des logarithmes se déduisent des propriétés des exponentielles.

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'un produit est la somme des exposants.
 $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ exprime la même propriété.
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'un quotient est la différence des exposants.
 $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ exprime la même propriété.
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'une puissance de puissance est le produit des exposants.
 $\log_a(x^q) = q \log_a(x)$ exprime la même propriété.

Attention aux fausses propriétés ! Comparer $\text{Log}(1000)$ et $\text{Log}(100)$ avec $\text{Log}(1000+100)$ et $\text{Log}(1000-100)$.

1.7 Retour sur les équations exponentielles

À l'aide des logarithmes, nous sommes maintenant en mesure de résoudre toutes les équations exponentielles.

Exemple : Résoudre $8 \cdot 10^{3x+1} + 7 = 167$.

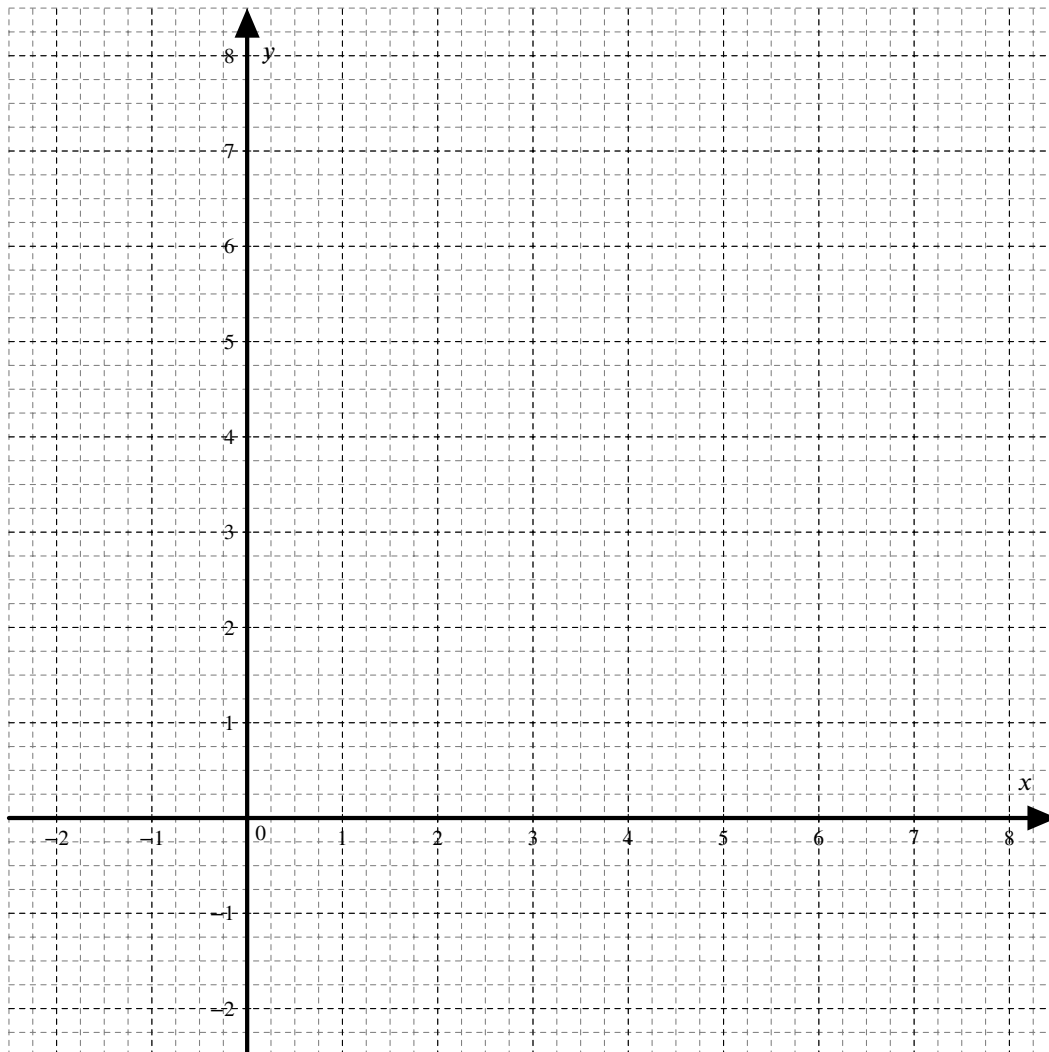
(Pour résoudre ce genre d'équation, il est vivement conseillé **d'isoler l'exponentielle** avant d'appliquer le $\log_a$.)

1.8 Fonctions logarithmes

Représenter les graphes des fonctions $\exp_2$ et $\log_2$.

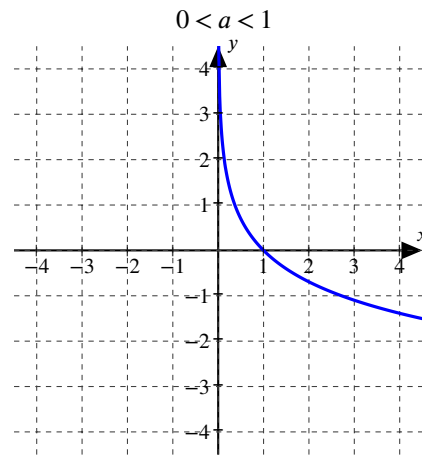
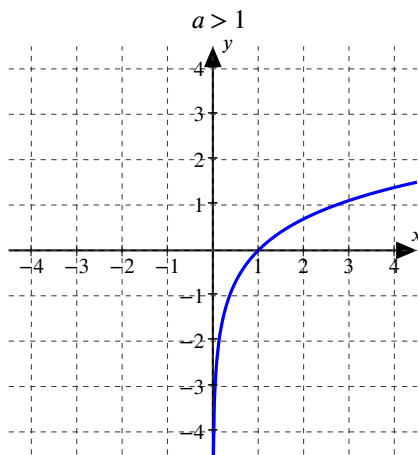
x	-2	-1	0	1	2	3
$\exp_2(x)$						

x	-1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\log_2(x)$													



- Comparer les deux graphes.
- Quel est l'ensemble de définition de la fonction $\log_a$? Pourquoi?
- Quel est le zéro de la fonction $\log_a$? Pourquoi?

- La fonction logarithme $\log_a$ est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.



- Son tableau des signes est :

1.9 Équations logarithmiques

Une **équation logarithmique** est une équation dans laquelle la variable apparaît dans un logarithme.

Exemples : Résoudre les équations :

a) $\ln(5+x) = 3$

b) $3\log_8(x) - 2 = 0$

Il ne faut pas oublier de contrôler que les réponses obtenues ne posent pas de problème dans l'équation de départ.

2 Mathématiques financières

2.1 Processus de croissance et de décroissance

On dit qu'une quantité Q **croît de façon exponentielle**, si elle est multipliée par un facteur a à chaque intervalle de temps T .

On appellera :

- Q_0 la quantité initiale
- $Q(t)$ la quantité à la fin du temps t

Pour trouver combien de fois la quantité Q_0 a été multipliée par a durant le temps t , il faut diviser t par T .

On a donc :

$$Q(t) = Q_0 \cdot a^{\frac{t}{T}}$$

Exemple : On a observé expérimentalement que le nombre de bactéries dans une culture double toutes les 30 minutes. Au départ, il y a 100 bactéries.

- Quel est le nombre de bactéries après 5h30 ?
- Quel est le nombre de bactéries après t heures ?
- Au bout de combien de minutes le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?

Au lieu de donner le facteur a , on indique parfois le pourcentage d'augmentation ou de diminution (décroissance).

Si i est le **taux d'augmentation**, on a $Q(t) = Q_0 \cdot (1+i)^{\frac{t}{T}}$.

Si i est le **taux de décroissance**, on a $Q(t) = Q_0 \cdot (1-i)^{\frac{t}{T}}$.

Exemples :

- a) En 1867, les USA ont acheté l'Alaska à la Russie pour la somme de CHF 7'200'000. En supposant que la valeur du terrain augmente régulièrement de 3% par an, quelle aurait été sa valeur en 2018 ?

Que représente l'augmentation totale en % du prix de départ ?

- b) Que vaut ma voiture que j'ai achetée CHF 30'000.– il y a 5 ans, s'il on compte qu'elle perd 15% de sa valeur chaque année ?

Quand ne vaudra-t-elle plus que CHF 5'000.– ?

Avec ce taux de dévaluation, quelle est la valeur d'achat d'un véhicule qui vaut CHF 20'000.– après 5 ans ?

Quel est le taux de dévaluation si la valeur est passée de 30'000.– à CHF 20'000.– en 3 ans ?

2.2 Annuité, prêts et rentes

On appelle **rente à termes constants** une suite de versements égaux, effectués à intervalle de temps régulier, pour constituer un capital ou rembourser un emprunt.

Ces versements sont appelés **les termes de la rente**.

Le temps entre chaque versement est appelé la **période de la rente**.

Des **annuités** sont des termes annuels et des **mensualités** des termes mensuels.

Si la rente est payable, en fin de période, elle est dite **postnumerando**.

Si la rente est payable, en début de période, elle est dite **praenumerando**.

Modèle 1 : Un capital est constitué par le versement de 4 annuités de CHF 500.– versées au début de chaque année. Les sommes sont bloquées et rémunérées au taux annuel de 3%.

De quel type de rente s'agit-il ? Chaque versement rapporte-t-il le même intérêt ? Quel sera le montant final du capital ?

	montant	nb d'années sur le compte	intérêt produit	valeur finale
1e annuité				
2e annuité				
3e annuité				
4e annuité				

On constate que :

- La première annuité a été multipliée par $(1+i)^4$.
- La deuxième annuité a été multipliée par $(1+i)^3$.
- La troisième annuité a été multipliée par $(1+i)^2$.
- La quatrième annuité a été multipliée par $(1+i)$.
- Si on appelle a la valeur de chaque annuité, la valeur finale du capital après 4 ans est :

$$VC_d(4) = a \cdot ((1+i)^4 + (1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i))$$

Ainsi, pour n années : $VC_d(n) = a \cdot ((1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \dots + (1+i))$

$$= a \cdot (1+i) \cdot ((1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1)$$

Or il existe une formule mathématique qui dit que :

$$x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1 = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$$

Donc en prenant $k = n - 1$ et $x = 1 + i$, on obtient :

$$VC_d(n) = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = a \cdot \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{\frac{i}{1+i}}$$

où

- a est le montant de chaque terme de la rente ;
- n le nombre de termes de la rente ;
- i le taux d'intérêts par période ;
- $VC_d(n)$ la **valeur cumulée** de la **rente praenumerando**, c'est-à-dire une rente dont les termes doivent être versés au début de chaque intervalle de temps.

Exemple : Répondre à la dernière question du modèle 1 à l'aide de la formule.

Pour le modèle 1, combien aurais-je dû mettre en une fois sur un compte, au même taux d'intérêts, pour obtenir la même somme à la fin ?

On cherche $VA_D(n)$ tel que : $VA(n)(1+i)^n = VC_d(n) = a \frac{(1+i)^n - 1}{\frac{i}{1+i}}$

$VA_d(n)$ est appelé la **valeur actuelle** de la **rente praenumerando**.

$$\text{Donc } VA_d(n) = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{\frac{i}{1+i}(1+i)^n} = a \cdot \frac{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} - \frac{1}{(1+i)^n}}{\frac{i}{1+i}} = a \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{\frac{i}{1+i}}$$

Donc

$$VA_d(n) = \frac{VC_d(n)}{(1+i)^n} = a \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{\frac{i}{1+i}} = a \cdot \frac{1 - v^n}{i \cdot v}$$

où

- a est le montant de chaque terme de la rente ;
- n le nombre de termes de la rente ;
- i le taux d'intérêts par période ;
- $v = \frac{1}{1+i}$.

Exemple : Répondre à la question du haut de la page à l'aide de la formule.

Modèle 2 : Un capital est constitué par le versement de 4 annuités de CHF 500.– versées à la fin de chaque année. Les sommes sont bloquées et rémunérées au taux annuel de 3%.

De quel type de rente s'agit-il ? Quel sera le montant final du capital ?

	montant	nb d'années sur le compte	intérêt produit	valeur finale
1e annuité				
2e annuité				
3e annuité				
4e annuité				

On constate que :

$$VC_f(n) = a \cdot ((1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1)$$

Donc

$$VC_f(n) = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

où

- a est le montant de chaque terme de la rente ;
- n le nombre de termes de la rente ;
- i le taux d'intérêts par période ;
- $VC_f(n)$ la **valeur cumulée** de la **rente postnumerando**, c'est-à-dire une rente dont les termes doivent être versés à la fin de chaque intervalle de temps.

Exemple : Refaire le calcul de l'exemple précédent à l'aide de la formule.

Modèle 3 : Une banque me prête aujourd'hui de l'argent à un taux de 5% par an. Je la rembourserai par quatre versements de CHF 2'500.– par an, le premier versement étant dans une année.

Je vais donc rembourser un total de CHF 10'000.– à la banque. Mais le montant qu'elle me donne aujourd'hui est inférieur, car dans ces CHF 10'000.– sont comptés les intérêts de la dette. Les intérêts de l'année sont calculés en fonction de ce qu'il reste à rembourser.

Pour calculer la valeur du prêt accordé par cette banque, il faut utiliser la formule ci-dessous :

La **valeur actuelle**, $VA_f(n)$, d'un **rente postnumerando** se calcule de la manière suivante :

$$VA_f(n) = \frac{VC_f(n)}{(1+i)^n} = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = a \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

où

- a est le montant de chaque terme de la rente ;
- n le nombre de termes de la rente ;
- i le taux d'intérêts par période ;
- $v = \frac{1}{1+i}$.

Calculer le montant du modèle 3 à l'aide de cette formule et remplir le tableau ci-dessous pour vérifier cette réponse.

	montant dû au début de l'année	intérêts de l'année	montant dû avec intérêts	montant dû après versement
1e année				
2e année				
3e année				
4e année				

3 Exercices

3.1 Exponentielles et logarithmes

Exponentielles

Exercice 1.1 Je plie une feuille de 0,1 mm d'épaisseur en deux, puis je replie en deux, et je continue de la même manière.

a) Compléter le tableau ci-dessous :

n° de l'étape	nb de couches de papier	épaisseur totale en mm
0	1	0,1
1		
2		
3		
4		
x		

b) Combien de fois faut-il plier pour dépasser 1 km d'épaisseur ?

Exercice 1.2 Donner l'expression de la fonction.

a) $\exp_3(x) =$

c) $\exp_{1/3}(-x) =$

b) $\exp_x(3) =$

d) $\exp(x) =$

Est-ce que toutes les fonctions ci-dessus sont des fonctions exponentielles ?

Exercice 1.3 Calculer sans calculatrice.

a) $\exp_{15}(2) =$

h) $\exp(-5) =$

p) $\exp_{1/2}(2) =$

b) $\exp_7(-2) =$

i) $\exp_{4/5}(-1) =$

q) $\exp_2\left(\frac{1}{2}\right) =$

c) $\exp_2(-7) =$

j) $\exp_{100'000}(0,2) =$

r) $\exp_{1/2}(-2) =$

d) $\exp_{27}\left(\frac{1}{3}\right) =$

k) $\exp_{1/100'000}(0,2) =$

s) $\exp_2\left(-\frac{1}{2}\right) =$

e) $\exp_{16}\left(-\frac{1}{4}\right) =$

l) $\exp_{100'000}(-0,2) =$

t) $\exp_{36/49}\left(-\frac{1}{2}\right) =$

f) $\exp_{10}(2) =$

m) $\exp_{1/100'000}(-0,2) =$

n) $\exp(1) =$

g) $\exp_2(10) =$

o) $\exp(0) =$

u) $\exp_7\left(\frac{1}{3}\right) =$

Exercice 1.4 Compléter le tableau de valeurs, sans utiliser de calculatrice.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$\exp_{100}(x)$									

Exercice 1.5 Compléter le tableau de valeurs, sans utiliser de calculatrice.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$
$\exp_{1/64}(x)$									

Propriétés algébriques des exponentielles

Exercice 1.6 Remplacer les "... " par un nombre entier ou une fraction irréductible.

a) $2^5 \cdot 8^3 = 2^{\dots}$

d) $\frac{3^5 \cdot 3^4}{3^{-6}} \cdot 3^{-3} = 3^{\dots}$

g) $\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[5]{3^4}} = 3^{\dots}$

b) $3^5 \cdot \frac{1}{3^3} = 3^{\dots}$

e) $(\sqrt[3]{5})^2 = 5^{\dots}$

h) $(\sqrt{7^3})^5 \cdot \sqrt{7} = 7^{\dots}$

c) $(3^3)^2 = 9^{\dots}$

f) $\sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt{4^3} = 4^{\dots}$

i) $\frac{\sqrt[4]{7^2}}{7^3} \sqrt[3]{7^4} = 7^{\dots}$

Exercice 1.7 Simplifier les expressions suivantes.

a) $9 \cdot 3^{4x-2} =$

c) $\frac{32^x \cdot 2^5}{16^{x+1}} =$

e) $\frac{1}{49} (7^{x+1})^x =$

b) $\frac{5^{2x+7}}{5^{x-3}} =$

d) $\frac{2^x + 6^x}{2^x} =$

f) $(3^x \cdot 3)^2 \cdot 3^{4x-2} =$

Exercice 1.8 Écrire sous la forme $k \cdot a^{bx}$ avec a, b et $c \in \mathbb{Z}$. a doit être positif et le plus petit possible.

a) $\exp_2(x) \cdot \exp_5(x) =$

e) $\exp_4(x+1) \cdot \exp_4(x+1) =$

b) $\exp_2(x) \cdot \exp_2(3x+5) =$

f) $(\exp_3(5x-1))^2 =$

c) $\frac{\exp_5(4x+1)}{\exp_5(5-x)} =$

g) $\left(\frac{\exp_9(1+x)}{3}\right)^2 =$

d) $\exp_4(x+1) \cdot \exp_3(x+1) =$

h) $\exp_4(x+1) + \exp_4(x+1) =$

Exercice 1.9 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Compléter les expressions suivantes.

a) $\frac{a^x}{a^3} = a^{(\dots)} = \frac{1}{a^{(\dots)}}$

e) $\frac{a^x}{a^{x+3}} = a^{(\dots)}$

b) $\frac{a}{\sqrt[5]{a^x}} = a^{(\dots)}$

f) $a^{2x} \cdot (a^x)^{x+3} = a^{(\dots)}$

c) $\sqrt{a} \cdot a^{x+2} = a^{(\dots)}$

g) $\left(\frac{a^{x+1}}{a^2}\right)^{x-4} = a^{(\dots)}$

d) $(a^{2x+1})^{2x+1} = a^{(\dots)}$

h) $(a-3)^x \cdot (a+3)^x = (\dots)^x$

Équations exponentielles

Exercice 1.10 Résoudre.

a) $25^{x+3} = 625$

f) $(10^{x+5})^2 = 0,001$

k) $5^{2x+4} - 125^x = 0$

b) $13^{3x-6} = 1$

g) $(2^{x-1})^x - 4 = 0$

l) $4^{3x} \cdot 16^{2x} = \sqrt{2}$

c) $2^{5x-2} = 4^{8-x}$

h) $3^{x-1} + 27 = 0$

m) $(5^{x-1})^x - 125^x = 0$

d) $\frac{6^{4-x}}{3^{4-x}} = 1024$

i) $\frac{11^{2x}}{121^x} = 1$

n) $2^{3x-2} \cdot 5^{3x-2} = 10'000$

e) $\frac{9^{3+x}}{3^x} = 0$

j) $\frac{7^{4x+5}}{49^{x-9}} = 7$

o) $6^{3x-2} - 6^{3x-4} = 0$

Logarithmes

Exercice 1.11 Calculer sans calculatrice.

a) $\log_2(64) =$

c) $\log_{11}(121) =$

e) $\log_9(3) =$

b) $\log_5(625) =$

d) $\log_7(1) =$

f) $\log_2(0,5) =$

Exercice 1.12 Calculer sans calculatrice.

a) $\text{Log}(1'000'000) =$

c) $\text{Log}(1) =$

e) $\text{Log}(\sqrt{10}) =$

g) $\text{Log}(10) =$

b) $\text{Log}(0,01) =$

d) $\text{Log}\left(\frac{1}{1000}\right) =$

f) $\text{Log}(\sqrt[5]{1000}) =$

h) $\text{Log}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right) =$

Exercice 1.13 Calculer sans calculatrice.

a) $\ln(e^2) =$

c) $\ln(\sqrt[4]{e}) =$

e) $\ln(1) =$

b) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) =$

d) $\ln(e) =$

f) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^7}}\right) =$

Exercice 1.14 Calculer sans calculatrice.

a) $\log_2(8) =$

c) $\log_5(-5) =$

e) $\log_4(8) =$

b) $\log_8(2) =$

d) $\log_{64}(4) =$

f) $\log_{625}(125) =$

Propriétés algébriques des logarithmes

Exercice 1.15 Calculer sans calculatrice.

a) $\log_2(40) + \log_2(3) - \log_2(15) =$

c) $3\log_{25}(40) - \log_{25}(64) - \log_{25}(8) =$

b) $\text{Log}(14) - \text{Log}(2000) - \text{Log}(70) =$

d) $4\log_3(10) - 2\log_3(8100) =$

Exercice 1.16 À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approximative.

a) $\log_2(40) \approx$

b) $\log_{40}(2) \approx$

c) $\text{Log}(70) \approx$

d) $\ln(3) \approx$

Retour sur les équations exponentielles

Exercice 1.17 Résoudre en donnant la réponse sous forme exacte.

a) $17^x + 1 = 10$

d) $4 \cdot e^{5x-2} = 1$

g) $5^{x+8} = 3 \cdot 5^{2x}$

b) $17^{x+1} = 10$

e) $5 \cdot 2^{3x+1} - 3 = 167$

h) $7^{3x} = \frac{7^{x+1}}{8}$

c) $7 + 10^{3x-6} = 9$

f) $7 \cdot e^{3-x} = e^5$

i) $3 = 5^{x^2+2}$

Exercice 1.18 Résoudre en donnant la réponse sous forme exacte puis au centième près.

a) $5 \cdot (1+x)^3 = 1000$

d) $5 \cdot (1+0,2)^3 = x$

g) $7 \cdot (1+x)^4 = 300$

b) $x \cdot (1+0,2)^3 = 1000$

e) $5 \cdot (1+0,2)^{3/x} = 1000$

h) $7 \cdot (1+0,5)^{4x} = 300$

c) $5 \cdot (1+0,2)^x = 1000$

f) $5 \cdot (1+0,2)^{x/3} = 1000$

i) $7 \cdot (1+0,5)^{x/4} = 300$

Équations logarithmiques**Exercice 1.19** Résoudre.

a) $\ln(2x+1) = 5$

c) $3\log_{64}(x+1) = -1$

b) $2\log_{25}(x) - 3 = 0$

d) $\log_7(2x) = 0$

Exercice 1.20 Résoudre.

a) $\text{Log}(x-4) = \text{Log}(10-x)$

c) $2\text{Log}(x-3) = \text{Log}(25-6x)$

b) $\log_2(x-4) = \log_2(2-x)$

d) $\ln(x^2+3) = \ln(4x)$

Exercice 1.21 Résoudre.

a) $\text{Log}(x-3) + \text{Log}(x) = 1$

c) $\log_3(x+10) - \log_3(x) = 1$

b) $\log_2(5-x) + \log_2(x+5) = 4$

d) $\log_3(x-10) - \log_3(x) = 1$

3.2 Mathématiques financières**Processus de croissance et de décroissance****Exercice 2.1** Au début d'une épidémie, on a constaté que le nombre de malades triple toutes les 5 heures.a) Comment calcule-t-on le nombre de malades t heures après l'apparition du premier ?

b) Au bout de combien de temps dépasse-t-on le millier de malades ?

Exercice 2.2 En 1980, les banques proposaient des comptes-épargnes pour les jeunes avec un taux d'intérêts annuel fixe 5%.

a) Mes parents ont déposé CHF 2000.– sur un tel compte à ma naissance et n'y ont plus touché. Quelle somme vais-je pouvoir retirer à mes 20 ans ?

b) Au bout de combien d'années la somme sur le compte a-t-elle dépassé le double de la somme de départ ?

c) Avec ce taux d'intérêts, quelle somme auraient-ils dû déposer pour que je puisse retirer CHF 10'000.– ?

d) Pour ce versement de CHF 2000.–, quel taux d'intérêts aurait-il fallu pour que je puisse retirer CHF 10'000.– à mes 20 ans ?

e) Si je fais la même chose pour mon enfant avec le taux d'intérêts actuel de 0,5%, quelle somme aura-t-il à ses 20 ans ?

Exercice 2.3 On étudie la propagation d'une rumeur sur les réseaux sociaux. On constate qu'il y a plusieurs phases. Tout d'abord, le nombre de personnes ayant partagé l'information double toutes les 6 minutes, jusqu'à atteindre 1'000'000 de partages. Ensuite, il faut 4 heures pour passer à 2'000'000 de partages. Finalement, la croissance continue encore lentement pendant des dizaines d'années.

- Combien de temps dure la première phase ?
- Si la deuxième phase est aussi une croissance exponentielle, quel est le taux de croissance par heure, en % ?

Exercice 2.4 Si la population des insectes décroît de 1% chaque année, en combien de temps aura-t-elle diminué de moitié ?

Exercice 2.5 Une firme d'informatique vient d'acquérir de nouveaux ordinateurs au coût de CHF 400'000.– et ces équipements se déprécient de 20% par année. Après combien d'années ces équipements ne vaudront-ils plus que le quart de leur valeur initiale.

Annuité, prêts et rentes

Exercice 2.6

- Durant cinq ans, une particulier verse chaque début d'année CHF 1'500.– sur un placement de rendement fixé à 3%. Quel est son avoir à la fin de la cinquième année ?
- Quel versement unique aurait-il dû faire pour obtenir le même avoir ?

Exercice 2.7 Une fondation veut placer une somme, sur un compte à intérêt annuel fixé à 6%, permettant de financer une rente annuelle de CHF 3500.– pendant 10 ans pour un orphelin. Combien doit-elle verser ?

Exercice 2.8 Compléter le tableau suivant pour une rente praenumerando.

valeur initiale	terme en CHF	taux en %	durée en années	valeur finale
	50	2 1/2	8	
1'116,77		5	12	
		3 1/2	10	7'892,30
21'453,30	1400	3		
	60	3		473,54

Exercice 2.9 Pour améliorer sa pension de retraite, M. Jean se constitue un capital en versant chaque année CHF 5'000 et cela pendant 15 ans. Les sommes sont bloquées et rémunérées au taux annuel de 6,5%. De quelle somme disposera-t-il au moment du dernier versement ?

Exercice 2.10 Compléter le tableau suivant pour une rente postnumerando.

valeur initiale	terme en CHF	taux en %	durée en années	valeur finale
	100	3 1/2	8	
386,09		5	10	
		3	20	16'659,63
788,72	110	2 1/2		
	80	4		846,62

Exercice 2.11 Pour acheter une voiture, on paie une partie comptant et une partie à crédit. On rembourse CHF 1'460,23 par mois pendant 18 mois, le premier versement intervenant 1 mois après l'achat. Calculer la valeur actuelle de ces 18 mensualités si le taux mensuel est de 0,975%.

Exercice 2.12 Quel montant un particulier doit-il déposer chaque fin d'année sur un compte à 3 3/4 % afin d'obtenir au bout de neuf années le même montant

- a) que s'il avait déposé aujourd'hui CHF 40'000.– sur le même compte ?
- b) que s'il avait déposé, il y a neuf ans, CHF 40'000.– sur le même compte ?

Exercice 2.13 À la fin de chaque trimestre, un particulier dépose CHF 400.– sur un compte à intérêt composé au taux annuel de 6%. De quel montant disposera-t-il après cinq ans ?

Exercice 2.14 À la fin de chaque semestre, on dépose CHF 1'000.– sur un compte au taux d'intérêt annuel de 6%. Dans combien de temps aura-t-on cumulé plus de CHF 10'000.– ?

4 Solutions

4.1 Solutions - Exponentielles et logarithmes

1.1

n° de l'étape	nb de couches de papier	épaisseur totale en mm
0	1	0,1
1	2	0,2
2	4	0,4
3	8	0,8
4	16	1,6
x	2^x	$0,1 \cdot 2^x$

Il faut plier 24 fois pour dépasser 1'000'000 mm d'épaisseur.

1.2

a) 3^x

b) x^3

c) 3^x

d) e^x

x^3 n'est pas une fonction exponentielle.

1.3

a) 225

d) 3

g) 1024

j) 10

m) 10

p) $\frac{1}{4}$

s) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{49}$

e) $\frac{1}{2}$

h) $\frac{1}{e^5}$

k) $\frac{1}{10}$

n) e

q) $\sqrt{2}$

t) $\frac{7}{6}$

c) $\frac{1}{128}$

f) 100

i) $\frac{5}{4}$

l) $\frac{1}{10}$

o) 1

r) 4

u) $\sqrt[3]{7}$

1.4

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$\exp_{100}(x)$	$\frac{1}{10'000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000	10'000

1.5

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$
$\exp_{1/64}(x)$	64	8	4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$

1.6

a) 14

d) 12

g) $-\frac{1}{20}$

b) 2

e) $\frac{2}{3}$

h) 8

c) 3

f) $\frac{13}{6}$

i) $-\frac{7}{6}$

1.7

a) $3^{4x} = 81^x$

c) 2^{x+1}

e) 7^{x^2+x-2}

b) 5^{x+10}

d) $1+3^x$

f) 3^{6x}

1.8

a) 10^x

c) $\frac{1}{625}5^{5x}$

e) $16 \cdot 2^{4x}$

g) $9 \cdot 3^{4x}$

b) $32 \cdot 2^{4x}$

d) $12 \cdot 12^x$

f) $\frac{1}{9}3^{10x}$

h) $8 \cdot 2^{2x}$

1.9

a) $\frac{a^x}{a^3} = a^{(x-3)} = \frac{1}{a^{(3-x)}}$

c) $\sqrt{a} \cdot a^{x+2} = a^{(x+5/2)}$

f) $a^{2x} \cdot (a^x)^{x+3} = a^{(x^2+5x)}$

d) $(a^{2x+1})^{2x+1} = a^{(4x^2+4x+1)}$

g) $\left(\frac{a^{x+1}}{a^2}\right)^{x-4} = a^{(x^2-5x+4)}$

b) $\frac{a}{\sqrt[5]{a^x}} = a^{(\frac{5-x}{5})}$

e) $\frac{a^x}{a^{x+3}} = a^{(-3)}$

h) $(a-3)^x \cdot (a+3)^x = (a^2-9)^x$

1.10

a) $\mathcal{S} = \{-1\}$

d) $\mathcal{S} = \{-6\}$

g) $\mathcal{S} = \{-1; 2\}$

j) $\mathcal{S} = \{-11\}$

m) $\mathcal{S} = \{0; 4\}$

b) $\mathcal{S} = \{2\}$

e) $\mathcal{S} = \emptyset$

h) $\mathcal{S} = \emptyset$

k) $\mathcal{S} = \{4\}$

n) $\mathcal{S} = \{2\}$

c) $\mathcal{S} = \{\frac{18}{7}\}$

f) $\mathcal{S} = \{-\frac{13}{2}\}$

i) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

l) $\mathcal{S} = \{\frac{1}{28}\}$

o) $\mathcal{S} = \emptyset$

1.11

a) 6

b) 4

c) 2

d) 0

e) $\frac{1}{2}$

f) -1

1.12

a) 6

b) -2

c) 0

d) -3

e) $\frac{1}{2}$

f) $\frac{3}{5}$

g) 1

h) $-\frac{2}{3}$

1.13

a) 2

b) -3

c) $\frac{1}{4}$

d) 1

e) 0

f) $-\frac{7}{2}$

1.14

a) 3

b) $\frac{1}{3}$

c) pas défini

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{2}{3}$

f) $\frac{3}{4}$

1.15

a) 3

b) -4

c) $\frac{3}{2}$

d) -8

1.16

a) $\sim 5,32$

b) $\sim 0,19$

c) $\sim 1,85$

d) $\sim 1,10$

1.17

a) $\mathcal{S} = \{\log_{17}(9)\}$

d) $\mathcal{S} = \{\frac{2-\ln(4)}{5}\}$

g) $\mathcal{S} = \{8 - \log_5(3)\}$

b) $\mathcal{S} = \{\log_{17}(10) - 1\}$

e) $\mathcal{S} = \{\frac{\log_2(34) - 1}{3}\}$

h) $\mathcal{S} = \{\frac{1 - \log_7(8)}{2}\}$

c) $\mathcal{S} = \{\frac{\log(2)+6}{3}\}$

f) $\mathcal{S} = \{\ln(7) - 2\}$

i) $\mathcal{S} = \emptyset$

1.18

a) $\mathcal{S} = \{\sqrt[3]{200} - 1\} = \{\sim 4,85\}$

e) $\mathcal{S} = \{\frac{3}{\log_{1,2}(200)}\} = \{\sim 0,10\}$

h) $\mathcal{S} = \{\frac{1}{4} \log_{1,5}(\frac{300}{7})\} = \{\sim 2,32\}$

b) $\mathcal{S} = \{\frac{15'625}{27}\} = \{\sim 578,70\}$

f) $\mathcal{S} = \{\log_{1,2}(8'000'000)\}$

i) $\mathcal{S} = \{4 \log_{1,5}(\frac{300}{7})\} = \{\sim 37,07\}$

c) $\mathcal{S} = \{\log_{1,2}(200)\} = \{\sim 29,06\}$

g) $\mathcal{S} = \{\sim 87,18\}$

d) $\mathcal{S} = \{\frac{216}{25}\} = \{8,64\}$

g) $\mathcal{S} = \{\sqrt[4]{\frac{300}{7}} - 1\} = \{\sim 1,56\}$

1.19

a) $\mathcal{S} = \{\frac{e^5-1}{2}\}$

b) $\mathcal{S} = \{125\}$

c) $\mathcal{S} = \{-\frac{3}{4}\}$

d) $\mathcal{S} = \{\frac{1}{2}\}$

1.20

a) $\mathcal{S} = \{7\}$

c) $\mathcal{S} = \{4\}$ (-4 doit être éliminé)

b) $\mathcal{S} = \emptyset$ (3 doit être éliminé)

d) $\mathcal{S} = \{1; 3\}$

- 1.21** a) $\mathcal{S} = \{5\}$ (-2 doit être éliminé) c) $\mathcal{S} = \{5\}$
 b) $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$ d) $\mathcal{S} = \emptyset$ (-5 doit être éliminé)

4.2 Solutions - Mathématiques financières

- 2.1** a) $3^{t/5}$ b) $t \approx 31,4$ heures = 31 h 26 min

- 2.2** a) $2000 \cdot 1,05^{20}$ CHF 5306,60 c) $C_0 \cdot 1,05^{20} = 10'000$
 $C_0 = \frac{10'000}{1,05^{20}} \approx 3768,89$ CHF 3768,90 d) $2000 \cdot (1+i)^{20} = 10'000$
 $i = \sqrt[20]{5} - 1 \approx 8,38\%$ e) $2000 \cdot 1,005^{20}$ CHF 2209,79

- 2.3** a) $2^{t/6} = 1'000'000$ b) $1'000'000(1+i)^4 = 2'000'000$
 $t = 6 \log_2(1'000'000) \approx 119,6$ minutes $i = \sqrt[4]{2} - 1 \approx 0,189 = 18,9\%$ par heure
 environ 2 heures $1'000'000(1+i)^{120} = 2'000'000$
 $i = \sqrt[120]{2} - 1 \approx 0,0058 = 0,58\%$ par minute

- 2.4** $(0,99)^n = \frac{1}{2}$ $n = \log_{0,99}(0,5) \approx 68,97$ en 69 ans environ

- 2.5** $(0,8)^n = \frac{1}{4}$ $n = \log_{0,8}(0,25) \approx 6,21$ en approximativement 6 ans.

- 2.6** a) $VC_d(5) = 1500 \frac{(1,03)^5 - 1}{0,03} = \text{CHF } 8'202,61$
 b) $VA_d(5) = \frac{8'202,61}{(1,03)^5}$ ou $VA_d(5) = 1500 \frac{1 - \frac{1}{(1,03)^5}}{0,03} = \text{CHF } 7'075,65$

- 2.7** $VA_d(10) = 3500 \frac{1 - \frac{1}{(1,06)^{10}}}{0,06} = \text{CHF } 27'305,92$

2.8

valeur initiale	terme en CHF	taux en %	durée en années	valeur finale
367,47	50	2 1/2	8	447,73
1'116,77	120	5	12	2005,56
5595	650	3 1/2	10	7'892,30
21'453,30	1400	3	20	38'747,08
385,03	60	3	7	473,54

- 2.9** $VC_d(15) = 5000 \frac{(1,065)^{15} - 1}{0,065} = \text{CHF } 120'910,84$

2.10

valeur initiale	terme en CHF	taux en %	durée en années	valeur finale
687,40	100	3 1/2	8	905,17
386,09	50	5	10	628,90
9224,03	620	3	20	16'659,63
788,72	110	2 1/2	8	960,97
594,83	80	4	9	846,62

2.11

$$VA_f(18) = 1460,23 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1,00975)^{18}}}{0,00975} = \text{CHF } 24'000.-$$

2.12

$$\begin{aligned} \text{a) } VA_f(9) &= 40'000 = a \cdot \frac{(1,0375)^9 - 1}{0,0375 \cdot (1,0375)^9} \\ \Rightarrow a &= \text{CHF } 5'318,61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } VA_f(9) &= a \cdot \frac{(1,0375)^9 - 1}{0,0375 \cdot (1,0375)^9} = 40'000 \cdot (1,0375)^9 \\ \Leftrightarrow a \cdot 7,52 &= 55'712,54 \Rightarrow a = \text{CHF } 7'407,83 \end{aligned}$$

2.13

$$i_4 = \sqrt[4]{1,06} - 1 \approx 0,01467$$

$$VC_f(20) = 400 \cdot \frac{(1,01467)^{20} - 1}{0,01467} = \text{CHF } 9'219,82$$

2.14

$$i_2 = \sqrt{1,06} - 1 = 0,029563$$

$$1000 \cdot \frac{(1,029563)^n - 1}{0,029563} = 10'000$$

$$\begin{aligned} n &\approx 8,9 = 9 \text{ semestres} \\ &= 2 \text{ ans et 1 semestre} \end{aligned}$$

Références

- [1] S. Amaudruz : Cours et exercices. Gymnase de Bugon.
- [2] H. Bovet : Diplôme 2D. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2008.
- [3] H. Bovet : Diplôme 3D. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2008.
- [4] C.-A. Chevalley : Calculs pour l'économie. DFJC Vaud, 2009.
- [5] J.-P. Favre : Mathématiques pour la Matu pro. Promath Editions, 2019.
- [6] M.-A. Jaquemet et N. Lakehal : Cours et exercices. Gymnase de Beaulieu.
- [7] J.-P. Javet : Cours et exercices. Gymnase de Morges.
- [8] J.-P. Javet : Analyse mathématiques 3EC. <http://www.gymomath.ch>, 2020.
- [9] J.-P. Javet : Mathématiques 3EC. <http://www.gymomath.ch>, 2020.
- [10] O. Kruger et A. Schenkel : Cours et exercices. Gymnase de Beaulieu et du Bugon.
- [11] Laroche : Cours et exercices de statistiques de 1L.
- [12] K. Studer et P. Frommenwiler : Mathématiques pour la maturité. Algèbre et analyse de données. Cornelsen Schweiz, 2014.
- [13] M. Tissot-Daguette : Cours et exercices. Gymnase d'Yverdon.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch

sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 19 décembre 2022