3E

Mathématiques et Analyses mathématiques semestre 5

Sarah Delmonico
Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2026-2027

Table des matières

Partie I - Mathématiques

1 Inéquations du premier degré à une inconnue 3
1.1 Généralités . . . 3
1.2 Résolution par voie graphique . . . 4
1.3 Résolution algébrique . . . 5
1.4 Cas particuliers . . . 7
2 Programmation linéaire à deux variables 8
2.1 Inéquations linéaires à deux inconnues . . . 8
2.2 Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues . . . 10
2.3 Introduction à la programmation linéaire à deux variables . . . 14
2.4 Applications . . . 19
3 Statistique descriptive 20
3.1 Introduction . . . 20
3.2 Vocabulaire . . . 21
3.3 Effectifs, fréquences et représentations graphiques . . . 21
3.3.1 Données brutes et tableau de distribution . . . 21
3.3.2 Étude d'une variable qualitative . . . 23
3.3.3 Étude d'une variable quantitative discrète . . . 23
3.3.4 Étude d'une variable quantitative continue (ou discrète avec beaucoup de modalités) . 24
3.4 Mesures de tendance centrale . . . 27
3.4.1 Mode et classe modale . . . 27
3.4.2 Médiane . . . 27
3.4.3 Moyenne . . . 29
3.4.4 Quartiles . . . 31
3.5 Indicateurs de dispersion . . . 32
3.5.1 Étendue . . . 32
3.5.2 Écart interquartile . . . 32
3.5.3 Boîte à moustaches . . . 33
3.5.4 Variance . . . 35
3.5.5 Écart-type . . . 36
3.5.6 La cote Z . . . 37
3.6 Statistique bivariée . . . 39

Partie II - Analyses mathématiques

4 Signe d'une fonction 41
4.1 Introduction . . . 41
4.2 Signe d'un produit . . . 44
4.3 Signe d'une fonction affine . . . 44
4.4 Signe d'une fonction quadratique . . . 46
4.5 Signe d'une fonction polynomiale . . . 48
4.6 Signe de $(g(x))^n$ . . . 49
4.7 Signe d'une fonction rationnelle . . . 51
4.8 Inéquations . . . 52
4.9 Ensemble de définition d'une racine carré . . . 53
5 Dérivées 54
5.1 Définition . . . 54
5.2 Règles de dérivation . . . 57
5.3 Étude de la croissance . . . 61
6 Optimisation 63

Partie III - Exercices et solutions

7 Exercices 64
7.1 Inéquations du premier degré à une inconnue . . . 64
7.2 Programmation linéaire . . . 68
7.3 Statistiques descriptives . . . 75
7.4 Signe d'une fonction . . . 98
7.5 Dérivées . . . 104
7.6 Optimisation . . . 112
8 Solutions 114
8.1 Solutions - Inéquations . . . 114
8.2 Solutions - Programmation linéaire . . . 115
8.3 Solutions - Statistiques . . . 119
8.4 Solutions - Signe d'une fonction . . . 130
8.5 Solutions - Dérivées . . . 134
8.6 Solutions - Optimisation . . . 142

Cette brochure a bénéficié du précieux travail antérieur de plusieurs collègues, notamment Christophe Haton et Marie-Jo Lüthi. Nous tenons à les remercier ainsi que notre collègue Emmanuelle Vlcek pour son travail important de relecture et pour ses commentaires et apports constructifs qui ont permis d'améliorer cette brochure.

1 Inéquations du premier degré à une inconnue

1.1 Généralités

Une **inéquation à une inconnue** est une inégalité entre deux expressions littérales comportant des nombres et une inconnue qui peut être juste ou fausse selon les valeurs attribuées à la variable.

Son écriture se compose de trois parties : le **membre de gauche** de l'inéquation,
le **signe d'inégalité** ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$) et le **membre de droite** de l'inéquation.

Un nombre réel est une **solution** de l'inéquation si elle est vraie lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre.

Exemples : Parmi les valeurs -10, -3, 0 et 10, lesquelles sont solutions des inéquations ci-dessous ?

a) $5x > -15$

b) $x + 9 \geq -2x$

Le vocabulaire utilisé pour les inéquations est exactement le même que celui utilisé pour les équations. Les termes **résoudre** une inéquation, **ensemble de solutions** d'une inéquation et **équivalence** d'inéquations se définissent de manière identique à ce qui a été vu précédemment.

Généralement, une inéquation possède une infinité de solutions. L'ensemble des solutions sera donné par un **intervalle**. On peut le représenter sur la droite des nombres réels.

Exemples : Compléter le tableau ci-dessous :

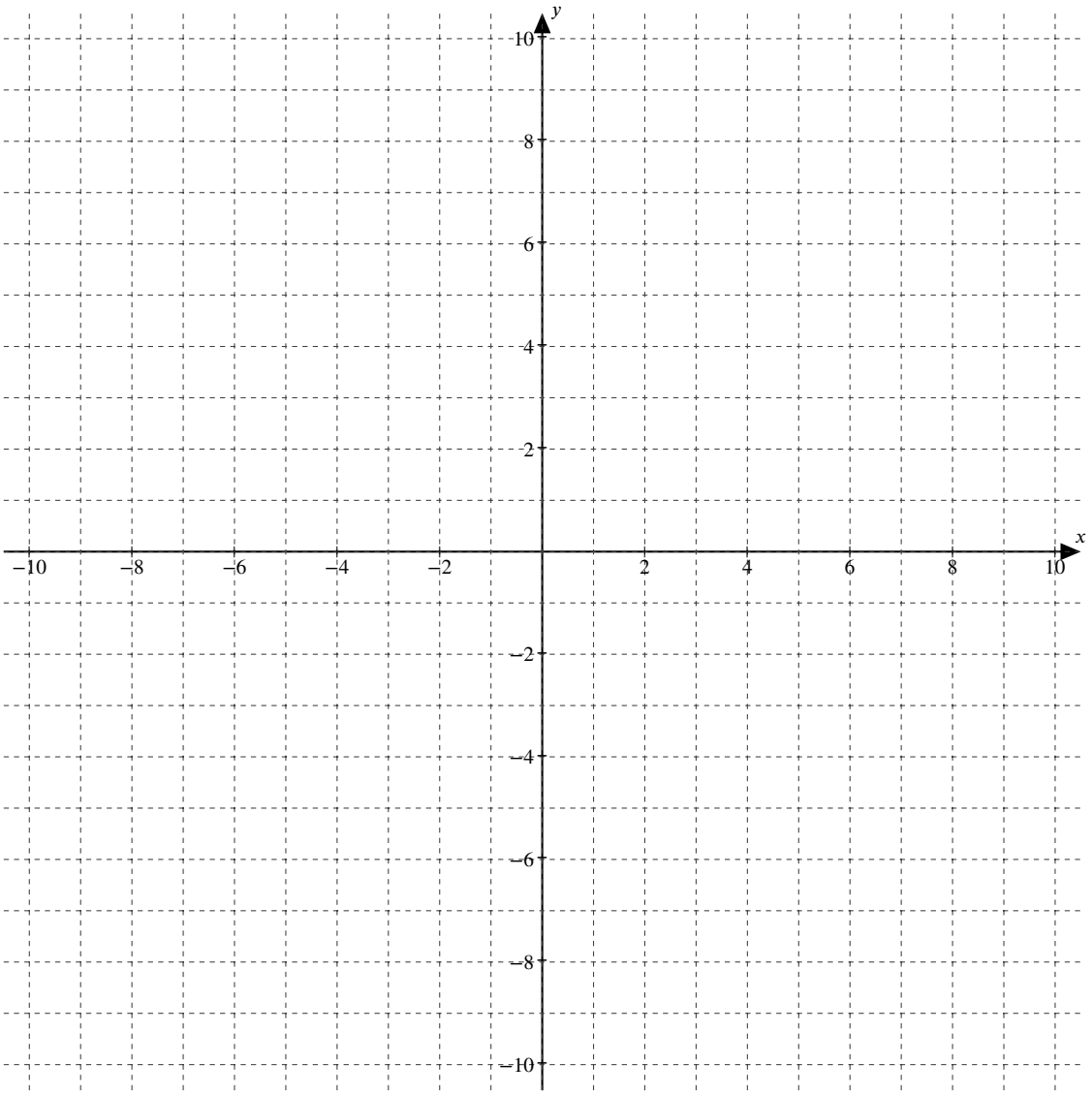
Inéquation	Intervalle	Représentation graphique
$x \leq 7$		
$x < 7$		
$x \geq 7$		
$x > 7$		

1.2 Résolution par voie graphique

Appelons $f(x)$ le membre de gauche de l'inéquation et $g(x)$ le membre de droite.

La méthode par voie graphique consiste à tracer dans un même système d'axes les droites définies par $y = f(x)$ et $y = g(x)$. On observe ensuite pour quelles valeurs de x on obtient des images respectant l'inégalité voulue.

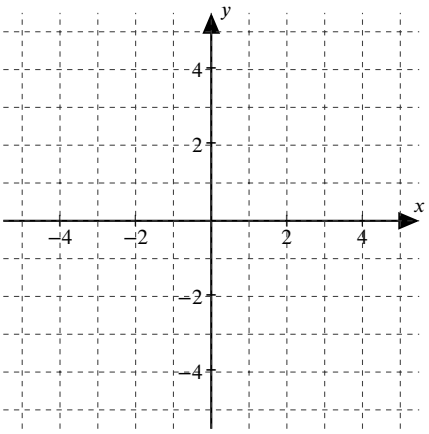
Exemple : Résoudre l'inéquation $x + 2 > -2x - 1$ par voie graphique.

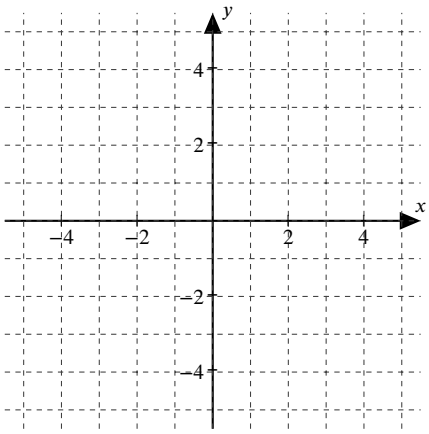


1.3 Résolution algébrique

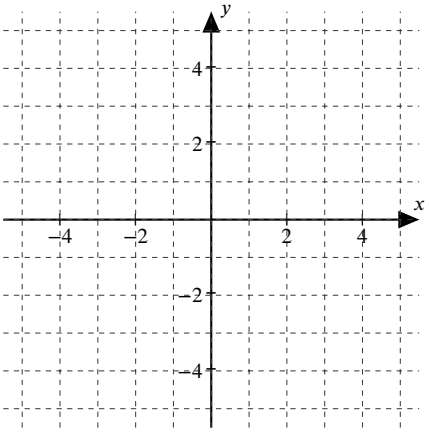
Résoudre ces inéquations par voie graphique et en déduire les implications ci-dessous.

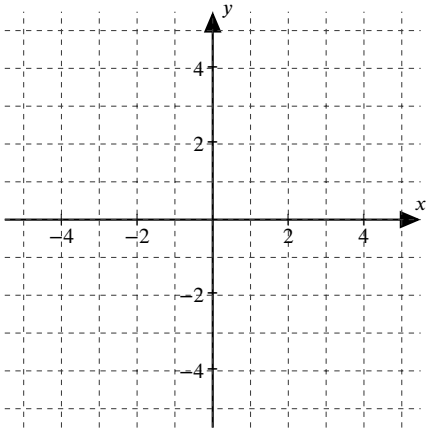
a) $x+3>1$ b) $x-3>1$ c) $2x \leq x-1$ d) $0 \leq 4-x$





e) $3x>3$ f) $-3x>3$ g) $\frac{1}{4}x \geq 1$ h) $-\frac{1}{4}x \geq 1$





a) $x+3>1 \Longrightarrow x > \ldots\ldots$

b) $x-3>1 \Longrightarrow x \ldots\ldots$

c) $2x \leq x-1 \Longrightarrow x \ldots\ldots$

d) $0 \leq 4-x \Longrightarrow x \ldots\ldots$

e) $3x>3 \Longrightarrow x \ldots\ldots$

f) $-3x>3 \Longrightarrow x \ldots\ldots$

g) $\frac{1}{4}x \geq 1 \Longrightarrow x \ldots\ldots$

h) $-\frac{1}{4}x \geq 1 \Longrightarrow x \ldots\ldots$

La méthode algébrique se base sur l'utilisation des quatre **principes d'équivalence** suivants :

- **1er principe d'équivalence**

  On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en réduisant les membres de l'inéquation par les règles du calcul littéral.

  Exemple :

  $$2(3x+5) > 4x-3 \iff 6x+10 > 4x-3$$

- **2e principe d'équivalence**

  On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en additionnant ou en soustrayant à chacun des membres de l'inéquation la même expression.

  Exemples :

  $$6x+10 > 4x-3 \iff 2x > -13$$
  $$6x+10 > 4x-3 \iff 13 > -2x$$

- **3e principe d'équivalence**

  On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en permutant le membre de gauche et le membre de droite, puis en changeant le sens de l'inégalité.

  Exemple :

  $$13 > -2x \iff -2x < 13$$

- **4e principe d'équivalence**

  On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en multipliant ou en divisant chacun des membres de l'inéquation par un nombre strictement positif.
  On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée **en multipliant ou en divisant** chacun des membres de l'inéquation **par un nombre strictement négatif**, puis **en changeant le sens de l'inégalité**.

  Exemples :

  $$2x > -13 \iff x > -\frac{13}{2}$$
  $$-2x < 13 \iff x > -\frac{13}{2}$$

Lorsqu'on veut résoudre algébriquement une inéquation du premier degré à une inconnue, il faut isoler l'inconnue dans l'un des membres de l'inéquation en utilisant les principes d'équivalence.

Après avoir déterminé l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$, il est bon de vérifier s'il est correct, en remplaçant la variable par une valeur de l'ensemble $\mathcal{S}$.

Exemples :

a) Résoudre l'inéquation $2(2x+3) < 6(x-2)+10$

b) Résoudre l'inéquation $\frac{2x-3}{4} + 6 \geq 2 + \frac{4x}{3}$

1.4 Cas particuliers

a) Résoudre l'inéquation $6x - 10 < 2(3x-5)$.

b) Résoudre l'inéquation $6x - 10 \leq 2(3x-5)$.

c) Résoudre l'inéquation $6x - 10 < 2(3x-4)$.

d) Résoudre l'inéquation $6x - 10 > 2(3x-4)$.

e) Résoudre l'inéquation $6x - 10 \geq 2(3x-4)$.

2 Programmation linéaire à deux variables

2.1 Inéquations linéaires à deux inconnues

Une **inéquation linéaire à deux inconnues** est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes suivantes, où a,b,c sont des nombres réels et x,y sont les inconnues :

$$ax + by < c \qquad ax + by > c \qquad ax + by \geq c \qquad ax + by \leq c$$

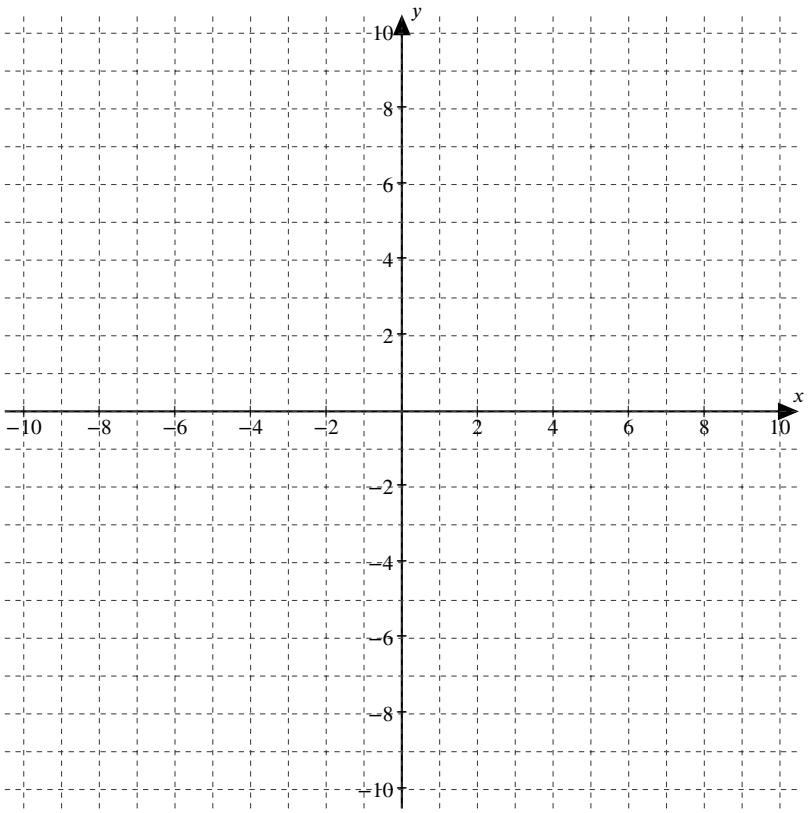
Une **solution** d'une inéquation linéaire à deux inconnues est un couple de la forme $(x\,;y)$, qui vérifie l'inéquation.

Exemple :

a) Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions de l'inéquation $3x - 5y > 15$?

$(0\,;0)$ $(4\,;-1)$ $(2\,;3)$ $(0\,;-4)$ $(-6\,;-9)$
$(5\,;0)$ $(-3\,;6)$ $(9\,;1)$ $(4\,;-8)$ $(-7\,;-2)$

b) Représenter graphiquement la droite $3x - 5y = 15$.



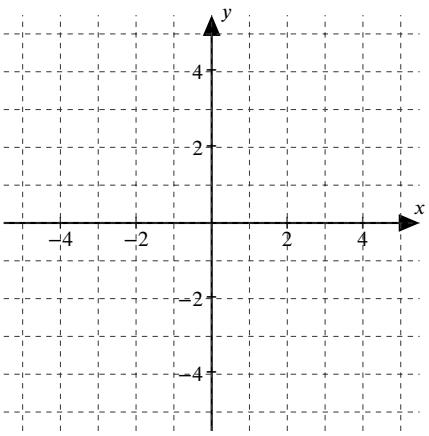
c) Placer les points dont les coordonnées sont les couples proposés au a) et colorier en rouge ceux qui sont solutions de l'inéquation $3x - 5y > 15$. Que constate-t-on ?

Pour **résoudre graphiquement** une équation linéaire à deux inconnues, il faut représenter la droite donnée par l'équation $ax + bx = c$. La solution de l'inéquation est l'un des deux demi-plans délimités par cette droite.

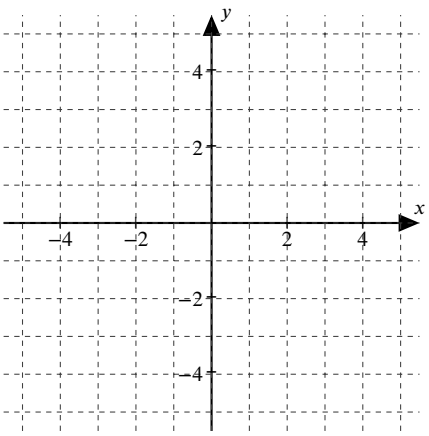
Pour déterminer lequel, il suffit de tester un point. Il faut aussi indiquer si la droite elle-même fait partie des solutions ou pas.

Exemples : Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des inéquations ci-dessous :

$x + y \leq 2$



$-2x + 3y > 8$



2.2 Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues

Un **système d'inéquations** est un ensemble d'inéquations considérées simultanément.

Une accolade (une une barre verticale) indique que les inéquations forment un système.

Une **solution** du système d'inéquations est un couple de la forme $(x\,;y)$, qui vérifie toutes les inéquations simultanément.

Exemple : Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions du système ?

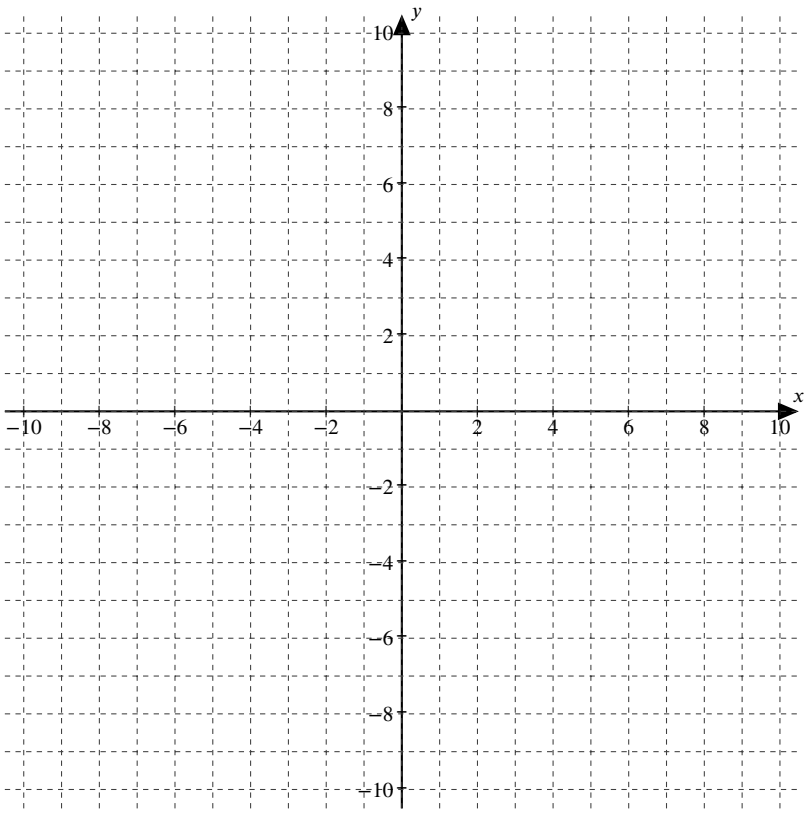
$$\begin{cases} x-2y \geq -10 \\ 2x+y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$(0\,;0)$ $(4\,;-1)$ $(2\,;3)$ $(1\,;6)$

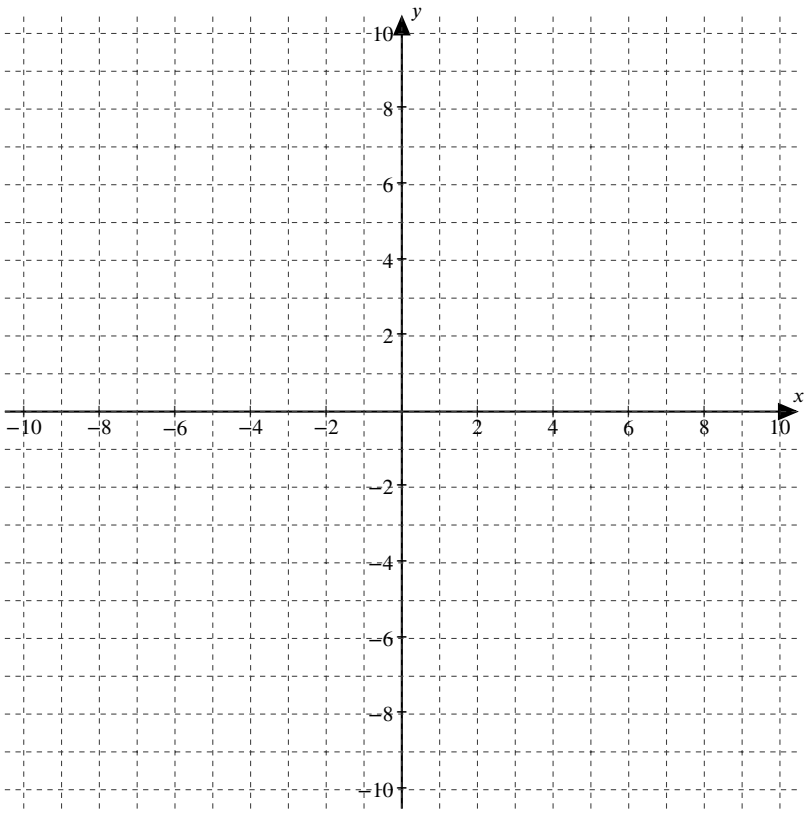
$(5\,;0)$ $(-3\,;0)$ $(6\,;0)$ $(4\,;1)$

Exemples : Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} -x+2y \leq 4 \\ 2x+3y < 6 \end{cases}$



b) $\begin{cases} -x+y > -5 \\ 5x+2y \leq 10 \\ x > -2 \\ y \geq -4 \end{cases}$

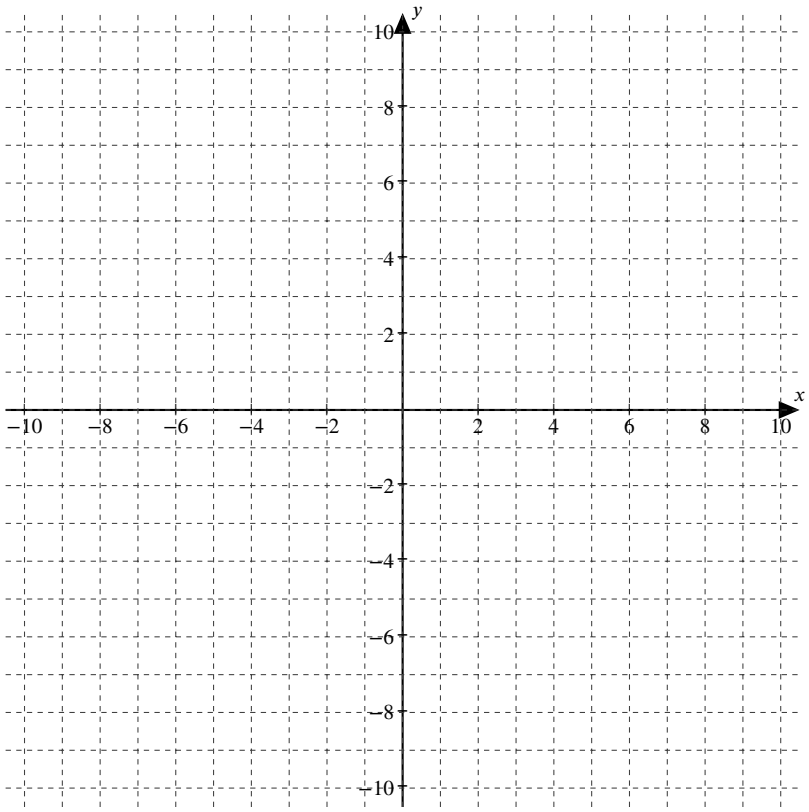


L'ensemble des solutions d'un système d'inéquations est un **polygone** convexe ou une surface polygonale ouverte convexe. Pour simplifier, nous utiliserons le terme polygone dans toutes les situations.

Pour **trouver algébriquement les coordonnées de ses sommets**, il faut résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues, obtenues à partir des inéquations de départ.

Exemple : Résoudre graphiquement et déterminer les coordonnées des sommets du polygone des solutions.

$$\begin{cases} x - 2y \geq -10 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq -1 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$$



Application : La cafeteria prépare des pique-niques pour les étudiants. Il y en a deux sortes :

A) 3 sandwichs, 2 boissons, 1 dessert B) 2 sandwichs, 1 boisson, 3 desserts.

On appelle x le nombre de pique-niques A et y le nombre pique-niques B .

a) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 32 sandwichs à disposition.

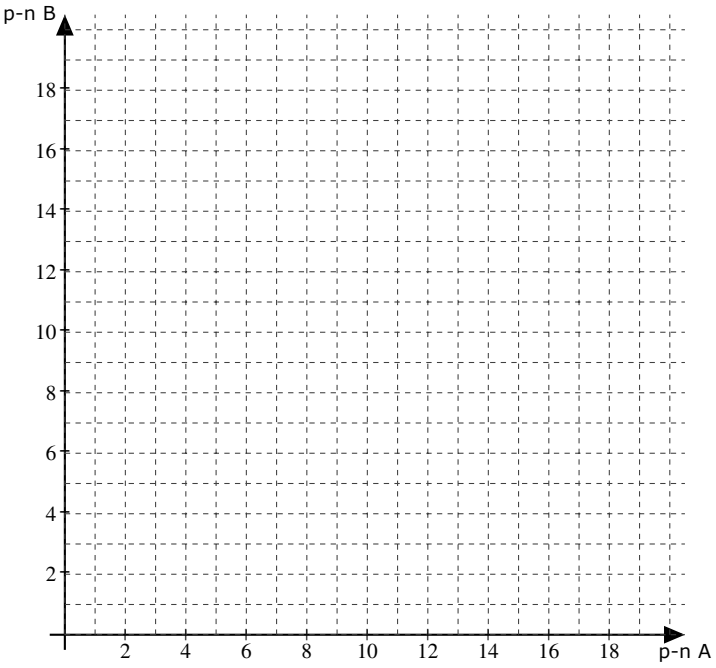
b) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 20 boissons à disposition.

c) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 30 desserts à disposition.

d) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 10 sandwichs que l'on doit absolument utiliser.

e) Écrire des inéquations qui expriment le fait que x et y sont des nombres positifs.

f) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de ce système d'inéquations.



g) Vérifier graphiquement et algébriquement que $(4\,;8)$ est une solution de ce système et expliquer ce que cela veut dire par rapport au problème.

2.3 Introduction à la programmation linéaire à deux variables

La programmation linéaire à deux variables peut se définir comme un outil mathématique permettant de résoudre certains problèmes d'optimisation liés à des contraintes. Dans de tels problèmes, on cherche deux quantités respectant des contraintes et qui rendent maximum ou minimum une valeur qui leur est liée, que l'on appelle **objectif**.

Exemple : Un potier fabrique deux types de vases. La fabrication d'un vase de type A demande 1 heure de travail et $1{,}5$ kg de terre. Ceux de type B demandent 2 heures de travail et 750 g de terre.

Le potier travaille entre 4 et 8 heures et a 6 kg de terre à sa disposition. Il fera un bénéfice de CHF $30.-$ pour chaque vase de type A et de CHF $40.-$ pour ceux de type B.

Combien de vases de chaque sorte doit-il fabriquer pour avoir un bénéfice maximum ? Et pour un bénéfice minimum ?

Pour résoudre de tels problèmes, nous allons traiter un système d'inéquations linéaires à deux inconnues conjointement avec une fonction à deux variables de la forme :

$$P(x\,;y) = ax + by + c$$

où a,b,c sont des nombres réels et x,y sont les variables.

La fonction P est appelée la **fonction objectif**.

Les inéquations du système expriment les **contraintes**.

Les solutions du système sont les **solutions possibles du problème**.

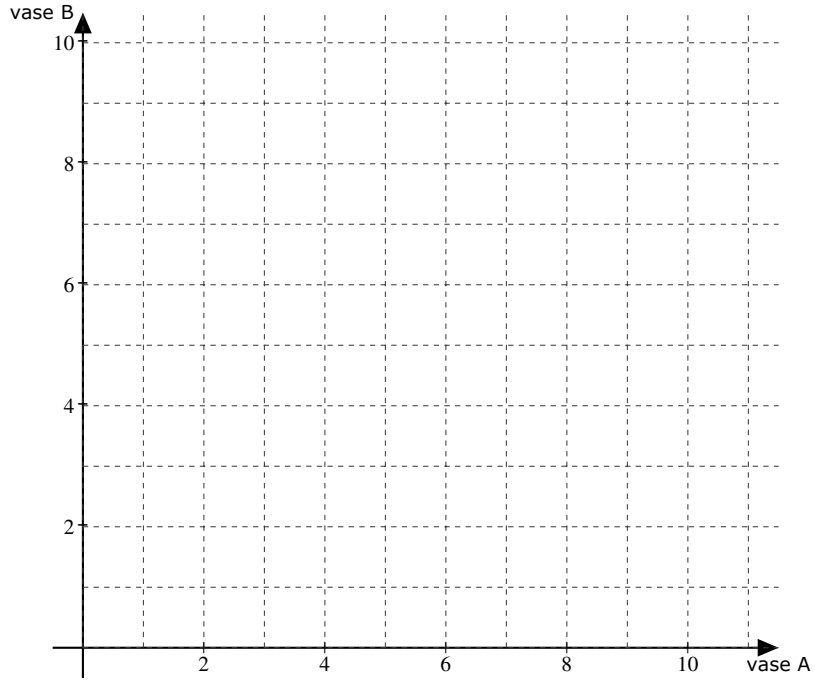
Les **solutions du problème** sont les solutions possibles, qui rendent maximum ou minimum la fonction objectif.

Exemple :

a) Que sont les variables et la fonction objectif de l'exemple précédent ? Quelle est l'expression de $P(x\,;y)$?

b) Écrire toutes les contraintes sous forme d'inéquations.

c) Résoudre graphiquement le système d'inéquations et déterminer algébriquement les coordonnées des sommets du polygone des solutions possibles.



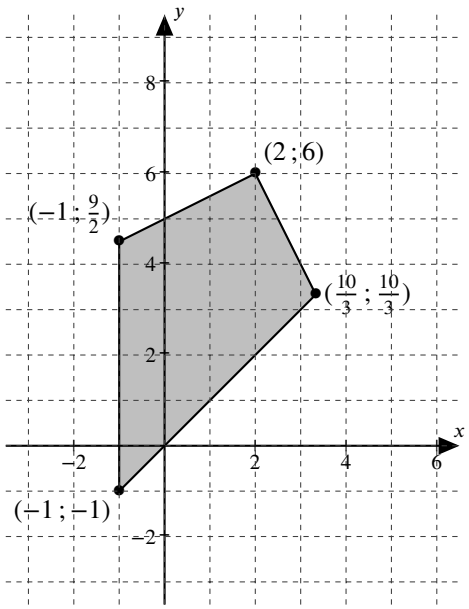
d) Quelles sont concrètement toutes les solutions possibles du problème ?

e) Calculer le bénéfice pour chacune d'entre elle. Laquelle donne le bénéfice le plus élevé ? Et le moins élevé ?

Exemple : Soit la fonction objectif $P(x\,;y) = 3x + y$ avec les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x - 2y \geq -10 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq -1 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$$

Nous avons vu précédemment que le polygone des solutions possibles est :



Soit P une valeur choisie pour $P(x\,;y)$. Comme $P = 3x + y$, on peut écrire $y = -3x + P$. Donc tous les points se trouvant sur la droite $y = -3x + P$ donnent la valeur choisie.

Choisissons par exemple $P = 6$. Dessiner la droite $y = -3x + 6$ sur le graphique, puis choisir 3 points de cette droite et calculer $P(x\,;y)$ pour ces points.

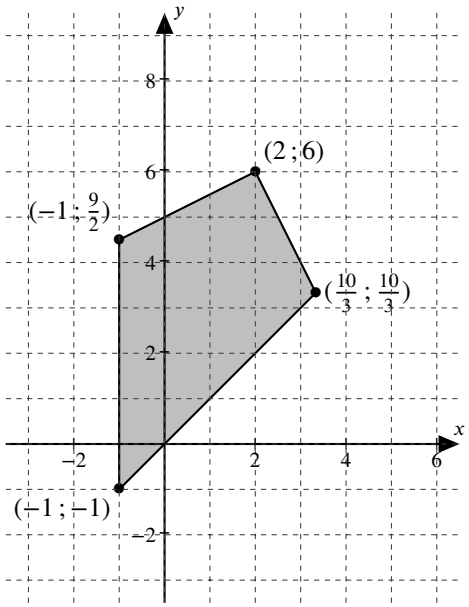
Ici, pour que P soit maximum, il faut que l'ordonnée à l'origine de $y = -3x + P$ soit maximum.

Cela revient à chercher un point $(x\,;y)$ qui est sur une droite $y = -3x + P$ avec la plus grande ordonnée à l'origine P possible et qui respecte les contraintes. Quel est ce point et quelle est la valeur maximale de P ?

Et si x et y doivent être des nombres entiers ?

Exemple : Le raisonnement est-il le même pour la fonction objectif $P(x\,;y) = 3x - y$?

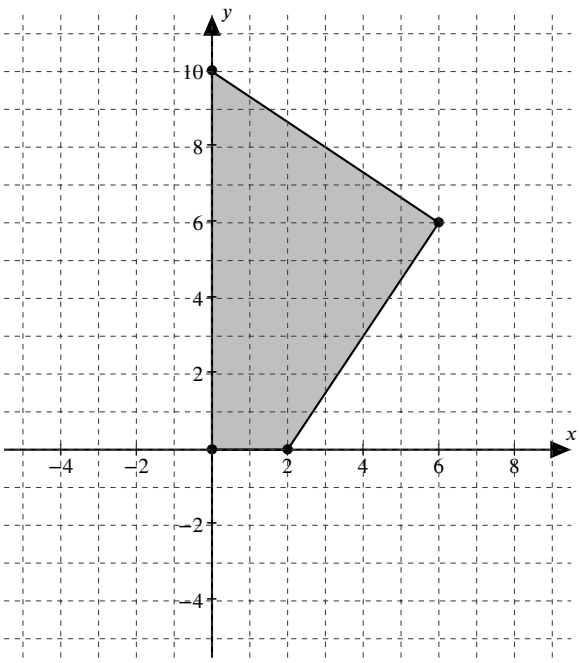
Trouver le maximum de $P(x\,;y) = 3x - y$ avec les contraintes précédentes.



Nous procédons de la manière suivante :

- Représenter graphiquement le polygone des solutions possibles, déterminé par le système d'inéquations.
- Calculer algébriquement les coordonnées des sommets de ce polygone et vérifier la précision du graphique.
- Écrire y en fonction de x et de P pour trouver sa pente, puis dessiner une droite de même pente.
- Translater cette droite pour avoir l'ordonnée à l'origine la plus grande possible, tout en passant par une des solutions possibles, puis faire de même mais avec l'ordonnée à l'origine la plus petite possible. Une de ces deux droites donne le maximum de P et l'autre le minimum.
- Calculer la valeur de P pour ces deux droites de manière à différencier le maximum du minimum.

Exemple : On donne les contraintes représentées ci-dessous :



a) Pour quels points $(x\,;y)$, à coordonnées entières et respectant les contraintes ci-dessus, la fonction $P_1(x\,;y) = x + 2y$ vaut-elle 16 ?

b) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_1(x\,;y) = x + 2y$.

c) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_2(x\,;y) = 3x + y$.

d) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_3(x\,;y) = x - y$.

e) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_4(x\,;y) = 2x + 3y$.

2.4 Applications

La programmation linéaire peut s'appliquer dans de nombreux problèmes de gestion : problèmes d'organisation de transports, de production, d'investissement, ... dans le but de maximiser les bénéfices, minimiser les coûts, le temps de trajet, ...

Pour résoudre de tels problèmes, il faut :

- définir les variables x et y,
- trouver l'expression de la fonction objectif $P(x\,;y)$,
- écrire les contraintes sous forme de système d'inéquations,

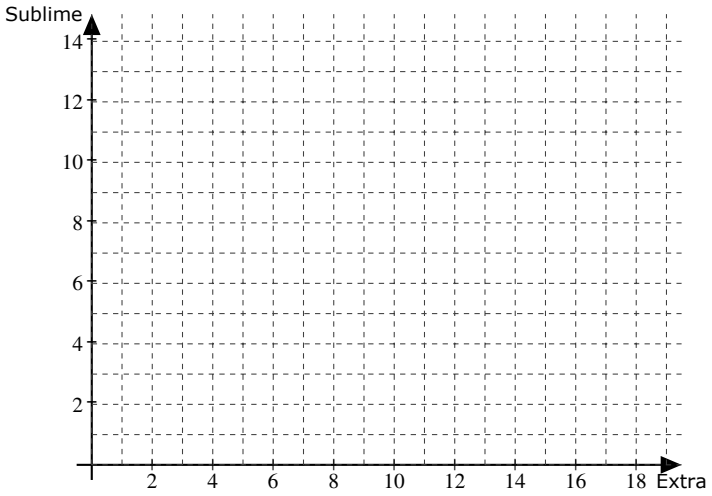
puis procéder comme vu précédemment, sans oublier de répondre concrètement à la question posée.

Exemple : À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des oeufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 14 kg de lait.

Il a deux spécialités : l'oeuf Extra et l'oeuf Sublime. Un oeuf Extra nécessite 1 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 2 kg de lait. Un oeuf Sublime nécessite 3 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 1 kg de lait.

Il fera un profit de CHF $20.–$ en vendant un oeuf Extra, et de CHF $30.–$ en vendant un oeuf Sublime.

Combien d'oeufs Extra et Sublime doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible et quel sera ce bénéfice maximum ?



3 Statistique descriptive

3.1 Introduction

Un peu d'histoire

Le mot statistique, du latin « status », état, désignait à l'origine la collecte et l'évaluation des données concernant l'État.

Cette science de l'État était une représentation purement descriptive de faits géographiques et sociaux comme le climat, la population, les productions de matières premières, agricoles…Elle devait être une aide pour les dirigeants de l'État afin de prendre les bonnes décisions.

Exemples :

- L'empereur Yao (vers 2200 av. J.-C.) procédait à des enquêtes pour connaître les productions agricoles.
- L'empereur Auguste à Rome collectait des données concernant le nombre de soldats ou le revenu des citoyens.
- L'astronome Johannes Kepler (1571- 1630) formula ses lois sur le mouvement des planètes en se basant sur des données statistiques mesurées par l'astronome danois Tsych Brahé (1546-1601).
- Les premières études statistiques de Florence Nightingale, infirmière anglaise durant la guerre de Crimée (1854 - 1856) permirent d'identifier les causes de mortalité des soldats et conduisirent à l'amélioration des conditions d'hygiène des hôpitaux militaires anglais.

De nos jours

La statistique a actuellement un rôle central dans le fonctionnement des États et dans l'économie. La Suisse est par exemple dotée d'un office fédéral dédié à la statistique (OFS) qui est basé à Neuchâtel et qui emploie plus de 800 personnes. Les données collectées et traitées touchent des domaines variés comme la démographie, l'écologie, l'économie, la santé, l'industrie, la politique...

Diverses étapes d'une étude statistique

Elle comporte quatre étapes :

1. La collecte des données, avec une réflexion précise sur la manière dont les renseignements ont été obtenus et les éventuels biais que cela peut induire.
2. Le classement et la présentation des données en utilisant des tableaux et des graphiques pour mieux visualiser les informations.
3. Le traitement et l'analyse des résultats, des calculs de mesure de tendance centrale et de dispersion seront appris au cours de nos deux années de travail.
4. L'interprétation et la synthèse des résultats, partie la plus délicate, qui permettra, peut-être, de repérer les éventuelles utilisations abusives des statistiques.

3.2 Vocabulaire

Exemple : On fait une étude statistique dans votre classe. On aimerait comparer les mois de naissance, les nombres de frères et soeurs et les longueurs de l'auriculaire des élève.

On appelle **population** l'ensemble de référence (par exemple : habitants de Lausanne, voitures produites en 2024, ...) sur lequel vont porter les observations de la statistique. Il est important de le définir avec précision pour éviter des généralisations abusives.

Exemple : Quelle est la population de l'exemple ci-dessus ?

Un **individu** ou **unité statistique** désigne un élément de base de la population. Le nombre d'individus est appelé l'**effectif**, N, de la population.

Lorsque la population est trop nombreuse, on étudie un sous-ensemble représentatif de la population qu'on appellera **échantillon**.

Exemple : Quel est l'effectif de l'exemple ci-dessus ?

On appelle **variable statistique** ou **caractère** une caractéristique que l'on veut étudier sur la population (par exemple : opinion sur la prochaine votation, nombre d'enfants, ...).

Les valeurs possibles de cette variable sont appelées **modalités** ou **valeurs** (par exemple : oui, non, pas d'avis, $[0\,;10[$; $[10\,;20[$, ...).

On désignera une variable statistique par une lettre majuscule X, Y ... et ses modalités par la même lettre, en minuscule, affectée d'un indice : x_1, x_2 ... pour le caractère X ou y_1, y_2 ... pour le caractère Y.

Exemple : Compléter les deux premières colonnes du tableau ci-dessous pour l'exemple du haut de la page.

Variable statistique	Modalités	Type de variable
X :		
Y :		
Z :		

La variable est **quantitative** (ou **mesurable**) si les modalités sont des nombres et **qualitative** sinon.

On distingue deux types de variables quantitatives :

- les variables **quantitatives discrètes** : l'ensemble de leurs modalités est fini ;
- les variables **quantitatives continues** : leurs modalités peuvent prendre un nombre infini de valeurs que l'on représentera à l'aide d'intervalles semi-ouverts, disjoints, de nombres réels.

Exemple : Compléter la dernière colonne du tableau ci-dessus.

3.3 Effectifs, fréquences et représentations graphiques

3.3.1 Données brutes et tableau de distribution

La première étape d'une statistique est la récolte des informations.

On obtient des **données brutes**, X_1 à X_N, que l'on organise ensuite en un tableau, appelé **tableau de distribution**, listant les modalités x_1, x_2, … et pour chacune son effectif n_1, n_2, ….

A l'aide des effectifs des modalités et de l'effectif total, on calcule les fréquences (souvent donnée en $\%$).

La **fréquence de la modalité** x_i, notée f_i est la proportion : $\boxed{f_i = \dfrac{n_i}{N} = \dfrac{\text{effectif de la modalité } x_i}{\text{effectif de la population}}}$

Exemple : Récolter les données brutes de l'exemple de la page précédente et compléter les trois tableaux de distribution correspondant.

Répartition des élèves de la classe selon leur mois de naissance

i	Modalités	Effectif n_i	Fréquence f_i
	x_1 :		
	x_2 :		
	x_3 :		
	x_4 :		
	x_5 :		
	x_6 :		
	x_7 :		
	x_8 :		
	x_9 :		
	x_{10} :		
	x_{11} :		
	x_{12} :		
	Total :		

Répartition des élèves de la classe selon leur nombre de frères et soeurs

i	Modalités	Effectif n_i	Fréquence f_i
	Total :		

Répartition des élèves de la classe selon la longueur de leur auriculaire

i	Modalités	Effectif n_i	Fréquence f_i
	Total :		

3.3.2 Étude d'une variable qualitative

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons aux variables statistiques qualitatives. C'est-à-dire celles dont les modalités ne sont pas des valeurs numériques (par exemple la couleur des yeux). Comme on ne peut pas additionner les modalités, on peut faire beaucoup moins de choses pour ce type de variables que pour les quantitatives. Par exemple, on ne pourra pas calculer la "couleur moyenne" des yeux de la population.

On se cherchera donc des représentations visuelles (**diagramme en colonnes ou en secteurs**) et on donnera le mode de la variable.

Le **mode** est la modalité qui a le plus grand effectif. On le notera M_0.

Le mode n'est pas toujours unique. Lorsqu'il y a plusieurs modes, la variable est dite **plurimodale**.

Exemple :

Répartition de lecteurs du magazine "Stats pour les maths" selon leur couleur préférée

i	Modalités	Effectif n_i	Fréquence f_i	Angle α_i
	rouge	200		
	vert	500		
	bleu	800		
	autre	500		
	Total :			

Mode :

Diagramme en colonnes

La hauteur de chaque colonne est proportionnelle à l'effectif ou à la fréquence de chaque modalité.

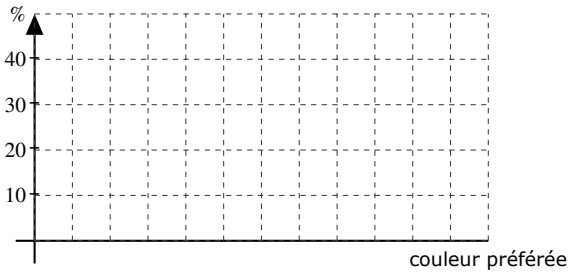
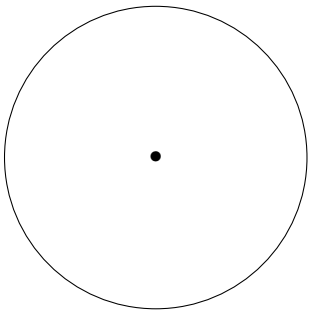


Diagramme en secteurs (ou circulaire)

L'aire et l'angle au centre de chaque secteur sont proportionnels à la fréquence de la modalité.

Pour calculer l'angle du secteur : $\boxed{\alpha_i = f_i \cdot 360°}$.



3.3.3 Étude d'une variable quantitative discrète

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons aux variables quantitatives discrètes, c'est-à-dire celles qui ont des modalités numériques en nombre fini.

Pour ce type de variable, on débutera de la même manière que pour une variable qualitative et on ajoutera une colonne pour la fréquence cumulée.

La **fréquence cumulée** F_i d'une classe est la somme des fréquences de toutes les classes qui lui sont inférieures ou égales .

Le graphique représentant l'évolution des fréquences cumulées s'appelle le **polygone des fréquences cumulées**.

Exemple : Un enseignant de mathématiques veut étudier la répartition des notes de ses élèves lors du dernier test.

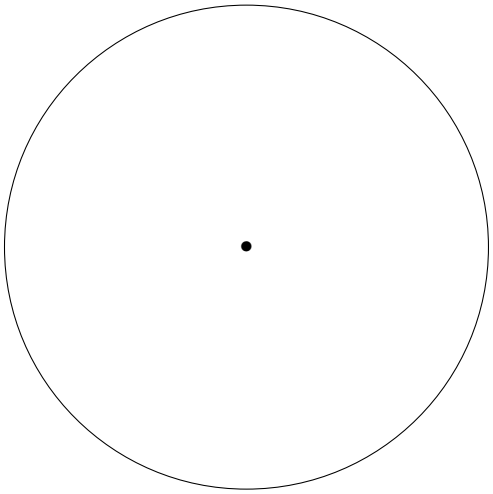
Les modalités possibles sont 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 4,5 5 5,5 6. Il s'agit donc d'une variable quantitative discrète.

Les données brutes sont : 4,5 5 3 6 5 4,5 2,5 5,5 6 4,5 5 6 4 3 4 4 4 6 3 3

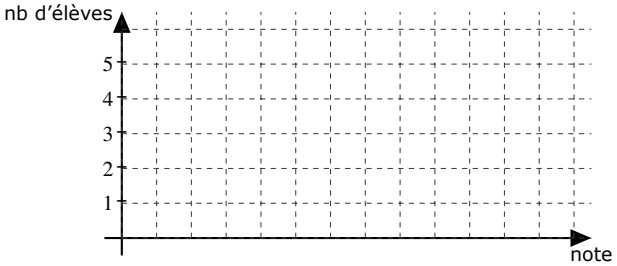
Compléter le tableau de distribution, déterminer le mode et faire les représentations graphiques.

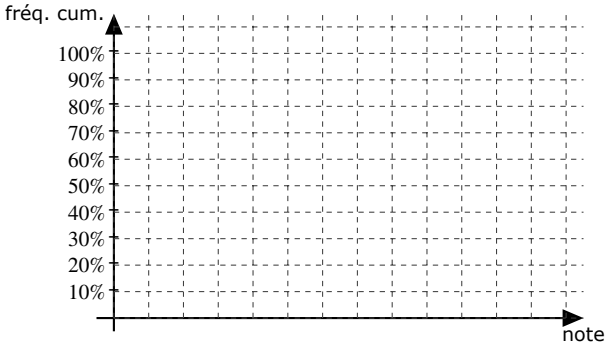
Répartition des notes du dernier test de maths

i	Note x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i en %	Fréq. cumulée F_i en %	Angle α_i
	6				
	5,5				
	5				
	4,5				
	4				
	3,5				
	3				
	2,5				
	2				
	1,5				
	1				
	Total				



mode :





3.3.4 Étude d'une variable quantitative continue (ou discrète avec beaucoup de modalités)

Lorsque la variable quantitative discrète comporte beaucoup de modalités, on ne peut pas toutes les mettre dans le tableau de distribution. On doit les regrouper par **classes**, c'est-à-dire des intervalles numériques semi-ouverts (par exemple : $[0\,;5[$). On les traitera ensuite comme une variable quantitative continue.

- b_{i-1} est la **borne inférieure** de la i^{e} classe ;
- b_i est la **borne supérieure** de la i^{e} classe ;

- $x_i = \dfrac{b_i + b_{i-1}}{2}$ est le **centre** de la i^{e} classe ;
- $L_i = b_i - b_{i-1}$ est la **largeur** ou **amplitude** de la i^{e} classe ;
- Dans le cas d'une série regroupée en *classes d'égale largeur*, la **classe modale** est la classe ayant le plus grand effectif.

Exemple : On veut étudier la taille en cm des 54 employés d'une entreprise.

Les données brutes rangées dans l'ordre croissant sont :

142,4	162,1	172,1	178,3	181,2	188,5
148,7	163,4	172,3	178,5	181,4	189,1
151,5	165,1	172,7	179	182,1	190,3
153,6	165,2	173,4	179,2	183,5	191,4
156,1	166,3	175,2	179,6	184,2	192,5
158,2	167,1	175,3	179,8	186,1	193,3
159,8	170,3	176,1	180	187,2	196,2
160	171,1	177,2	180	188,3	197,1
161,3	171,2	177,4	180,9	188,4	205,2

On les regroupe par classe de 10 cm de largeur avec une valeur minimale de 140 cm, sauf la dernière qui a une largeur double.

a) Compléter le tableau.

Répartition des employés selon leur taille en cm

i	Taille en cm $[b_{i-1}\,;b_i[$	centre en cm x_i	largeur de classe L_i	Effectif n_i	Fréquence en % f_i	Fréq. cumulée F_i
1	$[140\,;150[$	145	10	2	0,0370	0,0370
2						
3	$[160\,;170[$	165	10	8	0,1481	
4	$[170\,;180[$	175	10	18	0,3333	
5						
6	$[190\,;210[$					
			Total :	54		

b) Que vaut la borne b_4 ?

c) Que vaut la borne b_0 ?

d) Quelle est la classe modale ?

Histogramme et polygone des effectifs ou des fréquences

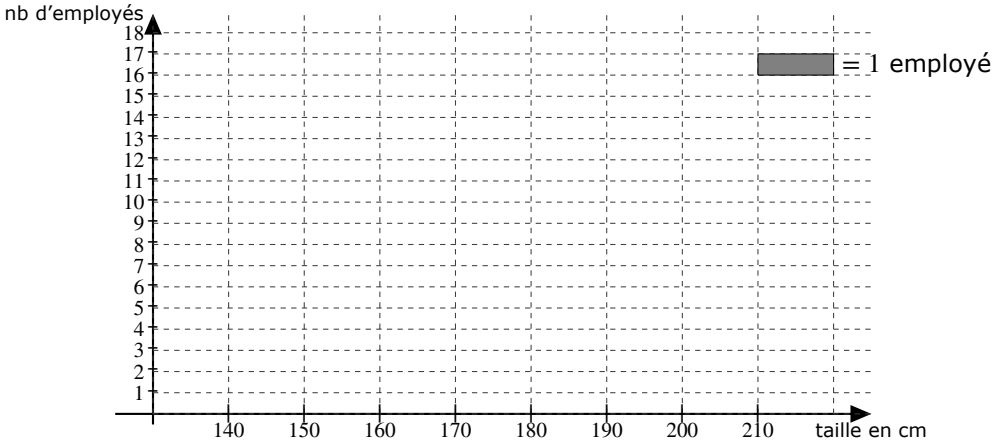
Pour représenter graphiquement une variable continue, on fait un **histogramme**, c'est-à-dire un diagramme en colonnes où chaque colonne aura la largeur de la classe.

Lorsque les largeurs de classe ne sont pas toutes égales, la priorité est que **l'aire** de chaque colonne soit proportionnelle à l'effectif de la classe. Donc pour un même effectif, **une classe de largeur double devra être deux fois moins haute**.

On n'indiquera une graduation sur l'axe des effectifs ou des fréquences que si les largeurs de classe sont toutes, ou presque, égales. Sinon on notera la valeur d'une unité d'aire.

Dans la mesure du possible, la graduation de l'axe horizontal commence à zéro, sauf si la première borne est trop éloignée.

Exemple : Représenter l'histogramme de l'exemple de la page précédente.



Pour dessiner le **polygone des effectifs**, on dessine le point représentant le centre de la classe sur la partie supérieure de chaque colonne et on le relie par des segments.

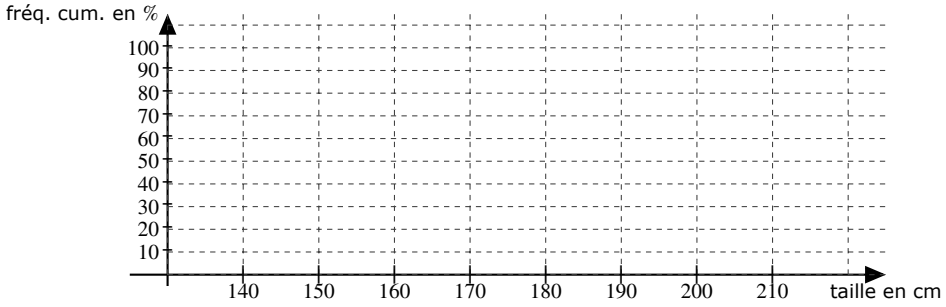
On commence et on termine le polygone des effectifs en ajoutant une classe d'effectif nulle avant la première classe et une autre après la dernière classe, de même largeur que la classe voisine.

Exemple : Représenter le polygone des effectifs ci-dessus.

Polygone des fréquences cumulées

Pour représenter le **polygone des fréquences cumulées**, les points sont situés sur la borne de droite de chaque classe car c'est à la fin de la classe que la fréquence cumulée est atteinte.

Exemple : Représenter le polygone des fréquences cumulées de l'exemple de la page précédente.



3.4 Mesures de tendance centrale

Pour analyser et comparer les résultats de variables quantitatives, il est intéressant d'observer une représentation graphique mais on aimerait aussi pouvoir comparer des résultats chiffrés. Par exemple, lors d'un test, on aime connaître la moyenne de classe. Il y a d'autres indicateurs qui permettent de se rendre compte de comment les valeurs se répartissent et en particulier de situer "le centre".

On les appelle **mesures de tendance centrale** ou **valeurs centrales**. Celles que nous allons utiliser sont la moyenne, le mode, la médiane et les quantiles (quartiles, déciles).

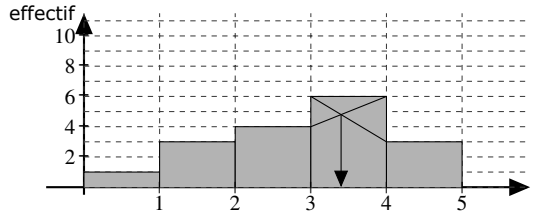
3.4.1 Mode et classe modale

Nous avons déjà défini le **mode**, M_0, pour les variables quantitative discrètes, ainsi que la **classe modale** pour les variables quantitatives continues.

Il est à noter qu'à l'intérieur d'une classe modale $[b_{i-1}\,;b_i[$, on peut situer le **mode d'une variable quantitative continue**, proportionnellement aux différences d'effectifs (ou de fréquences) de la classe modale et de ses classes voisines :

$$M_0 = b_{i-1} + \frac{n_i - n_{i-1}}{(n_i - n_{i-1}) + (n_i - n_{i+1})} \cdot L_i$$

Exemple : Déterminer la classe modale et le mode. Comparer à la valeur obtenue graphiquement.



Classe modale :

Mode :

3.4.2 Médiane

La **médiane** (notée M, Me ou Med) partage la population de la série en deux parties de population égale de telle sorte qu'au moins 50% des individus prennent une valeur inférieure ou égale à la médiane et au moins 50% des individus prennent une valeur supérieure ou égale à la médiane.

La médiane d'une **variable quantitative discrète** est donc généralement la première modalité dont la fréquence cumulée dépasse 50%.

La seule exception est la situation où une modalité a une fréquence cumulée croissante égale à 50%. La médiane est alors la moyenne de cette modalité et de la suivante.

On peut aussi calculer la médiane sans passer par le tableau de distribution, en rangeant les données bruts par ordre croissant des valeurs et en les partageant en deux groupes d'effectifs égaux.

Exemple : Déterminer la médiane à l'aide des données brutes puis du tableau de distribution.

Données brutes :

2 / 2 / 2 / 3 / 3 / 4 / 4 / 5 / 5 / 6 / 6

Médiane :

Note x_i	n_i	f_i en %	F_i en %
2	3	27,3	27,3
3	2	18,2	45,5
4	2	18,2	63,7
5	2	18,2	81,9
6	2	18,2	100
Total	11	100	

Exemple : Déterminer la médiane à l'aide des données brutes puis du tableau de distribution.

Données brutes :

2 / 2 / 2 / 3 / 3 / 4 / 4 / 5 / 5 / 6

Médiane :

Note x_i	n_i	f_i en %	F_i en %
2	3	30	30
3	2	20	50
4	2	20	70
5	2	20	90
6	1	10	100
Total	10	100	

Dans le cas d'une **variable quantitative continue** ou d'une variable discrète dont les **données sont regroupées en classes**, on commence par déterminer la première classe d'indice i, où la fréquence cumulée atteint ou dépasse 50%, appelée **classe médiane**.

Puis, la **médiane** se calcule dans celle-ci de la manière suivante :

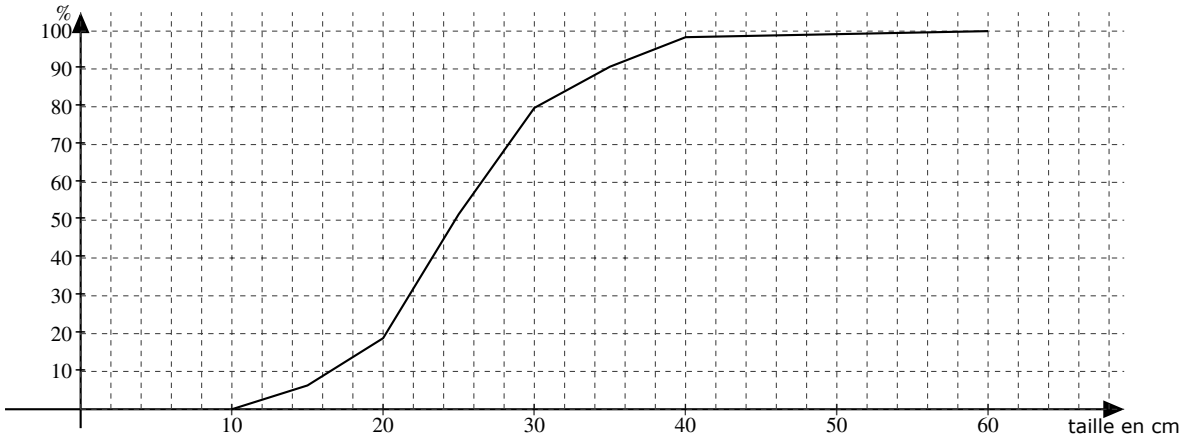
$$\text{Médiane} = M = b_{i-1} + \frac{0{,}5 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i$$

Exemple : Calculer la médiane et vérifier que le résultat obtenu est dans le bon intervale.

Répartition des employés selon leur taille en cm.

i	Taille en cm	x_i en cm	n_i	f_i en %	F_i en %
1	[140 ; 150[	145	2	3,7	3,7
2	[150 ; 160[	155	5	9,3	13
3	[160 ; 170[	165	8	14,8	27,8
4	[170 ; 180[	175	18	33,3	61,1
5	[180 ; 190[	185	14	25,9	87,0
6	[190 ; 200[	195	6	11,1	98,1
7	[200 ; 210[	205	1	1,9	100
		Total :	54	100	

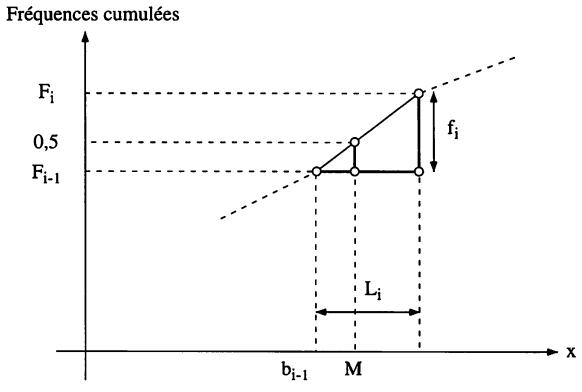
Exemple : Ce graphique représente un polygone des fréquences cumulées. Déterminer la médiane.



Justification de la formule :

Grâce aux fréquences cumulées, on a déterminé la classe dans laquelle la médiane se trouve.

Pour la calculer plus précisément, on imagine que la fréquence cumulée augmente régulièrement au sein de la classe. Sur notre intervalle $[b_{i-1} ; b_i[$, on part donc de F_{i-1} pour arriver à F_i. La médiane est l'abscisse du point correspondant à une fréquence cumulée croissante de 50%.



En observant le dessin ci-dessus, on constate que les mesures des côtés des triangles sont proportionnelles. Donc :

$$\underbrace{\frac{M - b_{i-1}}{b_i - b_{i-1}}}_{L_i} = \underbrace{\frac{0{,}5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}}_{f_i}$$

Il n'y a plus qu'à isoler M pour obtenir la formule.

3.4.3 Moyenne

La **moyenne** μ ou $\bar{x}$ ou $\overline{X}$, d'une **variable statistique quantitative** X est la somme de toutes les données divisée par l'effectif total N :

$$\boxed{\mu = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}}$$

Pour une **variable quantitative discrète** prenant les valeurs de x_1 à x_p dont on connaît les effectifs n_i (ou les fréquences f_i), la moyenne se calcule de la manière suivante :

$$\boxed{\mu = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \ldots + n_p \cdot x_p}{N}}$$

donc $\mu = \frac{n_1}{N} \cdot x_1 + \frac{n_2}{N} \cdot x_2 + \ldots + \frac{n_p}{N} \cdot x_p$, ce qui donne la formule :

$$\boxed{\mu = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \ldots + f_p \cdot x_p}$$

Dans le cas d'une **variable quantitative continue** dont les données sont regroupées en classes, on utilise les **centres** x_i des classes.

$$\boxed{\mu = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \ldots + n_p \cdot x_p}{N} = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \ldots + f_p \cdot x_p}$$

Exemple : Calculer la moyenne de deux manières différentes puis comparer avec la médiane.

Répartition des élèves selon la note obtenue au test de maths

Note x_i	n_i	f_i en %	$f_i \cdot x_i$
1	1	4	
2	2	8	
3	4	16	
4	8	32	
5	7	28	
6	3	12	
Total :	25	100	

Exemple : Calculer la moyenne puis comparer avec la médiane.

Répartition des poissons pêchés selon leur taille en cm

Taille en cm	x_i	Effectif	Fréquence en %	$f_i \cdot x_i$
[10 ; 15[		4	6,25	
[15 ; 20[		8	12,5	
[20 ; 25[		21		
[25 ; 30[		18		
[30 ; 35[		7		
[35 ; 40[		5		
[40 ; 60[		1		
	Total :	64	100	

Remarque : Il faut utiliser la valeur exacte de la fréquence pour calculer $f_i \cdot x_i$.
Il est donc conseillé de remplir le tableau ligne par ligne.

Exemple : Notes d'un test où 2 élèves ont triché : 1 / 1 / 4 / 4 / 4 / 4,5 / 5 / 5 / 5 / 5 / 5

a) En observant ces résultats, quelle est votre impression sur la difficulté du test ?

b) Calculer la moyenne.

c) Déterminer le mode.

d) Calculer la médiane.

e) Comparer ces indicateurs avec votre impression initiale.

Remarque : La moyenne est sensible aux valeurs extrêmes ou aberrantes. Elles peuvent donc fausser l'interprétation des résultats. Pour éviter ce type de biais, il arrive que l'on tronque volontairement la population et qu'on élimine les 10% de valeurs les plus basses et les 10% de valeurs les plus hautes.

Exemple : Dans une entreprise, 9 salariés sont payés CHF $2000.–$ mensuels. Le patron se paie CHF $22'000.–$ mensuels. Calculer le salaire moyen. Qu'en pensez-vous ?

3.4.4 Quartiles

Les **trois quartiles**, notés Q_1, Q_2, Q_3 sont les valeurs d'une variable quantitative qui partage l'effectif total de la population en **quatre groupes égaux**. Q_2 est par conséquent la médiane.

Dans le cas d'une **variable quantitative discrète** :

Le 1er **quartile** noté Q_1 est la première modalité dont la fréquence cumulée égale ou dépasse 25%.

Le 3ème **quartile** noté Q_3 est la première modalité dont la fréquence cumulée égale ou dépasse 75%.

Exemples :

x_i	n_i	f_i	F_i
4	1	7,69	7,69
5	1	7,69	15,38
7	1	7,69	23,08
8	2	15,38	38,46
9	1	7,69	46,15
10	3	23,08	69,23
11	1	7,69	76,92
12	1	7,69	84,62
13	1	7,69	92,31
16	1	7,69	100
	13	100	

x_i	n_i	f_i	F_i
4	1	6,67	6,67
5	1	6,67	13,33
7	1	6,67	20
8	2	13,33	33,33
9	2	13,33	46,67
10	3	20	66,67
11	2	13,33	80
12	1	6,67	86,67
13	1	6,67	93,33
16	1	6,67	100
	15	100	

Dans le cas d'une **variable quantitative continue** : On adapte la formule de la médiane pour le calcul des quartiles. On commence par trouver la classe i contenant le quartile qui nous intéresse. Puis on calcule :

$$Q_1 = b_{i-1} + \frac{0{,}25 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i \qquad Q_3 = b_{i-1} + \frac{0{,}75 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i$$

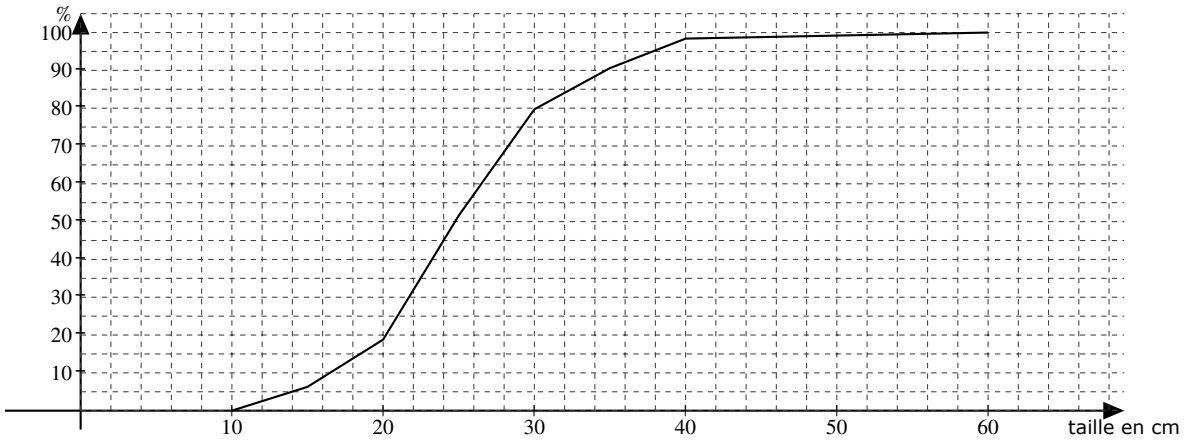
Remarque : En utilisant les mêmes principes, on peut également partager la population en dix parties égales, appelées **déciles** et notés D_1 à D_9, ou en cent parties égales, appelée **centiles**, noté C_1 à C_{99}.

Exemple : Calculer les quartiles de cette série, ainsi que D_9.

Répartition des poissons pêchés selon leur taille en cm.

Taille en cm	x_i en cm	L_i en cm	Effectif	Fréquence en %	F_i Fréquence cumulée croissante en %
[10 ; 15[	12,5	5	4	6,3	6,3
[15 ; 20[	17,5	5	8	12,5	18,8
[20 ; 25[	22,5	5	21	32,8	51,6
[25 ; 30[	27,5	5	18	28,1	79,7
[30 ; 35[	32,5	5	7	10,9	90,6
[35 ; 40[	37,5	5	5	7,8	98,4
[40 ; 60[	50	20	1	1,6	100
Total			64	100	

Retrouver ces valeurs par construction dans le graphique ci-dessous.



3.5 Indicateurs de dispersion

Après avoir calculé les mesures de tendance centrale, on peut chercher à déterminer la dispersion des données brutes de la variable statistique autour de celles-ci.

Exemple : Deux élèves X et Y ont rendu chacun 5 devoirs. Considérons les séries statistiques qui, à chaque devoir, associent une note obtenue sur 20.

Élève X : 8 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16. Élève Y : 3 ; 12 ; 12 ; 15 ; 19.

Calculer les moyennes et médianes pour chaque élève. Que se passe-t-il ?

Et pourtant, un simple coup d'œil sur les valeurs des séries statistiques permet de dire que la série Y est plus ..... que la série X.

Pour décrire une série statistique, en plus des caractéristiques de position, on considèrera les **caractéristiques de dispersion**.

3.5.1 Étendue

On appelle **étendue**, notée E, d'une série statistique la différence entre la plus grande valeur, X_{max}, et la plus petite valeur, X_{min}, des données brutes.

$$\boxed{E = X_{max} - X_{min}}$$

Elle donne une première indication sur l'ordre de grandeur des valeurs de la série. Mais elle reste très limitée, surtout si les valeurs extrêmes sont très éloignées des valeurs centrales.

3.5.2 Écart interquartile

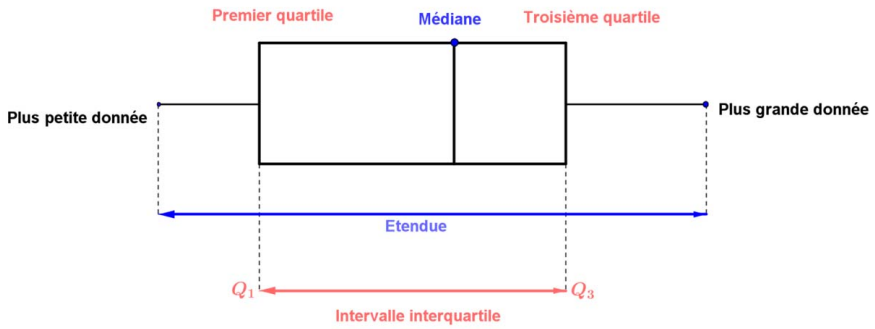
L'écart interquartile, noté EIQ ou I, est la différence entre le troisième et le premier quartile.

$$\boxed{\text{écart interquartile} = EIQ = Q_3 - Q_1}$$

3.5.3 Boîte à moustaches

On appelle **boîtes à moustaches** ou **résumé en cinq points** la représentation synthétique donnant les informations suivantes : la médiane, le premier et le troisième quartile et les valeurs extrêmes.

- Les boîtes s'étendent de Q_1 à Q_3,
- la ligne en gras marque la médiane,



Exemple : Le tableau ci-dessous recense la population de la Suisse par tranche d'âge en 2007 (en milliers) :

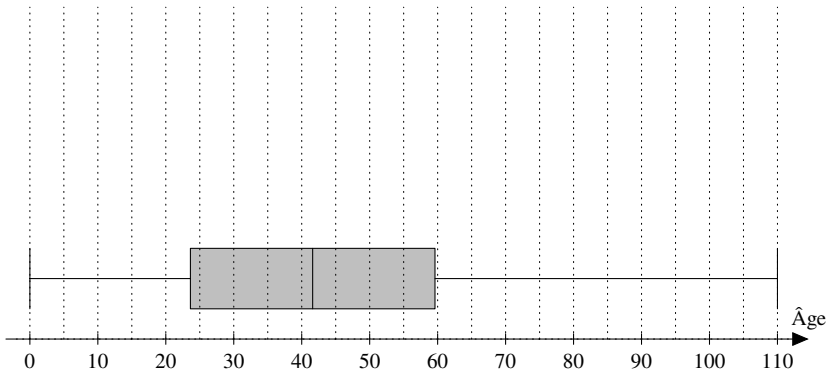
Âge	Population masculine	Population féminine	f_i masculine	F_i masculine
[0 ; 15[	605,3	571,4	0,162	0,162
[15 ; 30[	703,0	687,5	0,189	0,351
[30 ; 45[	875,6	871,2	0,235	0,586
[45 ; 60[	798,4	790,0	0,214	0,800
[60 ; 75[	520,4	569,3	0,140	0,940
[75 ; 90[	209,1	333,7	0,056	0,996
[90 ; 110[	15,1	43,3	0,004	1,000
Totaux	3726,9	3866,4	1,000	

(source: Office fédéral de la statistique OFS)

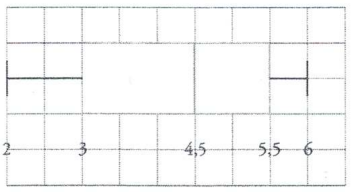
De plus, on sait que la femme la plus âgée avait 110 ans, tandis que l'homme le plus âgé avait 105 ans.

La « boîte à moustaches » représentant la population féminine est déjà dessinée.

Ajouter celle de la population masculine et comparer ces 2 distributions.



Exemple :



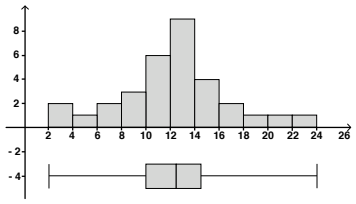
Cette boîte à moustache fournit les informations suivantes :

- La moins bonne note est 2. La meilleure note est 6.
- Au moins 25% des élèves ont fait une note inférieure ou égale à 3.
- Au moins la moitié des élèves ont fait 4,5 ou moins.
- Au moins 50% des élèves ont fait une note de 3 à 5,5.

Pour simplifier les analyses et les comparaisons de boîtes à moustaches, on supprimera les ”au moins” devant les proportions. On dira par exemple, 75% des élèves ont fait une note supérieure ou égale à 3.

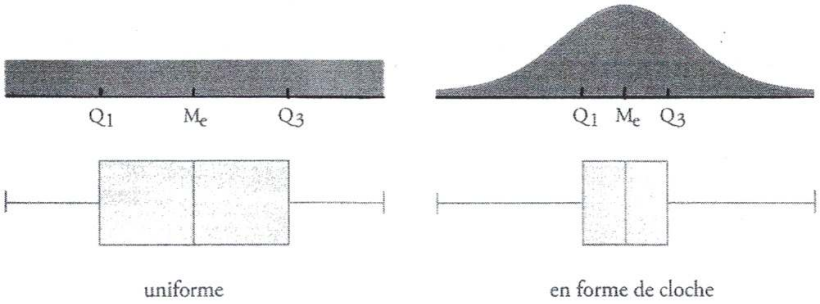
Comparer le nombre d’élèves ayant eu de 5,5 à 6 avec ceux ayant eu de 3 à 4,5.

Remarques :

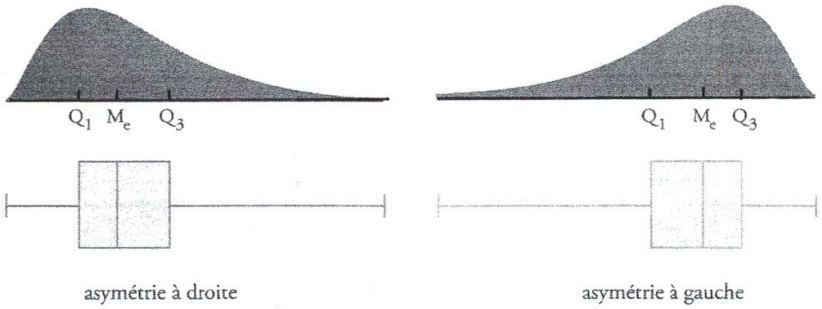


La boîte à moustaches permet une bonne visualisation de la zone centrale de la série et de la dispersion. Ce diagramme permet d’avoir une vue d’ensemble de la répartition de la série statistique. Il est intéressant lorsque l’on veut comparer des études statistiques différentes d’un même caractère. Par exemple, il permettra de comparer l’étude du nombre de cafés bus par personne le lundi avec la même étude faite les autres jours.

Plus une boîte à moustache est rétrécie, plus la distribution est « pointue », l’effectif est concentré autour de la médiane. Plus elle est étendue, plus la distribution est aplatie, l’effectif est réparti sur toutes les valeurs.



La boîte à moustache permet de voir si la distribution est asymétrique et vers quelle valeur elle se regroupe.



3.5.4 Variance

On cherche à étudier l'écartement des valeurs autour de la moyenne. On calcule l'écart entre x_1 et μ en faisant $|x_1 - \mu|$.

L'utilisation des valeurs absolues est souvent un problème en mathématique. Pour rendre positifs les écarts, un autre outil est à notre disposition : la mise au carré.

On ne va donc pas calculer la moyenne des écarts, mais la moyenne des carrés des écarts. C'est ce qu'on appelle la **variance**, notée σ^2, $\sigma^2(X)$, $V(X)$ ou v.

$$\sigma^2 = \frac{n_1(x_1 - \mu)^2 + n_2(x_2 - \mu)^2 + \ldots + n_p(x_p - \mu)^2}{N}$$

Dans le cas d'un échantillon discret, les valeurs x_i sont les modalités.

Dans le cas d'un échantillon dont les données sont regroupées en classes, les valeurs x_i représentent les centres des classes choisies.

$$\sigma^2 = \frac{n_1(x_1 - \mu)^2 + n_2(x_2 - \mu)^2 + \ldots + n_p(x_p - \mu)^2}{N}$$

La disparition des valeurs absolues permet des calculs plus simples, mais il en reste néanmoins beaucoup à faire pour arriver au résultat.

On économise beaucoup de calculs en utilisant la formule suivante :

$$\sigma^2 = f_1 \cdot x_1^2 + f_2 \cdot x_2^2 + \ldots + f_p \cdot x_p^2 - \mu^2$$

car cela se calcule rapidement en mettant une colonne supplémentaire dans notre tableau.

Exemple : Déterminer la variance de cet échantillon de tailles :

Répartition des employés selon leur taille en cm.

$[b_{i-1}\,;\,b_i[$	x_i	n_i	f_i en %	F_i en %	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
[140 ; 150[	145	2	3,7	3,7		
[150 ; 160[	155	5	9,3	13,0		
[160 ; 170[	165	8	14,8	27,8		
[170 ; 180[	175	18	33,3	61,1		
[180 ; 190[	185	14	25,9	87,0		
[190 ; 200[	195	6	11,1	98,1		
[200 ; 210[	205	1	1,9	100		
Total		54	1			

Démonstration de la formule :

$$\sigma^2 = \frac{n_1(x_1-\mu)^2 + n_2(x_2-\mu)^2 + ... + n_p(x_p-\mu)^2}{N}$$

$$= \frac{n_1(x_1^2 - 2x_1\mu + \mu^2) + n_2(x_2^2 - 2x_2\mu + \mu^2) + ... + n_p(x_p^2 - 2x_p\mu + \mu^2)}{N}$$

$$= \frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + ... + n_px_p^2}{N} - \frac{2n_1x_1\mu + 2n_2x_2\mu + ... + 2n_px_p\mu}{N} + \frac{n_1\mu^2 + n_2\mu^2 + ... + n_p\mu^2}{N}$$

$$= \frac{n_1}{N}x_1^2 + \frac{n_2}{N}x_2^2 + ... + \frac{n_p}{N}x_p^2 - 2\mu\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_px_p}{N} + \mu^2\frac{n_1 + n_2 + ... + n_p}{N}$$

$$= f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + ... + f_px_p^2 - 2\mu\cdot\mu + \mu^2\cdot 1$$

$$= f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + ... + f_px_p^2 - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + ... + f_px_p^2 - \mu^2$$

Exemple : Déterminer la variance des résultats de ce test :

Répartition des élèves selon

la note obtenue au test de maths

Note x_i	n_i	f_i en %
1	1	4
2	2	8
3	4	16
4	8	32
5	7	28
6	3	12
Total :	25	100

3.5.5 Écart-type

En raison de la mise au carré des écarts, l'unité de la variance est le carré de celle du caractère d'où l'impossibilité d'additionner la moyenne et la variance (si le caractère est en kg, sa moyenne est en kg, mais sa variance est en kg^2).

On préfère donc l'**écart-type**, noté σ ou $\sigma(X)$ ou s, qui est la racine carrée de la variance. Son unité est la même que celle de la moyenne. Cela a l'air anecdotique, mais la possibilité d'additionner moyenne et écart-type est fondamentale, en particulier pour le calcul d'intervalle de confiance.

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2}}$$

Exemple : Calculer l'écart-type pour les deux exemples précédents.

Les écarts-types connaissent de nombreuses applications. En théorie des sondages, on utilisera l'écart-type d'un échantillon choisi au hasard pour évaluer la dispersion de la population tout entière. En physique, on s'en sert pour calculer l'erreur de mesure. En finance, l'écart-type est une mesure de la volatilité d'un actif.

Propriétés de l'écart-type :

- L'écart-type est toujours positif. Il est nul si la série statistique est constante.

- **Sensibilité aux valeurs extrêmes :**
  Comme la moyenne, l'écart-type est sensible aux valeurs extrêmes ou aberrantes et il est parfois nécessaire d'éliminer ces valeurs avant de faire le calcul de l'écart-type.

3.5.6 La cote Z

La cote Z permet de relativiser un écart à la moyenne d'une donnée brute. L'exemple suivant va nous aider à comprendre cette notion.

Exemple : Un employeur désire engager un étudiant pour l'été afin qu'il l'aide à terminer une étude de marché. Comme le travail requiert des connaissances en statistique, il décide de choisir la personne la plus performante parmi les quatre candidats qui ont suivi un cours de statistique. Voici les résultats des 4 candidats.

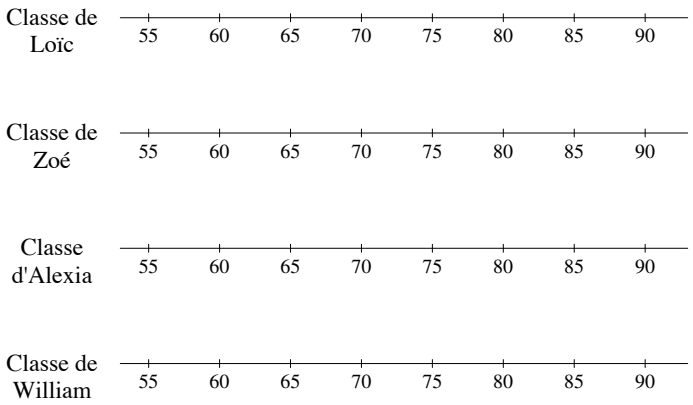
Candidat	Note	Moyenne de classe	Écart-type de la classe
Loïc	80	75	10
Zoé	80	70	10
Alexia	70	60	4
William	85	90	5

Si l'employeur se fie à la note seulement, quel devrait être son choix ?

S'il considère en plus les moyennes de classe ?

Et s'il tient compte de la note, de la moyenne et de l'écart-type, qui devrait-il embaucher ?

Représentons sur les diagrammes suivants la moyenne de classe et l'écart-type et la note de l'étudiant(e).



Position de chaque note par rapport aux autres notes de la classe :

- Comme la note de Loïc se situe à la moitié d'un écart-type au-dessus de la moyenne sa classe, on dit que sa cote Z est égale à $+0{,}5$.

- Comme la note de Zoé se situe à 1 écart-type au-dessus de la moyenne de sa classe , on dit que sa cote Z est égale à $+1$.

- Comme la note d'Alexia se situe à $2{,}5$ fois l'écart-type au-dessus de la moyenne de sa classe , on dit que sa cote Z est égale à $+2{,}5$.

- Comme la note de William se situe à 1 écart-type au-dessous de la moyenne de sa classe , on dit que sa cote Z est égale à -1.

Ainsi la cote Z donne la mesure, en nombre d'écarts-types, de l'écart entre une valeur et la moyenne.

La **cote** Z, aussi appelée **cote standard**, est une mesure de position d'un objet par rapport à la moyenne du groupe. Concrètement, cette mesure donne la distance entre une donnée et la moyenne **en nombre d'écarts-types**.

Pour déterminer une cote Z, il faut d'abord déterminer la moyenne puis l'écart-type. Ensuite, on utilise la formule suivante pour déterminer la valeur de la cote Z de la donnée x_i :

$$\boxed{\text{cote } Z = \frac{x_i - \mu}{\sigma}}$$

La cote Z est particulièrement utile pour comparer des résultats de nature différente. Il est important de savoir qu'une cote Z plus grande que 2 ou plus petite que -2 est assez rare, et qu'une cote Z plus grande que 3 ou plus petite que -3 est rare. C'est pour cette raison que les valeurs indiquées sur une échelle de cote Z sont généralement comprises entre -3 et $+3$.

Exemple : Chaque semaine, un géant de l'alimentation publie une circulaire annonçant les soldes du jeudi pour toutes ses épiceries. Le gérant de l'une de ces épiceries décide un jour d'en faire un peu plus en plaçant une annonce dans le journal local. Le jeudi suivant la parution de l'annonce, il reçoit $2'280$ clients alors qu'habituellement, le jeudi, la moyenne est de $2'000$ clients avec un écart-type de 80 clients.

Peut-il en conclure que son annonce dans le journal local a eu de l'effet ? Un écart de 280 clients par rapport à la moyenne est-il significatif ?

3.6 Statistique bivariée

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des séries statistiques univariées. C'est-à-dire que pour une population donnée, nous avons étudié un seul caractère (variable statistique).

L'intérêt des statistiques bivariées est d'étudier deux caractères différents d'une même population et de voir si un lien existe entre eux, on appelle cela une corrélation.

Exemples :

- Population : citoyen.ne.s suisses
  caractères 1 : âge caractère 2 : mortalité
- Population : citoyen.ne.s suisses
  caractères 1 : sexe caractère 2 : risque d'accidents de la route
- Population : élèves du gymnase
  caractères 1 : taille caractère 2 : réussite aux examens

On considère une population d'effectif n sur laquelle on étudie deux caractères X et Y dont on connaît les modalités x_i et y_i pour chaque individu. On appelle cela une **série statistique double** des caractères X et Y.

On peut la représenter sous forme d'un tableau :

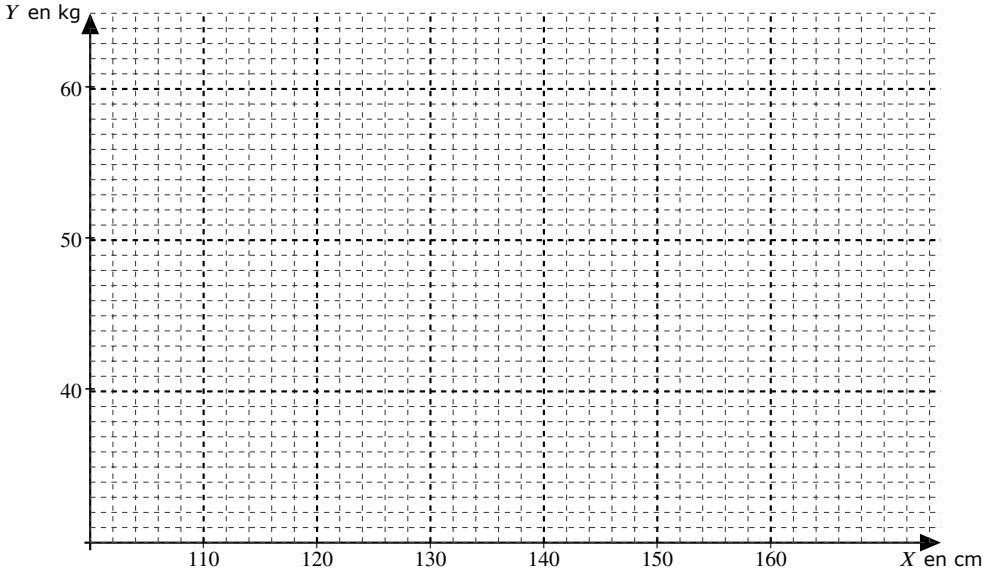
x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_i	y_1	y_2	…	y_n

Exemple : Relevé de la taille X en cm et du poids Y en kg de 20 élèves :

X en cm	155	158	158	159	163	163	165	168	170	172
Y en kg	67,1	60,7	54,9	58,8	64,7	60,4	63	62,5	71,5	70,8

X en cm	173	175	176	178	178	180	182	186	189	196
Y en kg	63,1	74,8	71,1	73,1	63,5	69,4	70	82	76,5	84,6

On peut représenter ces données sous forme d'un **graphique en nuage de points**.

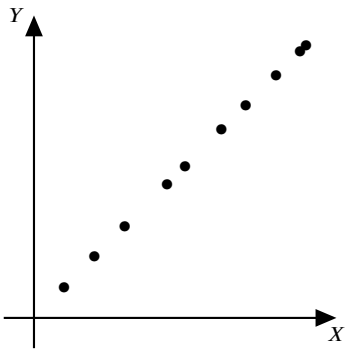


Interprétation des graphiques en nuage de points

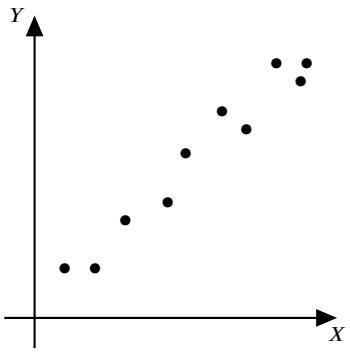
Afin de pouvoir interpréter un graphique en nuage de points, on va y tracer (lorsque c'est possible) une droite qui passe au plus près des points dessinés. On l'appellera la **droite d'ajustement** ou **droite de régression**.

Plus les points sont proches de la droite d'ajustement, plus la série bivariée aura une **corrélation à tendance linéaire**.

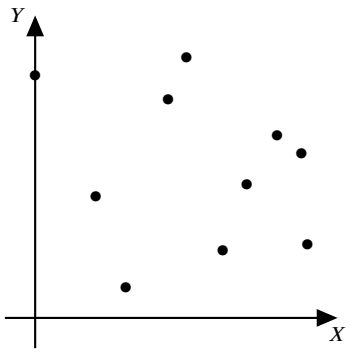
Voici quelques graphiques types :



Tendance linéaire parfaite

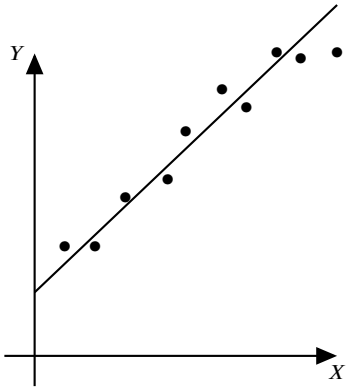


Tendance linéaire modérée

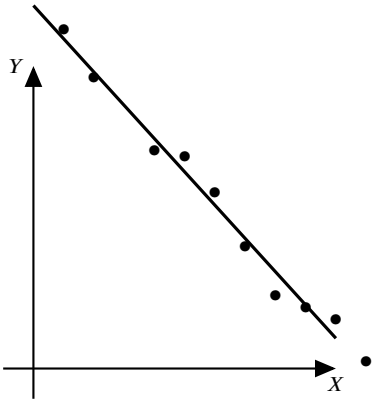


Aucune tendance linéaire

Lorsqu'une tendance linéaire est observable, on distingue les cas suivants en fonction du signe de la pente de la droite d'ajustement :



Corrélation linéaire positive



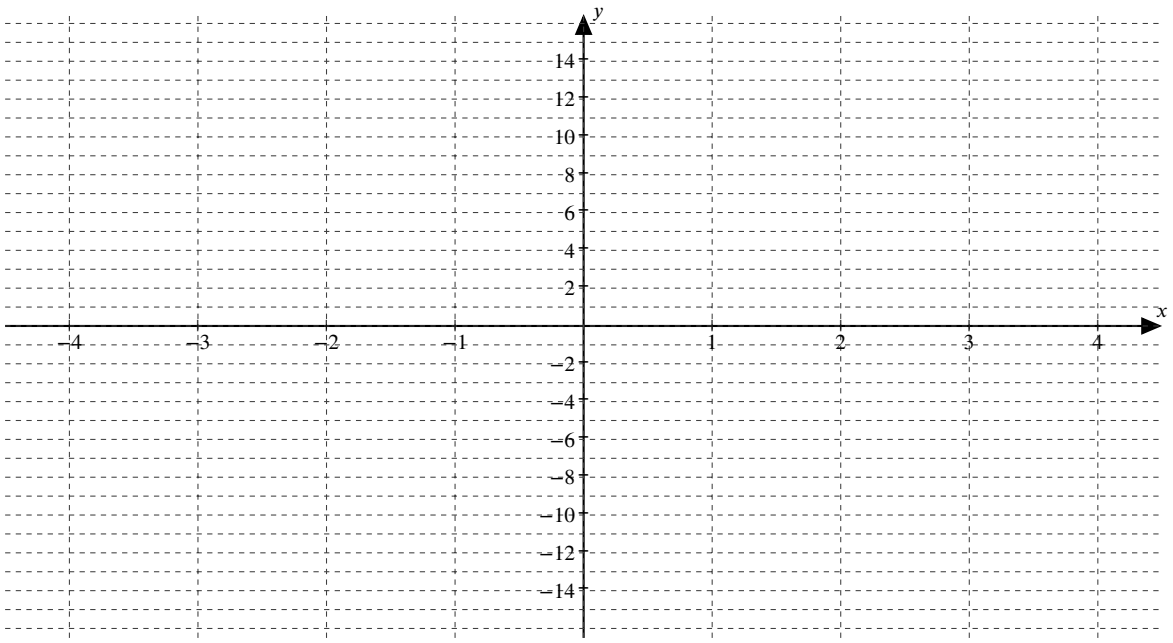
Corrélation linéaire négative

4 Signe d'une fonction

4.1 Introduction

Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement la fonction f.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = (x+2)(x+0{,}5)(x-3)$							



Jusqu'à présent, nous avons utilisé un tableau de valeurs pour dessiner le graphe des fonctions. Cependant, cet outil n'est pas toujours idéal. On peut remarquer que les valeurs intéressantes, comme par exemple les zéros de la fonction, n'apparaissent pas systématiquement dedans. De plus, il y a beaucoup de calculs à effectuer pour le remplir.

Il est parfois plus approprié d'utiliser le **tableau des signes de la fonction**. C'est un tableau dans lequel la première ligne contient les zéros et les valeurs interdites de la fonction, tandis que la deuxième indique le signe des images obtenues :

x		-2		$-0{,}5$		3	
$f(x) = (x+2)(x+0{,}5)(x-3)$	−	0	+	0	−	0	+

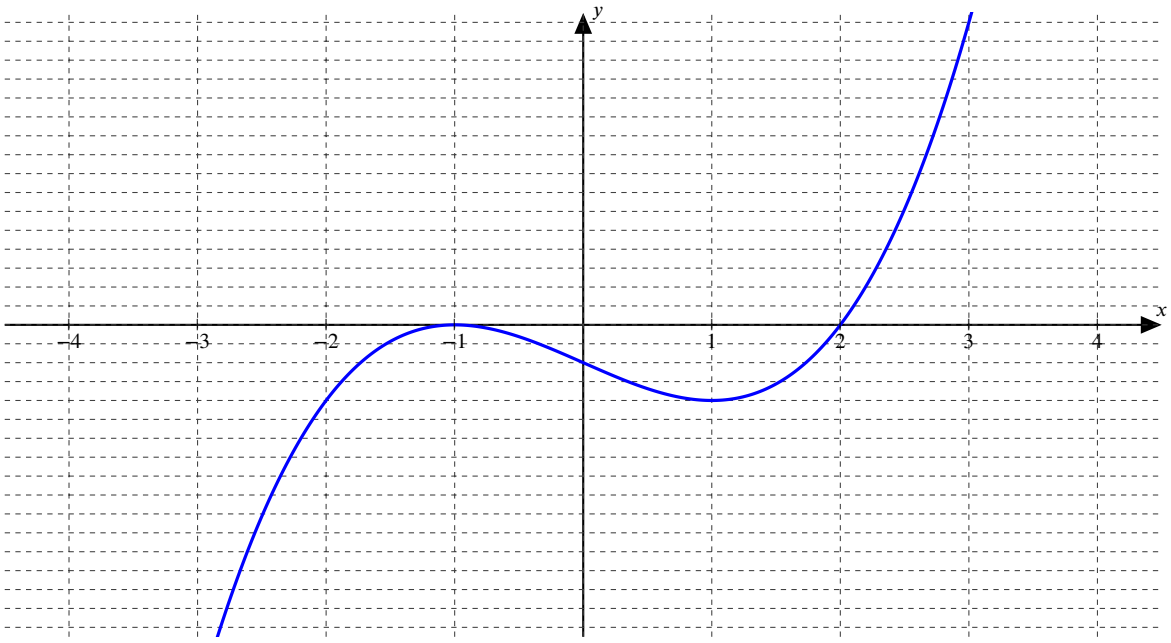
ou

x	-2		-0.5		3	
$f(x) = (x+2)(x+0.5)(x-3)$	−	0	+	0	−	0	+

On dit alors qu'on **étudie le signe de la fonction**.

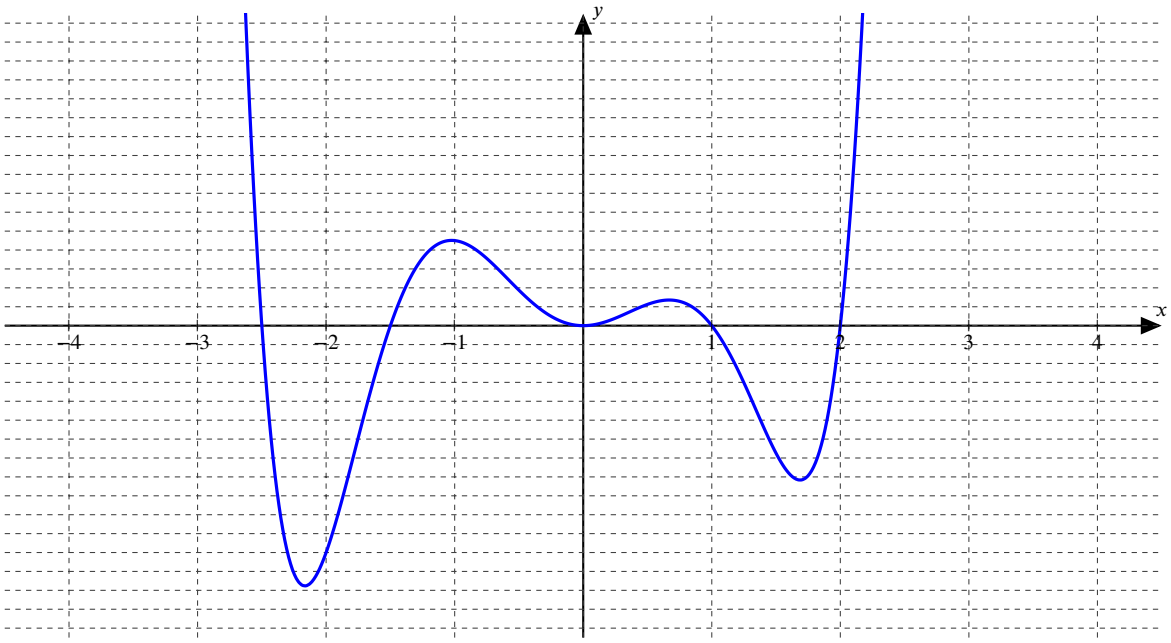
Exemples : Compléter le tableau des signes des fonctions représentées ci-dessous.

a)



x	
$f(x)$	

b)

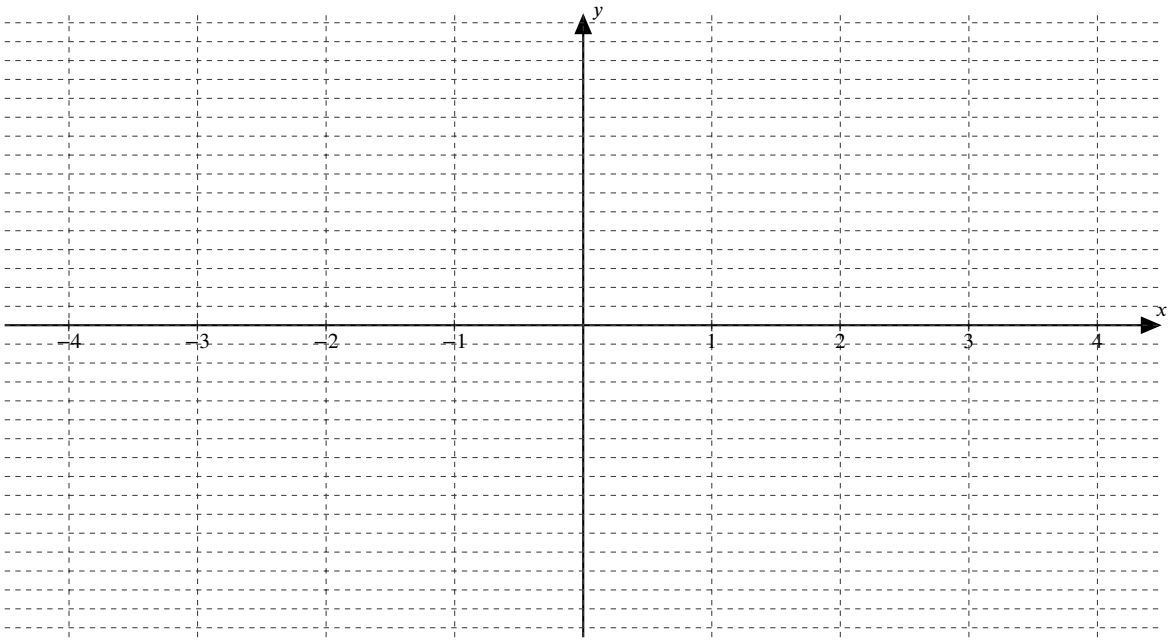


x	
$f(x)$	

Exemples : Faire une esquisse du graphe d'une fonction correspondant au tableau des signes.

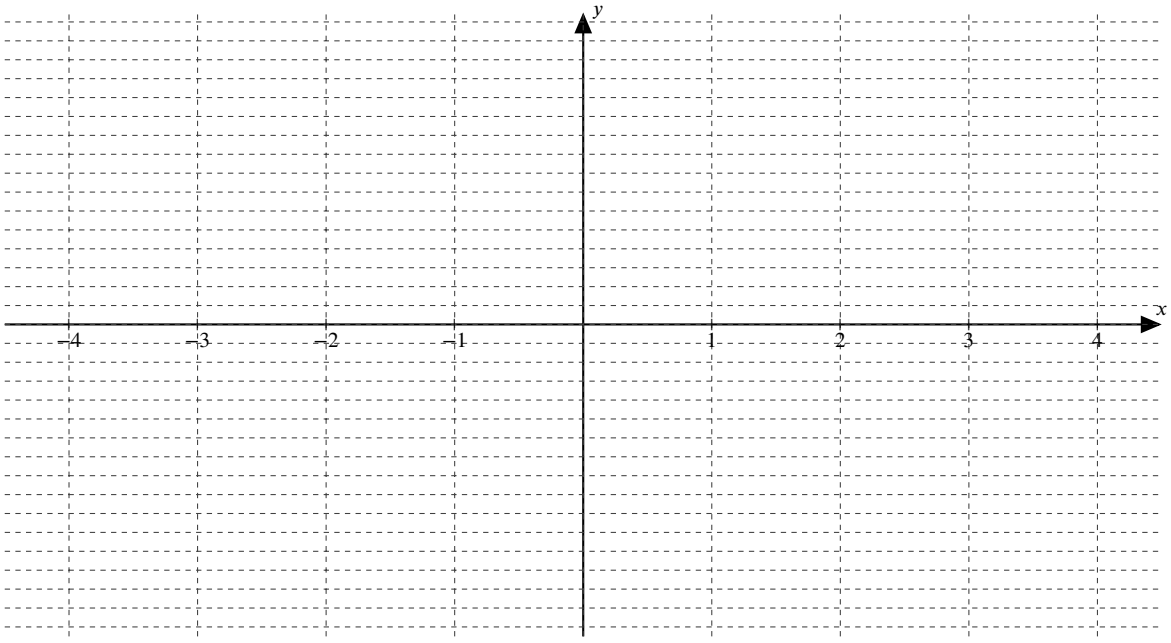
a)

x		-3		-1		$3{,}5$	
$f(x)$	–	0	+	0	+	0	+



b)

x		-2		0		$1{,}5$		3	
$f(x)$	+	0	–	0	+	0	–	0	–



4.2 Signe d'un produit

Exemple : Compléter ce tableau de valeurs, puis le tableau des signes correspondant.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$4x$									
$x+3$									
$2-x$									
$4x(x+3)(2-x)$									

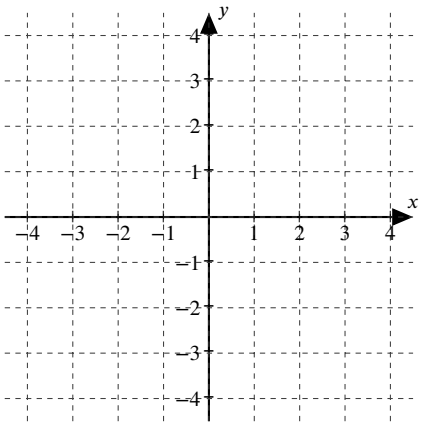
x	
$4x$	
$x+3$	
$2-x$	
$4x(x+3)(2-x)$	

On peut observer que le signe du produit est déterminé par les signes des facteurs et la règle des signes. Or tout polynôme est décomposable en produit de facteurs du 1^{er} et du 2^{e} degrés. Nous allons donc étudier le signe des fonctions affines et quadratiques et nous en servir pour trouver le signe des autres polynômes.

4.3 Signe d'une fonction affine

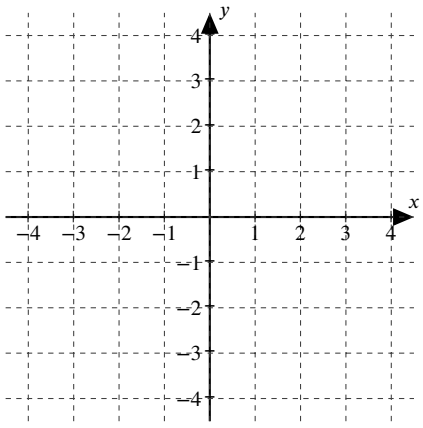
Exemples : Représenter le graphe de la fonction puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x) = 2x + 1$



x	
$f(x)$	

b) $g(x) = -2x + 1$



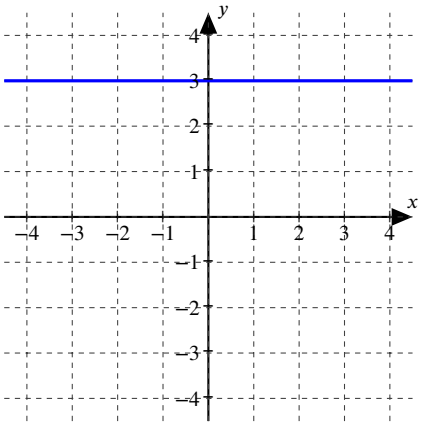
x	
$f(x)$	

Observations : Le graphe d'une fonction affine $f(x) = mx + h$ est une droite. On a donc les cas de figures suivants :

(A) Si $m = 0$, la fonction est constante et son signe est celui de h.

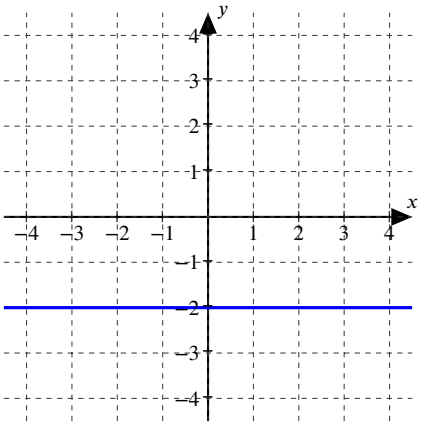
Exemples :

a) $f(x) = 3$



x	
$f(x)$	+

b) $g(x) = -2$

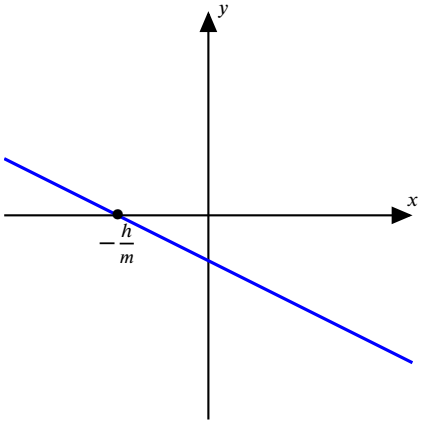


x	
$g(x)$	−

(B) Si $m \neq 0$, la fonction a un unique zéro, que l'on trouve en résolvant l'équation $mx + h = 0$.

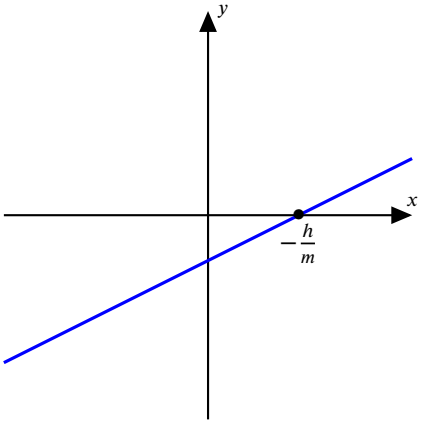
Le signe de la fonction dépend du signe de la pente m.

- si la pente est négative



x		$-\frac{h}{m}$	
$f(x)$	+	0	−

- si la pente est positive



x		$-\frac{h}{m}$	
$f(x)$	−	0	+

Exemples : Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$5x+10$	

b)

x	
$5x-10$	

c)

x	
$-5x+10$	

d)

x	
$-5x-10$	

e)

x	
$-5x$	

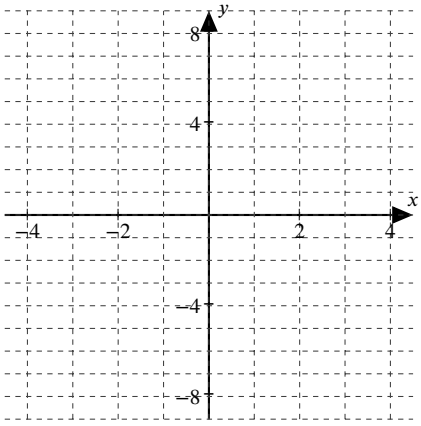
f)

x	
-10	

4.4 Signe d'une fonction quadratique

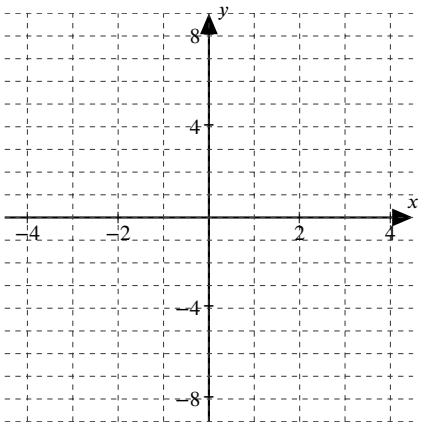
Exemples : Représenter le graphe de la fonction puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x)=x^2-9$



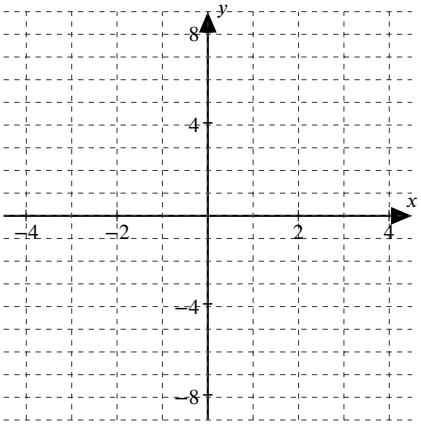
x	
$f(x)$	

b) $g(x)=x^2+3x$



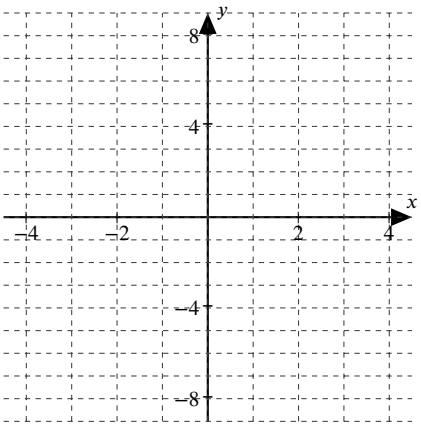
x	
$g(x)$	

c) $h(x)=-x^2+9$



x	
$h(x)$	

d) $i(x)=-0{,}5x^2$

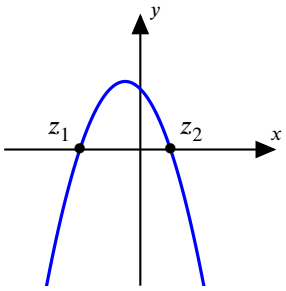


x	
$i(x)$	

Observations : Le graphe d'une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole. On a donc les cas de figures suivants :

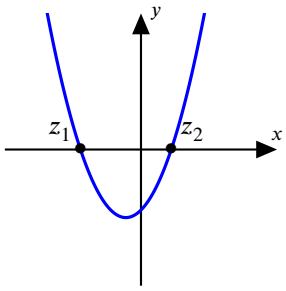
(A) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la fonction a deux zéros, que l'on peut calculer grâce à $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- si $a < 0$



x		z_1		z_2	
$f(x)$	−	0	+	0	−

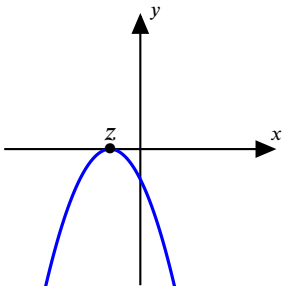
- si $a > 0$



x		z_1		z_2	
$f(x)$	+	0	−	0	+

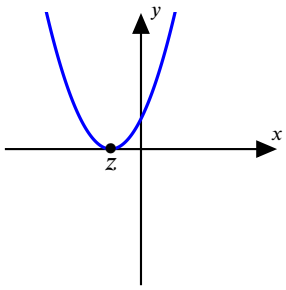
(B) Si $\Delta = 0$, la fonction a un seul zéro, que l'on peut calculer grâce à $z = \dfrac{-b}{2a}$.

- si $a < 0$



x		z	
$f(x)$	−	0	−

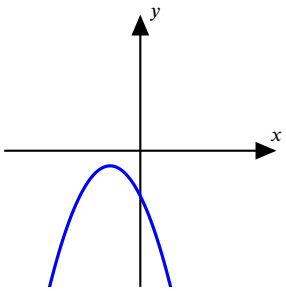
- si $a > 0$



x		z	
$f(x)$	+	0	+

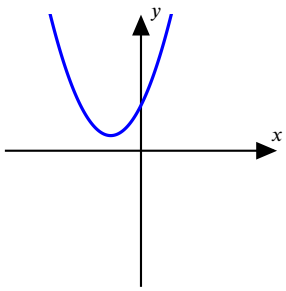
(C) Si Δ est négatif, la fonction n'a pas de zéro.

- si $a < 0$



x	
$f(x)$	−

- si $a > 0$



x	
$f(x)$	+

Exemples : Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$x^2+7x+10$	

b)

x	
$-9x^2+6x-1$	

c)

x	
$2x^2+x+1$	

d)

x	
$-x^2-16$	

e)

x	
x^2-6x+9	

f)

x	
$-2x^2+x+1$	

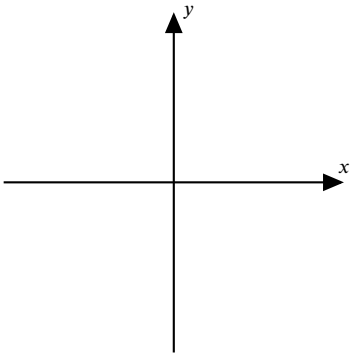
4.5 Signe d'une fonction polynomiale

La première étape est de factoriser le polynôme à l'aide des différentes méthodes que nous avons étudiées :

- mise en évidence,
- identités remarquables ;
- changement de variable ;
- méthode du groupement ;
- division polynomiale.

Ensuite, il faut faire un tableau des signes avec une ligne par facteur, puis remplir la ligne finale à l'aide de la règle des signes.

Exemple : Étudier le signe de la fonction $f(x)=-2x^6+20x^4-18x^2$ et faire une esquisse du graphe de la fonction.



4.6 Signe de $(g(x))^n$

Exemples :

a) Étudier le signe de la fonction $f(x) = (x+2)^4$.

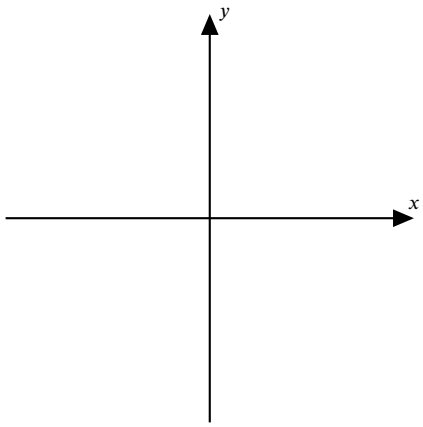
b) Étudier le signe de la fonction $f(x) = (x+2)^5$.

Observations :

- Lorsque n est pair, le signe de $(g(x))^n$ est :

- Lorsque n est impair, le signe de $(g(x))^n$ est :

Exemple : Étudier le signe de la fonction $f(x) = 5x^3(2-x)^2(7x+4)^5$ et faire une esquisse du graphe de la fonction.



Quels sont les zéros de la fonction qui occasionnent un changement de signe ?

4.7 Signe d'une fonction rationnelle

Exemple : Compléter ce tableau de valeurs, puis le tableau des signes correspondant.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x+1$									
$2-x$									
$\frac{x+1}{2-x}$									

x	
$x+1$	
$2-x$	
$\frac{x+1}{2-x}$	

Observations : On peut observer que le signe du quotient est déterminé par le signe du numérateur, celui de dénominateur et la règle des signes.

Les zéros du numérateur sont les zéros de la fonction.

Les zéros du dénominateur sont les **valeurs interdites** de la fonction.

Pour les fonctions rationnelles, il est important de préciser **l'ensemble de définition** de la fonction : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\text{valeurs interdites}\}$

Exemple : Donner l'ensemble de définition et étudier le signe de la fonction $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2+4x}$.

4.8 Inéquations

Seules les inéquations du premier degré peuvent être résolues algébriquement. Pour les degrés supérieurs, il faut les résoudre graphiquement ou, plus simplement, utiliser un tableau des signes.

Exemples : Résoudre.

a) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$

b) $x^3 - 11x^2 < 26x$

4.9 Ensemble de définition d'une racine carré

Pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{g(x)}$, il faut résoudre l'inéquation $g(x) \geq 0$, donc dans la plupart des cas il faut faire le tableau des signes de la fonction g.

Exemples : Déterminer l'ensemble de définition de $f(x)$.

a) $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 6}$

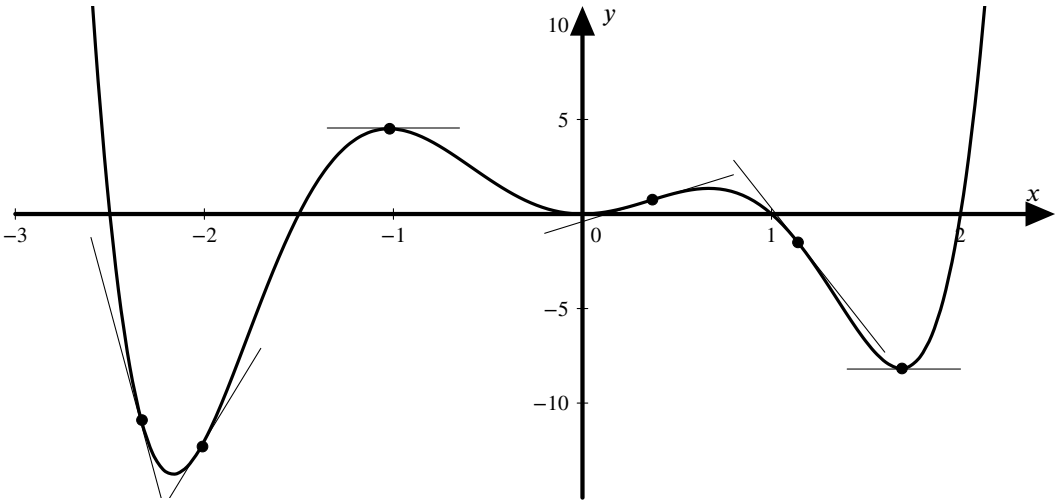
b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$

5 Dérivées

5.1 Définition

Lorsqu'on esquisse le graphe d'une fonction à partir de son tableau des signes, on réalise qu'il nous manque des points importants : les maximums et les minimums. Comme nous l'avons déjà vu, ces points sont souvent recherchés dans les problèmes d'optimisation.

Pour les déterminer, il faut s'intéresser à la **croissance** de la fonction et pour cela, nous allons observer la **pente de la tangente au graphe de** f :

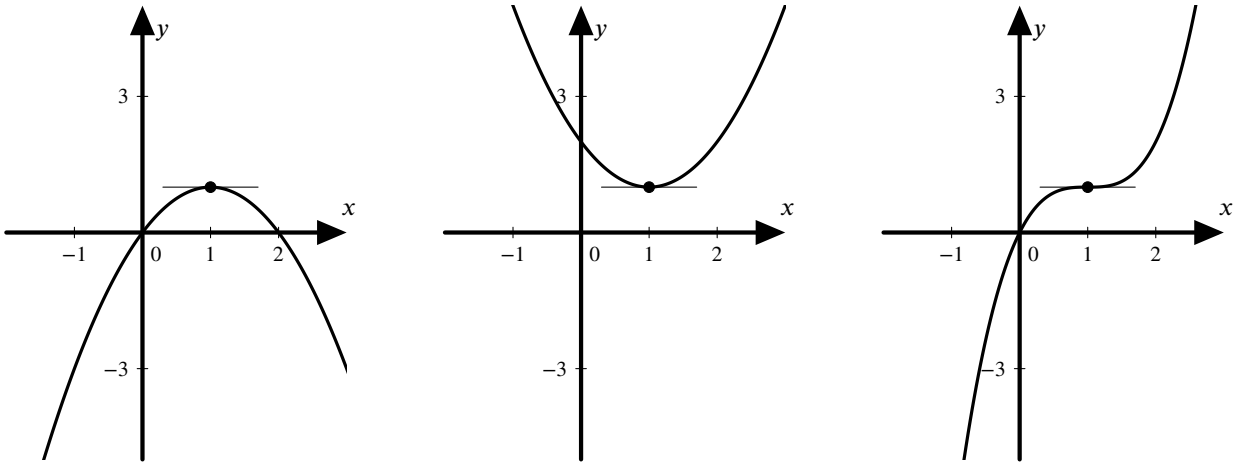


Cette pente dépend du point du graphe choisi.

Lorsque cette pente est négative, la fonction est dite **décroissante** autour de ce point.

Lorsque cette pente est positive, la fonction est dite **croissante** autour de ce point.

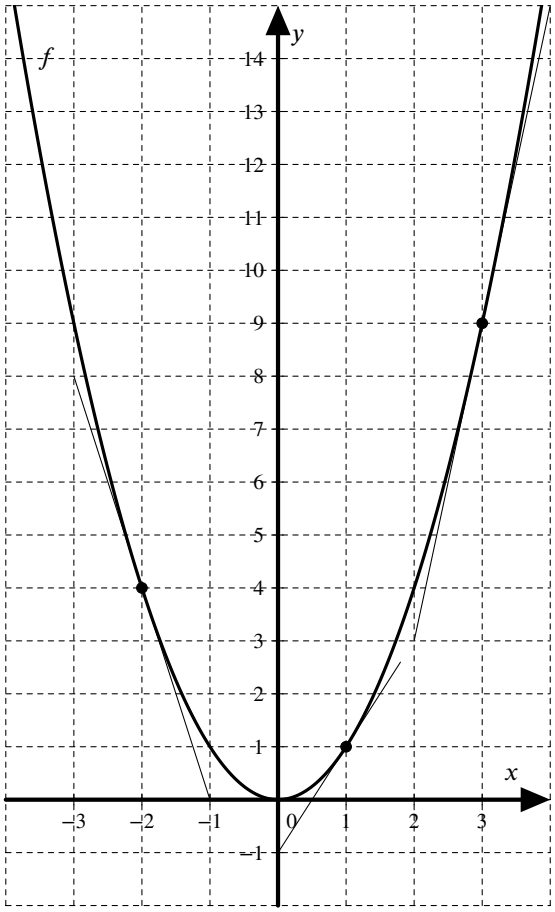
Lorsque cette pente est nulle, le point peut être soit un **extremum local**, c'est-à-dire un **maximum local** ou un **minimum local**, soit un **replat** :



La **dérivée** d'une fonction f est la fonction notée f', qui donne pour chaque x la pente de la tangente au graphe de f au point $(x\,;f(x))$.

Exemples : Compléter le tableau en calculant les pentes à l'aide du graphique, puis chercher l'expression algébrique de f'.

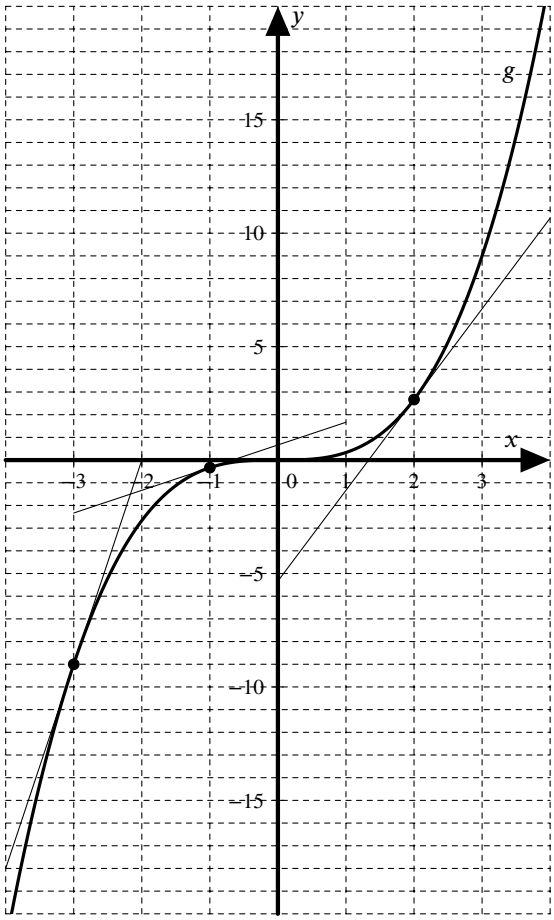
a) $f(x) = x^2$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							

$f'(x) =$

$g(x) = \frac{1}{3}x^3$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g'(x)$							

$g'(x) =$

Exemple : Décrire la croissance d'une fonction f dont la dérivée est $f'(x) = x + 2$ et faire l'esquisse d'une fonction correspondant à cette croissance.

Exemples : Esquisser le graphe de la fonction et en déduire la dérivée.

a) $f(x) = 7$

b) $g(x) = 7x$

c) $h(x) = x$

d) $i(x) = x + 7$

e) $j(x) = -2x + 7$

5.2 Règles de dérivation

Pour déterminer la dérivée d'une fonction plus rapidement, de manière rigoureuse et sans connaître son graphe, les mathématiciens ont démontré les règles de calculs ci-dessous :

Règle de base n°1 : $\boxed{(x^k)' = kx^{k-1}}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$

Exemples :

a) $(x^7)' =$

b) $(x)' =$

c) $(1)' =$

Cette règle est aussi valable pour les exposants négatifs :

Exemples :

a) $\left(\frac{1}{x}\right)' =$

b) $\left(\frac{1}{x^8}\right)' =$

Ainsi que pour les exposants rationnels :

Exemples :

a) $\left(\sqrt[3]{x}\right)' =$

b) $\left(\sqrt{x^3}\right)' =$

c) $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)' =$

Règle de base n°2 : $\boxed{[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

Exemples :

a) $(-5x^4)' =$

b) $(4x)' =$

c) $(7)' =$

d) $\left(\frac{x^2}{3}\right)' =$

e) $\left(\frac{3}{x^2}\right)' =$

Règle de la somme : $\boxed{[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)}$

Exemples :

a) $(x+5)' =$

b) $(5x^2-4x+3)' =$

Règle du produit : $\boxed{[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$

Exemples :

a) $\left[x^3(4x+7)\right]' =$

b) $\left[(7-3x^2)(x^2+x+1)\right]' =$

Règle du quotient : $\boxed{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}}$

Exemples :

a) $\left[\frac{5x+3}{x^2+3}\right]' =$

b) $\left[\frac{x^2+6x+7}{x^5}\right]' =$

Règle de la puissance : $\boxed{\left[f(x)^k\right]' = k \cdot f'(x) \cdot f(x)^{k-1}}$ pour tout $k \in \mathbb{Q}$

Exemples :

a) $\left[(4x+5)^2\right]' =$

b) $\left[(x^6+4x^3+2)^7\right]' =$

c) $\left[\frac{1}{(x+5)^3}\right]' =$

d) $\left[\left(\frac{2x-1}{5x+6}\right)^4\right]' =$

e) $\left[\sqrt{x^2+7}\right]' =$

Lorsque des puissances sont à l'intérieur d'un produit ou d'un quotient, il est conseillé de procéder par **mise en évidence** juste après avoir appliqué la formule de dérivation.

Exemples :

a) $\left[(2x-1)^2 \cdot (x+6)^9\right]' =$

b) $\left[\frac{x^5+2}{(7-x^2)^4}\right]' =$

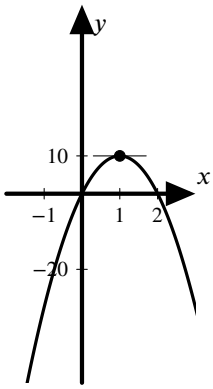
5.3 Étude de la croissance

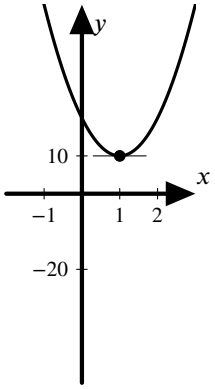
Pour étudier la croissance d'une fonction, on fait le tableau des signes de sa dérivée et on l'analyse. Ce tableau s'appelle le **tableau de croissance**.

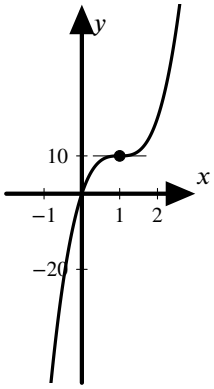
Lorsque $f'(x)$ est négatif, la fonction est décroissante, ce que nous noterons par $\searrow$.

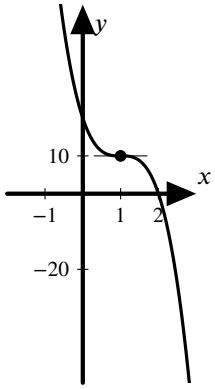
Lorsque $f'(x)$ est positif, la fonction est croissante, ce que nous noterons par $\nearrow$.

Si $f'(x) = 0$, le point est un point particulier, il faut donc calculer ses coordonnées $(x\,;f(x))$. On indiquera aussi s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un replat.









x		1	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$\nearrow$	MAX $(1\,;10)$	$\searrow$

x		1	
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$\searrow$	MIN $(1\,;10)$	$\nearrow$

x		1	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	plat $(1\,;10)$	$\nearrow$

x		1	
$f'(x)$	−	0	−
$f(x)$	$\searrow$	plat $(1\,;10)$	$\searrow$

Exemple : Étudier la croissance de $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x - 16$ et faire une esquisse du graphe.

Exemple : Étudier la croissance de $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-3}$ et faire une esquisse du graphe.

6 Optimisation

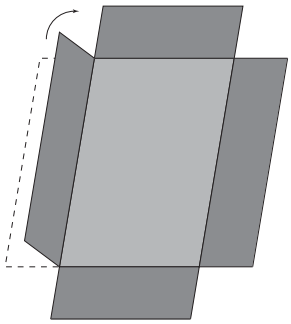
Comme nous l'avons vu dans le chapitre « Optimisation quadratique », les problèmes d'optimisation sont des problèmes où l'on cherche à déterminer quand une quantité atteint son maximum ou minimum.

Nous allons procéderons selon le plan ci-dessous :

- Lire soigneusement tout le problème et effectuer éventuellement un croquis de la situation.
- Déterminer les variables avec leur unité et leur domaine de variation.
- Écrire les équations liant les différentes variables (contraintes du problème).
- Définir la quantité à optimiser avec son unité et l'exprimer en fonction des variables choisies.
- Utiliser les équations des contraintes et substituer pour n'avoir plus qu'une seule variable dans la fonction à optimiser.
- Étudier la croissance de cette fonction en se limitant au domaine de variation.
- Répondre en comparant les extremums trouvés avec les valeurs obtenues au bord du domaine de variation.
- Donner la réponse au problème à l'aide d'une phrase, sans oublier les unités.

Exemple : On souhaite construire une boîte en découpant un carré à chaque coin d'une feuille cartonnée, puis en rabattant les bords restants. La feuille mesure 22 cm de long et 18 cm de large.

Calculer la dimension des carrés qui donne la boîte avec le plus grand volume possible.

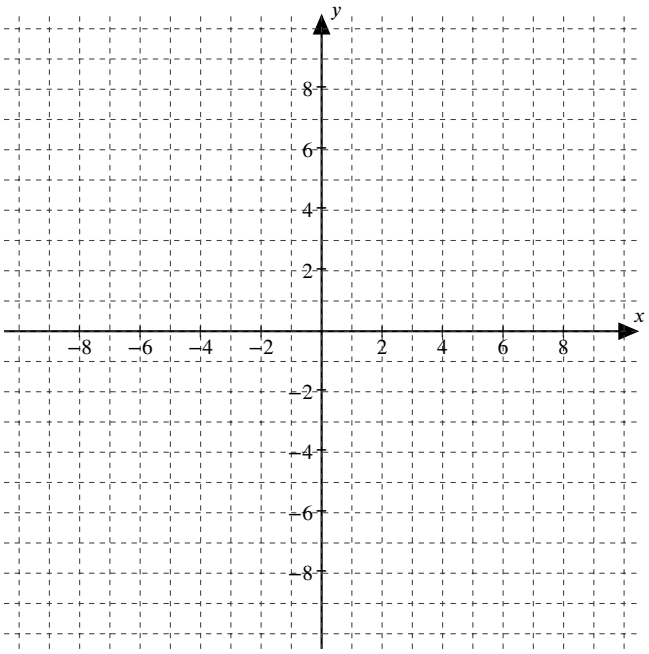


7 Exercices

7.1 Inéquations du premier degré à une inconnue

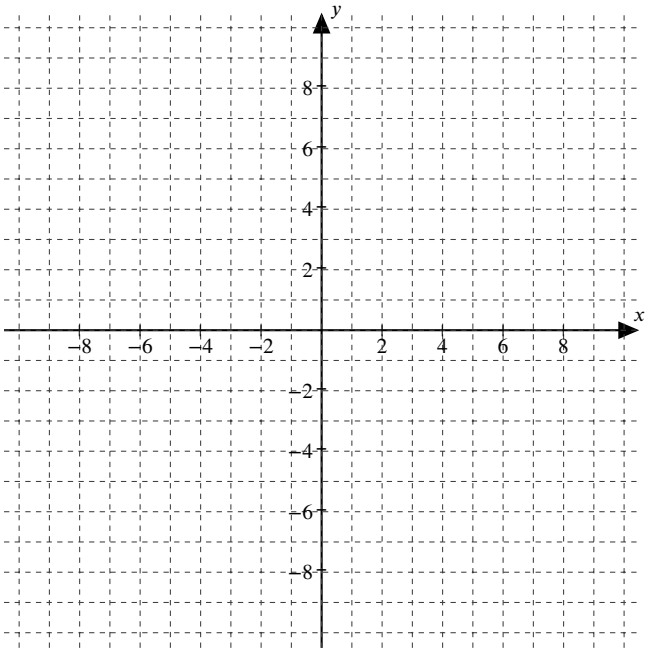
Exercice 1.1 Résoudre ces inéquations par voie graphique.

a) $\frac{2}{3}x - 5 \leq -x + 5$ b) $4x + 5 \geq \frac{2}{3}x - 5$ c) $4x + 5 < -x + 5$



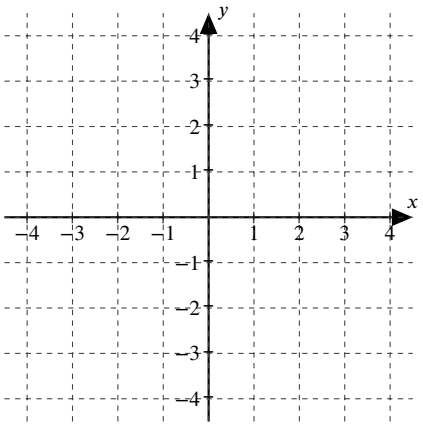
Exercice 1.2 Résoudre ces inéquations par voie graphique.

a) $\frac{1}{2}x + 2 > -x - 4$ b) $\frac{7}{2}x - 4 \leq -x - 4$ c) $\frac{1}{2}x + 2 > \frac{7}{2}x - 4$



Exercice 1.3 Représenter graphiquement les fonctions définies par les expressions algébriques ci-dessous sur un même graphique et dessiner la droite d'équation $y = x$.

$$f(x) = -2x + 3 \qquad g(x) = \frac{1}{2}x - 2$$



Résoudre ensuite les équations et inéquations suivantes :

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = g(x)$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) < 0$

e) $f(x) > g(x)$

f) $f(x) \geq x$

Exercice 1.4 Résoudre algébriquement les inéquations ci-dessous.

a) $-2 \leq 2x$

b) $-2 \leq -2x$

c) $x + 7 > 17$

d) $3x + 5 \leq 4x$

e) $-3x \geq 3x - 6$

f) $8x + 3 < 33 + 6x$

g) $2x > 5x$

h) $-4x + 1 < -2$

i) $2x + 3 \leq -5 - 3x$

Exercice 1.5 Résoudre algébriquement les inéquations ci-dessous.

a) $x - 6 < \frac{8}{5}x$

b) $\frac{2}{3}x < 6(-x + 5)$

c) $\frac{1}{3}x - 1 \leq \frac{8}{5}x$

d) $\frac{2}{3}x \leq -\frac{5x + 30}{2}$

e) $2(x - 6) < \frac{8}{5}x + 2$

f) $-4x > \frac{24}{7}$

g) $\frac{3}{4}(12x - \frac{8}{15}) \geq 6x - 7$

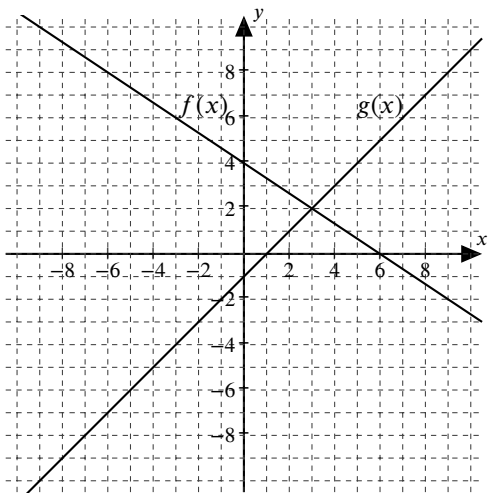
h) $x^2 - 12x + 36 < x^2 + 4x + 4$

i) $4x + 4 > \frac{-x + 30}{3} - 1$

Exercice 1.6

a) Résoudre $f(x) \leq g(x)$ pour $f(x)$ et $g(x)$ représentés ci-dessous.

b) Résoudre cette même inéquation algébriquement.



Exercice 1.7 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $5 - 2x \geq 1$

b) $-4x - 5 < x + 5$

c) $-(7 - 2x) - 8 \geq 0$

d) $1 - 3x \leq \frac{1}{3}(8 + 2x)$

e) $2x - \frac{x-5}{3} > 4 - \frac{2x-2}{2}$

f) $\frac{4-x}{2} - \frac{x-3}{5} \geq x - \frac{x+2}{3}$

Exercice 1.8 Au moment d'acheter une nouvelle grue, une entreprise de construction a le choix entre :

- Le modèle A : CHF $50'000.–$ à l'achat, CHF $2'000.–$/an pour l'entretien,
- Le modèle B : CHF $40'000.–$ à l'achat, CHF $4'000.–$/an pour l'entretien.

Après combien d'années, le modèle A sera-t-il moins cher que le modèle B ?

Exercice 1.9 Les températures sur les échelles de Fahrenheit et de Celsius sont liées par l'égalité suivante :

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Quelles sont les valeurs en degrés Fahrenheit qui correspondent aux températures comprises entre 30 et 40 degrés Celsius ?

Exercice 1.10 Résoudre les inéquations ci-dessous.

a) $2x - 6 < 2(x - 3)$

b) $2x - 6 < 2x - 3$

c) $2x - 6 > 2(x - 3)$

d) $2x - 6 > 2x - 3$

e) $2x - 6 \leq 2(x - 3)$

f) $2x - 6 \leq 2x - 3$

g) $2x - 6 \geq 2(x - 3)$

h) $2x - 6 \geq 2x - 3$

Exercice 1.11 Résoudre algébriquement les inéquations ci-dessous.

a) $-8x \geq -8$

b) $-8x \geq -8x$

c) $-8x + 8 > -8x$

d) $-8x > -8x + 8$

e) $-8x \geq -8x + 8$

f) $-8x + 8 \geq -8x$

g) $-8x + 8 > -8x + 8$

h) $-8x + 8 \geq -8x + 8$

7.2 Programmation linéaire

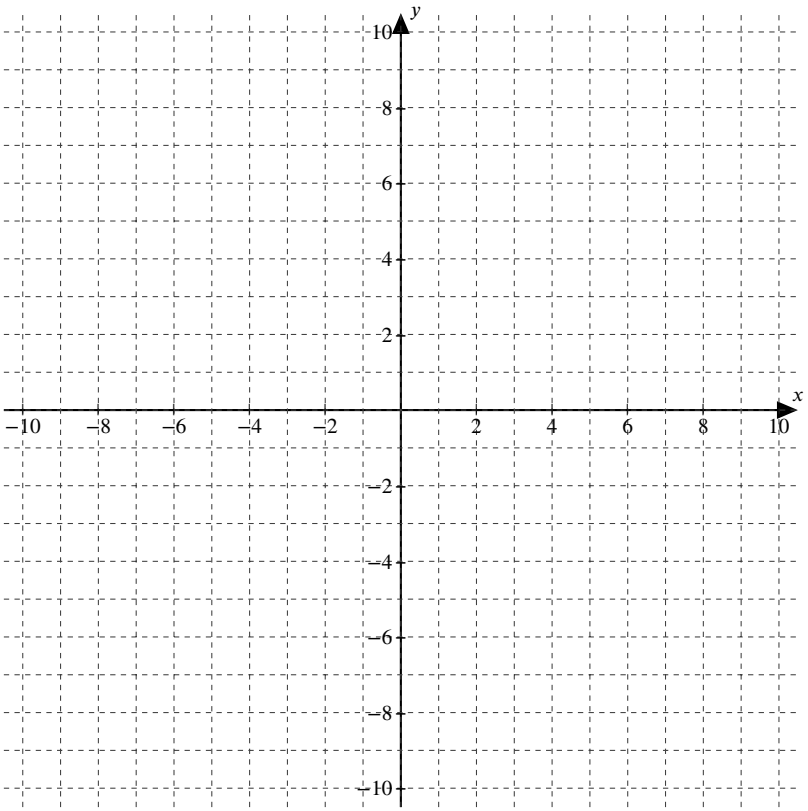
Inéquations linéaires à deux inconnues

Exercice 2.1

a) Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions de l'inéquation $x + 3y > 6$?

$(0\,;0)$	$(5\,;5)$	$(-6\,;6)$	$(4\,;-4)$	$(-10\,;1)$
$(0\,;5)$	$(6\,;0)$	$(-7\,;0)$	$(0\,;-8)$	$(10\,;-1)$

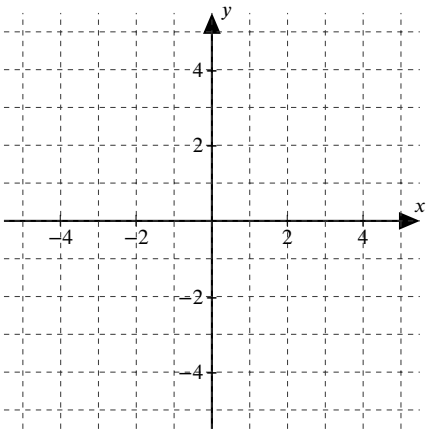
b) Représenter graphiquement la droite $x + 3y = 6$.



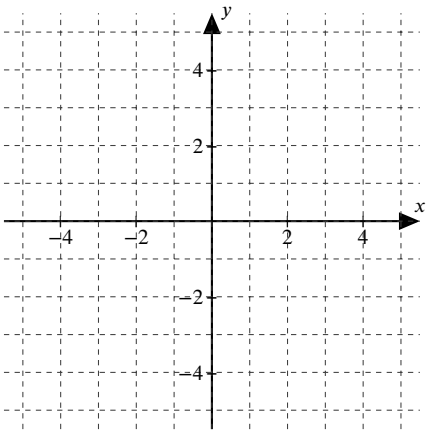
c) Placer les points dont les coordonnées sont les couples proposés au a) et colorier en rouge ceux qui sont solutions de l'inéquation $x + 3y > 6$. Que constate-t-on ?

Exercice 2.2 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des inéquations ci-dessous :

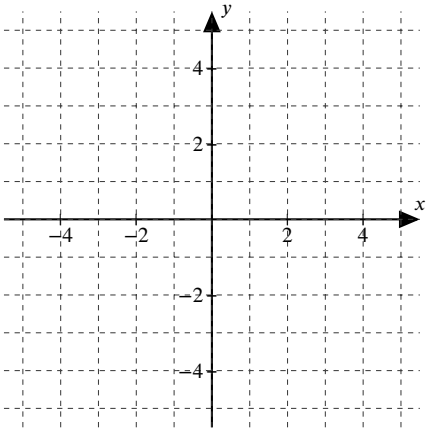
a) $x - y < 4$



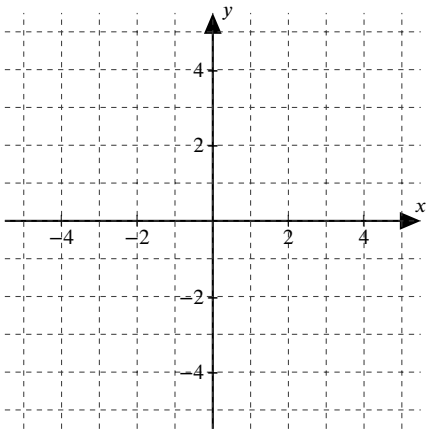
b) $2x + 5y \geq 10$



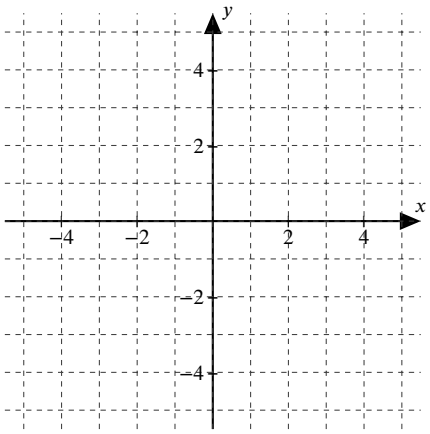
c) $x \leq -3$



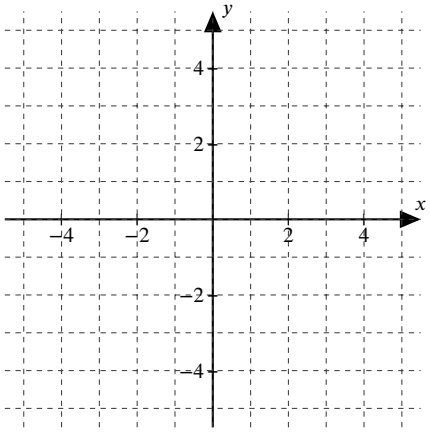
d) $y > 2$



e) $5x + 2y \leq 5$



f) $x - y > 0$



Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues

Exercice 2.3 Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions du système ?

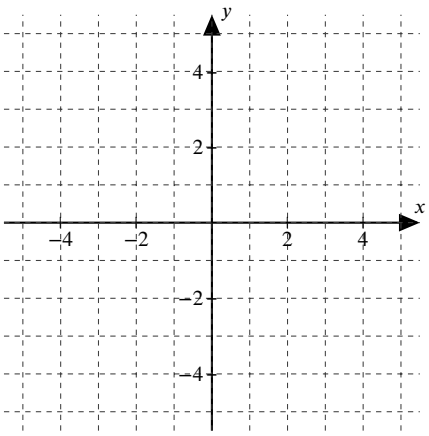
$$\begin{cases} x + y < 4 \\ x - y < 2 \\ x \geq -2 \\ y \leq 5 \end{cases}$$

$(-2\,;5)$ $(2\,;-1)$ $(2\,;1)$

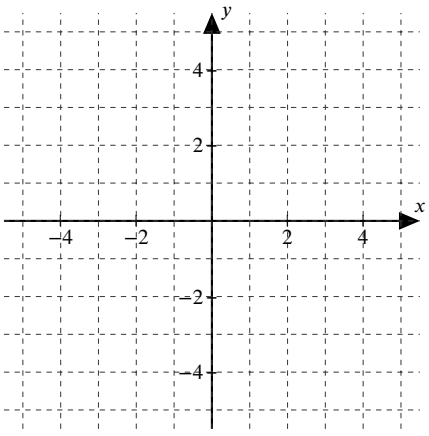
$(0\,;-1)$ $(-1\,;7)$ $(1\,;1)$

Exercice 2.4 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes d'inéquations suivants :

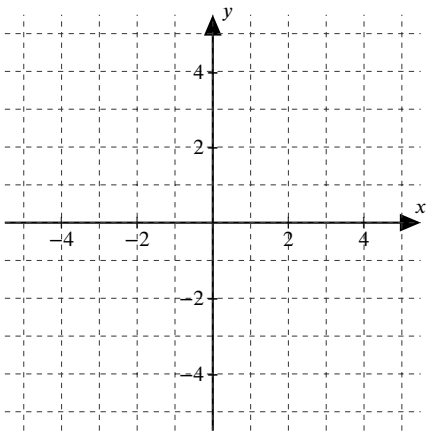
a) $\begin{cases} 3x + y > 3 \\ 2x - y < 4 \end{cases}$



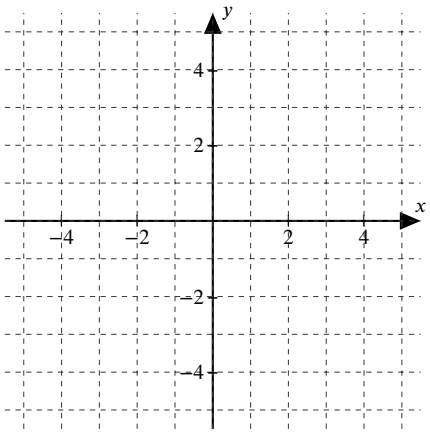
b) $\begin{cases} x + 2y < 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$



c) $\begin{cases} -2x + y > 3 \\ -x + y \leq 4 \end{cases}$

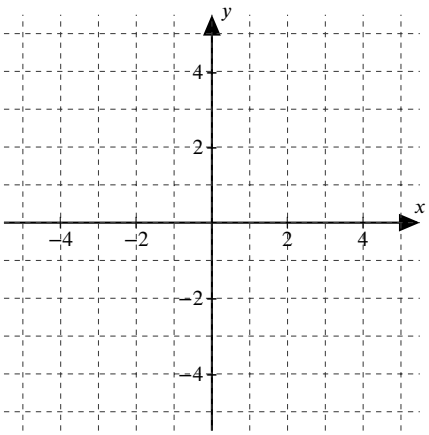


d) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 0 \\ y > -3 \end{cases}$

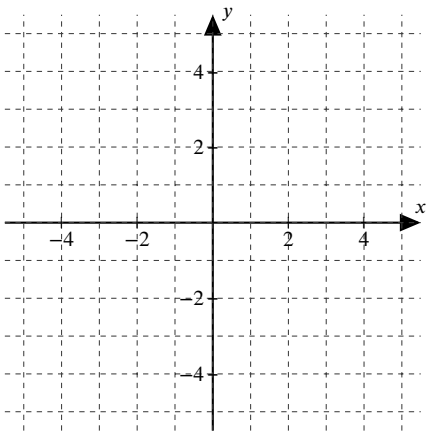


Exercice 2.5 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} 2x + 3y \leq 6 \\ 2x - y \leq 3 \\ y \leq 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$



b) $\begin{cases} 3x + 4y \leq 12 \\ x + y \geq 2 \\ x \leq 3 \\ y \leq 4 \end{cases}$



Exercice 2.6 Déterminer les coordonnées des sommets des polygones des solutions des systèmes d'inéquations de l'exercice 2.4

Exercice 2.7 Déterminer les coordonnées des sommets des polygones des solutions des systèmes d'inéquations de l'exercice 2.5

Exercice 2.8 Un confiseur prépare des emballages de pralinés et de truffes. Dans les sachets, il y a 15 pralinés et 5 truffes. Dans les boîtes, il y a 10 pralinés et 10 truffes.

On note x le nombre de sachets et y le nombre de boîtes.

a) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 70 pralinés à disposition pour préparer ces emballages.

b) Écrire une inéquation avec x et y qui exprime le fait qu'il y a 30 truffes à disposition pour préparer ces emballages.

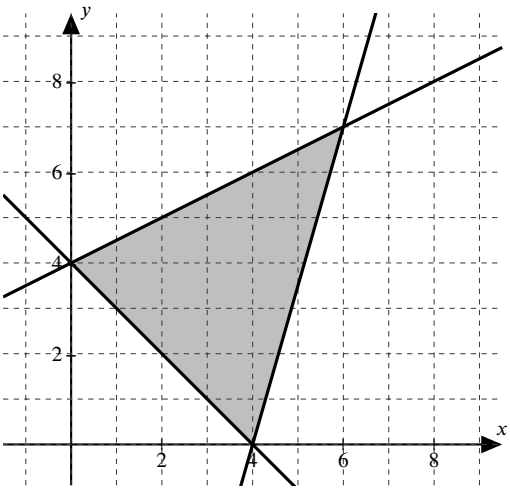
c) Écrire des inéquations qui expriment le fait que x et y sont des nombres positifs.

d) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de ce système d'inéquations.

e) Énumérer toutes les solutions possibles.

Introduction à la programmation linéaire à deux variables

Exercice 2.9 Les contraintes sont représentées par le polygone ci-dessous :



a) Chercher la valeur maximale et la valeur minimale de la fonction $P_1(x\,;y) = 4x - 2y$.

b) Pour quels points $(x\,;y)$ à coordonnées entières la fonction $P_1(x\,;y) = 4x - 2y$ vaut-elle 2 ?

c) Chercher la valeur maximale de la fonction $P_2(x\,;y) = x + y$.

d) Chercher la valeur minimale de la fonction $P_2(x\,;y) = x + y$.

e) Écrire le système d'inéquations correspondant à ce polygone des solutions.

Exercice 2.10 Trouver les valeurs maximum et minimum de la fonction objectif $P(x\,;y) = x - y$ avec les contraintes :

$$\begin{cases} 3x + 4y < 12 \\ 4x + 3y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

a) si x et y peuvent être réels.

b) si x et y doivent être entiers.

Applications

Exercice 2.11 Une entreprise fabrique deux types de boîtes en métal. La fabrication d'une boîte de type A demande 1 heure de travail et 3 kg de métal, alors que le type B , demande 2 heures de travail et 2 kg de métal. L'entreprise dispose de 80 heures de temps de travail et de 120 kg de métal.

Pour une boîte, le profit est de CHF $50.-$ pour le type A et de CHF $20.-$ pour le type B.

a) En posant x pour le nombre de boîtes de type A et y pour le nombre de boîtes de type B, déterminer la fonction objectif, puis exprimer les contraintes.

b) Représenter graphiquement le polygone des solutions.

c) Comment organiser la production afin de maximiser le profit ? Quel est ce profit ?

d) Même question si le profit est de CHF $20.-$ pour une boîte de type A et de CHF $30.-$ pour une de type B.

Exercice 2.12 On désire préparer des rations alimentaires contenant au moins 65 g de protéines, 120 g d'hydrate de carbone et $2'400$ calories à partir de deux produits A et B. Ces deux produits sont fournis par dose non partageable.

Une dose du produit A coûte CHF $1.-$ et contient 15 g de protéines, 20 g d'hydrate de carbone et 300 calories.
Une dose du produit B coûte CHF $1.-$ et contient 10 g de protéines, 30 g d'hydrate de carbone et 400 calories.

Quelle est la composition de la ration alimentaire la plus économique ?

Exercice 2.13 Un sculpteur décide de créer deux styles de statues ; le modèle A et le modèle B.

Le modèle A nécessite 1 heure de sculpture, 2 heures de ponçage et 1 heure de finition.

Le modèle B nécessite 2 heures de sculpture, 1 heure de ponçage et 1 heure de finition.

Il dispose quotidiennement de 20 heures à l'atelier de sculpture, de 22 heures à l'atelier de ponçage et de 12 heures à l'atelier de finition.

Les profits qu'il peut réaliser pour chacun des modèles sont de CHF $200.-$ pour le modèle A et de CHF $300.-$ pour le modèle B.

Quel nombre de statues de chaque modèle doit-il fabriquer par jour, afin obtenir un profit maximal ?

Exercice 2.14 Une société importatrice de café achète des lots de grains de café en vrac, puis les sépare en grains de premier choix, ordinaires et inutilisables. La société a besoin d'au moins 280 t de grains de premier choix et 200 t de grains ordinaire.

Elle peut acheter des grains non triés à volonté chez deux fournisseurs. Des échantillons provenant des deux fournisseurs contiennent les pourcentages suivants de grains de premier choix, ordinaires et inutilisables :

Fournisseur	Premier choix	Ordinaire	Inutilisable
A	20%	50%	30%
B	40%	20%	40%

Si le fournisseur A facture CHF $125.-$ la tonne et le fournisseur B CHF $200.-$ la tonne, quelle quantité la société devrait-elle acheter chez chacun des fournisseurs pour satisfaire à ses besoins pour un coût minimum ?

Exercice 2.15 Un ébéniste fabrique des tables et des armoires avec trois sortes de bois : chêne, pin et noyer. Dans le tableau ci-dessous, on donne le nombre de mètres carrés de bois nécessaire à la fabrication de chaque type de meubles et le nombre de mètres carrés de bois disponible.

	Armoire	Table	Disponible
Chêne	4 m^2	5 m^2	210 m^2
Pin	5 m^2	2,5 m^2	180 m^2
Noyer	6 m^2	5 m^2	240 m^2

Combien d'armoires et de tables cet artisan doit-il fabriquer pour rendre son gain maximum si :

a) il gagne CHF $1'000.-$ par armoire et CHF $900.-$ par table ?

b) il gagne CHF $1'200.-$ par armoire et CHF $1'000.-$ par table ?

Exercice 2.16 Sophie projette un voyage d'une longueur de $8'000$ km aux USA, qu'elle parcourra en train, en car et en bateau. Les prix et les vitesses de déplacement sont donnés ci-dessous :

	Bateau	Car	Train
Prix en CHF au km	0,15	0,2	0,25
Vitesse en km/h	30	40	80

Elle souhaite parcourir au moins $3'000$ km en bateau, et ne désire pas effectuer plus de kilomètres en train qu'en autobus.

Quelles distances doit-elle parcourir avec chaque moyen de transport si elle veut que le prix total de son voyage ne dépasse pas $1'500.-$ $ et que sa durée soit minimum ?

7.3 Statistiques descriptives

Vocabulaire

Exercice 3.1 Compléter les phrases ci-dessous :

a) L'ensemble sur lequel porte une étude statistique s'appelle .....

b) Un élément de cet ensemble est ..... .

c) L'étude statistique rend compte d'un aspect des individus de la population appelé .....

d) Si l'on peut mesurer cet aspect, la variable est de type ..... (prix, tailles, notes...)

e) Si les valeurs qu'elle peut prendre sont isolées, on dit que la variable est

..... .

f) Si les valeurs appartiennent à un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que la variable est .....

..... .

g) Si l'aspect ne se traduit pas par des nombres, la variable est .....

(exemple : couleurs, lieux, opinions...). Elle prend différentes .....

h) Un groupe d'individus pris dans la population est .....

Exemples :

On étudie le prix d'un produit dans différents points de vente.

i) La population est ..... .

j) La variable est ..... , il s'agit d'une variable .....

On étudie la couleur des voitures vendues par un garage.

k) La population est ..... .

l) La variable est ..... , il s'agit d'une variable .....

On étudie la taille des élèves d'une classe du gymnase.

m) La population est ..... .

n) La variable est ..... , il s'agit d'une variable .....

Un sondage d'opinion de collégiens sur leurs professeurs est réalisé par téléphone sur un échantillon représentatif de 405 élèves.

o) La population est ..... .

p) La variable est ..... , il s'agit d'une variable .....

Exercice 3.2 Classer chacune des variables suivantes selon qu'elles sont qualitatives, quantitatives discrètes ou quantitatives continues :

a) profession
b) lieu de résidence
c) âge
d) pointure de chaussure
e) coordonnées GPS
f) langues parlées
g) revenu annuel
h) nationalité
i) vitesse du vent
j) couleurs des yeux
k) nombre de langues parlées
l) nombre de locataires d'une maison

Effectifs et fréquences

Exercice 3.3 Compléter les phrases ci-dessous :

a) Le nombre d'individus pour lesquels la variable prend une modalité donnée est .... de cette modalité.

b) La somme des effectifs de toutes les modalités est ..... C'est le nombre d'individus de la population.

c) La ..... d'une modalité est le quotient ————————————.

Exercice 3.4 On étudie l'état civil des 30 employés d'une petite entreprise. On a obtenu les données brutes suivantes :

Marié	Marié	Célibataire
Mariée	Célibataire	Marié
Célibataire	Marié	Veuf
Divorcé	Veuve	Célibataire
Marié	Marié	Divorcée
Célibataire	Divorcé	Divorcé
Célibataire	Célibataire	Marié
Mariée	Mariée	Marié
Mariée	Marié	Marié
Divorcée	Marié	Marié

a) Identifier la population et la variable statistique.

b) Quelles sont les modalités ?

c) Établir le tableau de distribution.

d) Quel est le mode ?

e) Représenter les effectifs par un diagramme en colonnes.

f) Représenter les fréquences par un diagramme en colonnes.

g) Comparer ces deux représentations graphiques.

Exercice 3.5 On a demandé aux enfants de trois classes de troisième primaire de choisir une activité pour la journée ”neige”. On a obtenu les données brutes suivantes :

Hockey	Luge	Hockey	Hockey	Hockey
Hockey	Ski	Hockey	Ski	Raquette
Patinage	Ski	Ski	Hockey	Ski
Ski	Hockey	Ski	Raquette	Ski
Patinage	Ski	Hockey	Raquette	Raquette
Ski	Luge	Hockey	Luge	Luge
Hockey	Luge	Hockey	Hockey	Hockey
Ski de fond	Hockey	Patinage	Patinage	Hockey
Ski	Hockey	Ski	Raquette	Patinage
Hockey	Luge	Ski	Ski	Ski de fond
Hockey	Patinage	Ski	Patinage	Hockey
Hockey	Patinage	Ski	Patinage	Raquette

a) Identifier la population

b) Identifier la variable statistique.

c) Combien y a-t-il de modalités ?

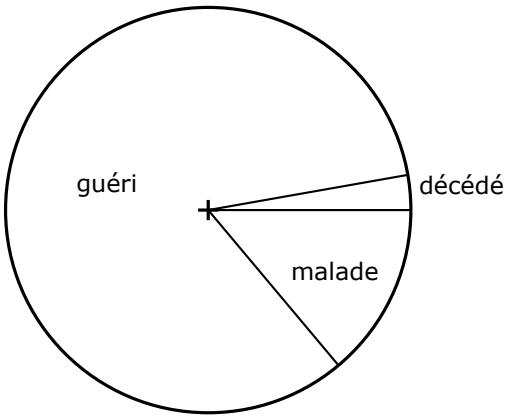
d) Établir le tableau de distribution.

e) Quelle est la fréquence en % de la luge ? Qu’est-ce que cela signifie ?

f) Quel est le mode ? Qu’est-ce que cela signifie ?

g) Représenter les données par un diagramme en colonnes puis un diagramme en secteurs.

Exercice 3.6 Ce diagramme représente l'état après 5 jours de maladie de personnes ayant le virus H7N19.



a) Compléter le tableau.

État	effectif
guéri	
malade	
décédé	
Total	900

b) Quelle est la part de gens guéris sur le groupe étudié ?

c) Quel est le taux de mortalité de cette maladie ?

Exercice 3.7 Un professeur de l'Uni a noté le nombre de points obtenus par 80 étudiants lors d'un test de statistiques.

2	3	5	5	4	6	6	5	4	3
7	7	7	6	2	7	7	9	8	10
5	6	6	8	6	6	3	7	3	5
9	7	6	4	7	5	9	9	6	9
6	3	9	8	8	7	5	6	10	6
9	7	7	7	4	7	10	8	7	10
3	5	8	5	8	7	4	8	10	7
4	6	6	8	7	7	7	8	8	9

a) De quel type est cette variable statistique ?

b) Établir le tableau de distribution, sans oublier de lui mettre son titre.

c) Quel est son mode ? Que signifie-t-il ?

d) Quelle est la fréquence de la modalité 6 ? Que signifie-t-elle ?

e) Quelle est la fréquence cumulée de la modalité 6 ? Que signifie-t-elle ?

f) Quel pourcentage des étudiant ont eu de 4 à 6 points ?

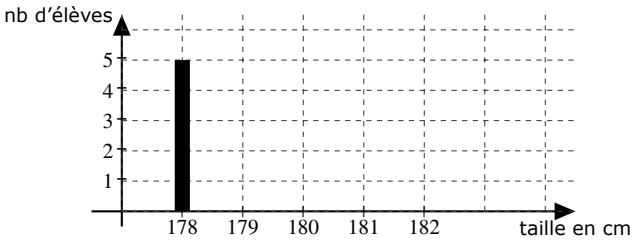
g) Quel pourcentage des étudiant ont eu plus de 6 points ?

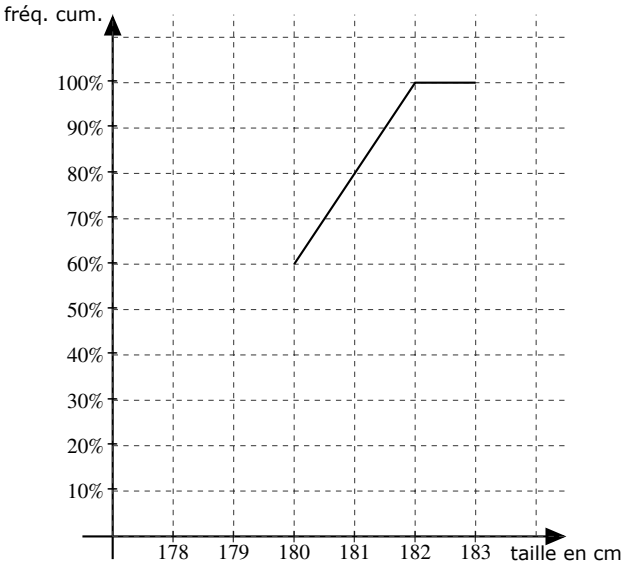
h) Représenter les effectifs par un diagramme en colonnes.

i) Représenter le polygones des fréquences cumulées.

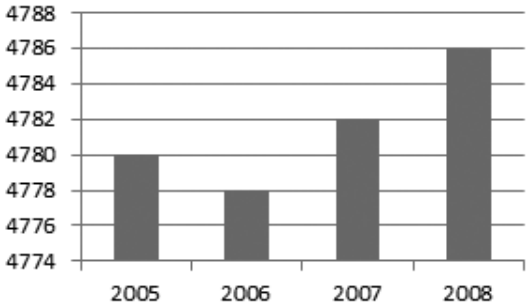
Exercice 3.8 Voici une étude de la taille d'un groupe de 15 élèves. Compléter les éléments manquants.

Taille en cm	178	179	180	181	182
Effectif					
Fréquence en %		$13,\overline{3}$			
Fréq. cum. en %					100





Exercice 3.9 Le graphique suivant représente le nombre d'infractions déclarées à Joliville entre 2005 et 2008.



a) Y a-t-il eu une forte augmentation entre 2006 et 2008 ? De combien ?

b) Pourquoi a-t-on une impression visuelle faussée lorsqu'on regarde ce diagramme ?

Exercice 3.10 Une compagnie automobile a enregistré le prix en CHF des voitures vendues durant l'année dernière. Voici les données rangées dans l'ordre croissant :

10520	20420	24150	26390	27880	32110	34620	38350
14310	20630	24420	26510	28000	32430	35270	39240
16020	21110	24530	26520	29080	32480	35890	39810
16670	21350	24910	26710	29160	32610	36100	40700
17220	21790	25080	27400	29770	33720	36440	41660
18450	22500	25160	27550	30330	33740	36540	41720
19160	22630	25900	27630	30410	33740	36660	42600
19320	22910	26220	27660	30720	34220	37390	44310
19470	23400	26250	27790	31650	34570	37650	46270
19710	23820	26340	27840	31820	34620	38200	48340

a) Regrouper les données en 8 classes de largeur $5'000$ avec valeur minimale égale à $10'000$, puis établir le tableau de distribution en n'oubliant pas son titre.

b) Déterminer la classe modale.

c) Représenter les données par l'histogramme et le polygone des fréquences.

d) Représenter le polygone des fréquences cumulées.

e) Quelle est la proportion de voitures de CHF $20'000.-$ à CHF $40'000.-$ (non compris) ?

f) Quelle est la proportion de voitures coûtant CHF $40'000.-$ et plus ?

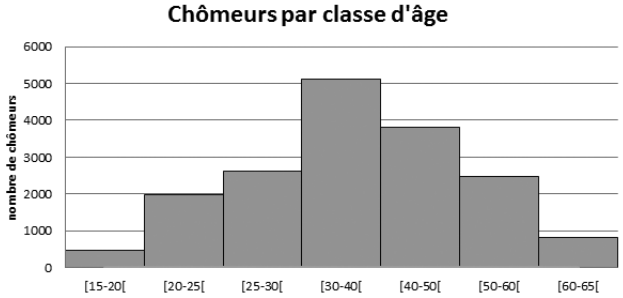
Exercice 3.11 Faire les parties a) à i) de l'exercice 48.

Exercice 3.12 Faire les parties a) à i) de l'exercice 49.

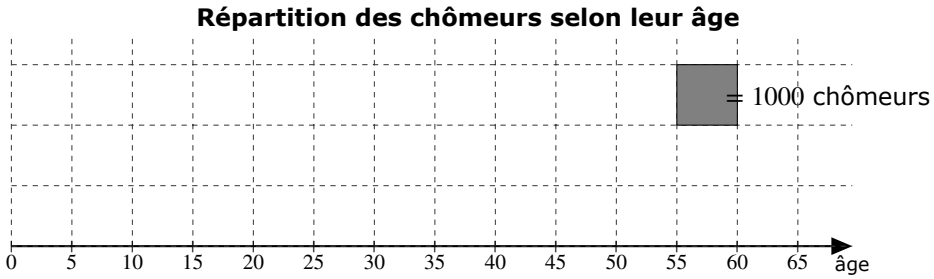
Exercice 3.13 Le tableau récapitulatif suivant donne la statistique trimestrielle par classe d'âge des chômeurs inscrits dans un office du travail dans le canton de Vaud en juin 2009 :

classe d'âge	effectif	fréquence [%]
[15 ; 20[	472	2,73
[20 ; 25[	1'990	11,51
[25 ; 30[	2'621	15,16
[30 ; 40[	5'110	29,56
[40 ; 50[	3'798	21,97
[50 ; 60[	2'476	14,32
[60 ; 65[	821	4,75
Totaux	17'288	100

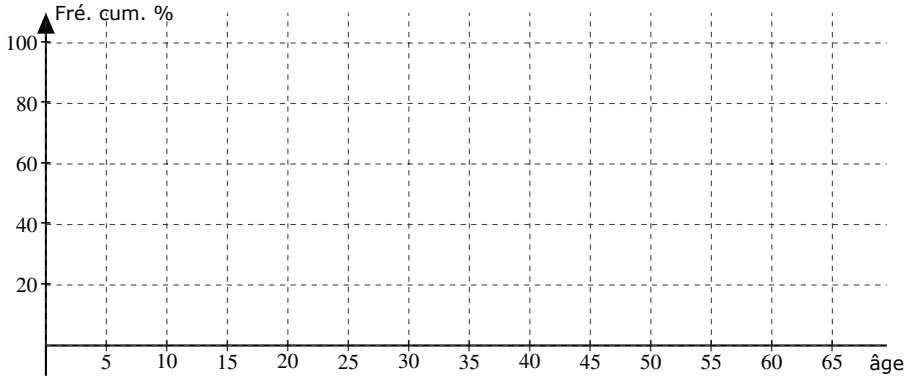
a) En quoi l'histogramme suivant est-il trompeur ?



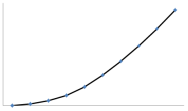
b) Représenter l'histogramme correct en respectant la valeur d'une unité d'aire.

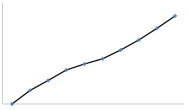


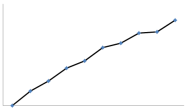
c) Représenter le poygone des fréquences cumulées.

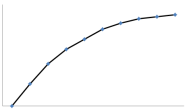


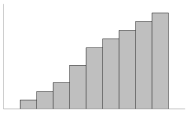
Exercice 3.14 Associer les histogrammes suivants à leur courbe de fréquences cumulées.

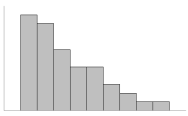
1.


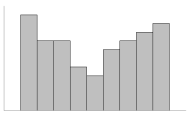
2.


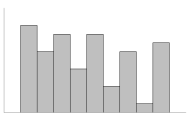
3.


4.


a)


b)


c)


d)


Mesures de tendance centrale

Exercice 3.15 On a noté le nombre de jours d'absence de 20 employés au cours d'une année. Les observations brutes figurent dans le tableau ci-dessous :

2	0	0	3	2	6	4	10	1	5
0	4	2	0	4	0	3	1	1	2

a) De quel type de variable statistique s'agit-il ?

b) Déterminer sa médiane sans faire de tableau de distribution.

c) Quelle est la signification de cette médiane ?

d) Déterminer la médiane à partir du tableau des fréquences cumulées.

e) Indiquer le nombre d'employés ayant eu moins de 5 jours d'absence. Quelle proportion cela représente-t-il ?

f) Indiquer le nombre d'employés ayant eu au moins de 5 jours d'absence. Quelle proportion cela représente-t-il ?

g) Quel est le mode et que signifie-t-il ?

Exercice 3.16 La ville de TIP veut faire une étude sur le respect de ses règlements de stationnement. On a donc relevé, pour chacun des 90 jours de l'été dernier, le nombre d'infractions aux règlements de stationnement. Le tableau incomplet des distributions des effectifs et des fréquences (arrondies) est donné ci-dessous.

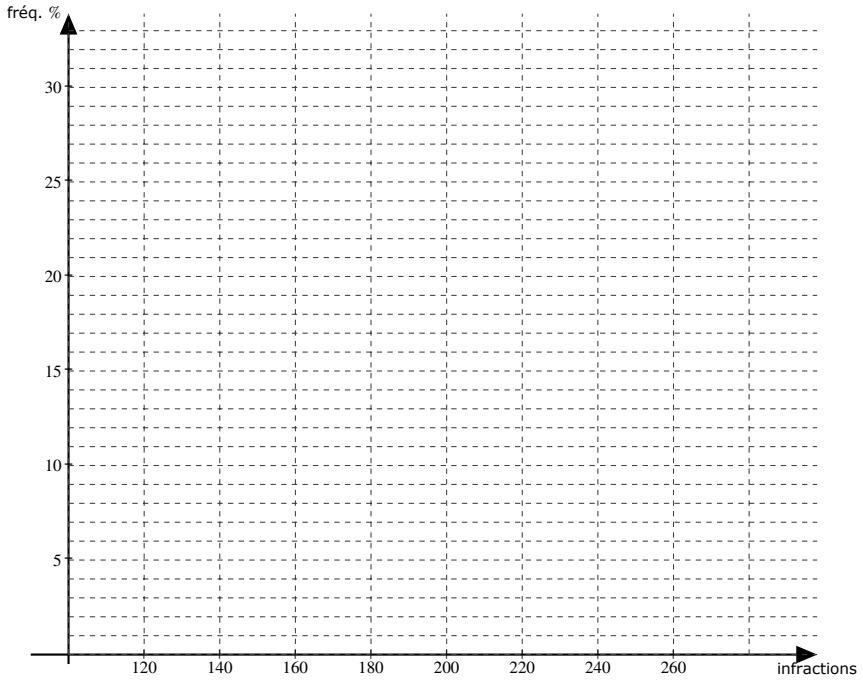
Répartition des jours de l'été selon le nombre d'infractions constatées

Classe	... x_i	effectif	fréquence	fréq. cum. ....
[100 ; 120[	110	2	....	....
[120 ; 140[	....	3	0,033	....
[140 ; 160[	150	....	0,111	....
[160 ; 180[	170	8	....	....
[180 ; 200[	....	....	....	....
[200 ; 220[	210	16	....	....
[220 ; 240[	230	....	....	0,832
[240 ; 260[	250	...	....	0,965
[260 ; 280[	270	....	0,033	1
	Total :	90	1	

a) Compléter le tableau des distributions des effectifs et des fréquences.

b) Quelle est la classe modale ?

c) Représenter l'histogramme et le polygone des fréquences.



d) Calculer la médiane.

Exercice 3.17 Lors d'une enquête , on a demandé 3 choses à 40 étudiants des classes du professeur MAT :

X le nombre d'enfants dans leur famille
Y leur âge
W leur revenu au cours de l'été dernier

On a condensé les réponses dans les tableaux ci-dessous :

Nb. enfants	Nb. étudiants
1	12
2	10
3	8
4	4
5	3
6	1
7	1
8	1

Âge	Nb. étudiants
$[17;18[$	6
$[18;19[$	14
$[19;20[$	12
$[20;21[$	5
$[21;22[$	2
$[22;23[$	1

Revenu	Nb. étudiants
$[0;400[$	10
$[400;800[$	5
$[800;1200[$	4
$[1200;1600[$	6
$[1600;2000[$	5
$[2000;2400[$	2
$[2400;3600[$	8

a) Donner le type de chacune de ces variables.

b) Calculer le mode ou la classe modale, la médiane et la moyenne de la variable X.

c) Compléter le tableau ci-dessous pour la variable Y.

Classe $[b_{i-1};b_i[$	centre y_i	effectif n_i	fréquence f_i	fréq. cum. F_i	$f_i y_i$
[17 ; 18[					
[18 ; 19[					
[19 ; 20[					
[20 ; 21[					
[21 ; 22[					
[22 ; 23[					
	Total :				

d) Calculer la classe modale, la médiane et la moyenne de la variable Y.

e) Calculer la classe modale, la médiane et la moyenne de la variable W.

Exercice 3.18 Calculer le mode, la médiane et la moyenne de la variable statistique :

Modalité	10	11	12	13	14	15	16	17
Effectif	2	3	7	9	14	8	3	1

Exercice 3.19 Compléter le tableau et déterminer la classe modale, la médiane et la moyenne :

Classe	$[0;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$	$[8;10[$	$[10;12[$
Effectif	3	8	15	14	6	2
Fréquence						
Fréq. cum.						
$f_i \cdot x_i$						

Exercice 3.20 On a mesuré la taille des 50 professeurs du gymnase :

Taille en cm	$[130;140[$	$[140;150[$	$[150;160[$	$[160;170[$	$[170;180[$	$[180;190[$	$[190;200[$
Nb de professeurs	2	4	7	8	15	10	4

Déterminer la classe modale, la médiane et la moyenne.

Exercice 3.21 Voici un bilan du nombre de kilomètres parcourus par les voitures de la compagnie de taxis AXIT au cours de l'année dernière :

Nombre de kilomètres parcourus	Nombre de voitures
$[\,20'000\,;25'000\,[$	4
$[\,25'000\,;30'000\,[$	6
$[\,30'000\,;35'000\,[$	11
$[\,35'000\,;40'000\,[$	15
$[\,40'000\,;45'000\,[$	20
$[\,45'000\,;50'000\,[$	14
$[\,50'000\,;60'000\,[$	6
$[\,60'000\,;80'000\,[$	4

Calculer le nombre de kilomètres moyen parcouru par un taxi de cette compagnie.

Exercice 3.22 Comment peut-on déterminer graphiquement la médiane ?

Exercice 3.23 Pour une variable statistique qualitative, peut-on déterminer le mode, la médiane et la moyenne ? Justifier.

Exercice 3.24 Déterminer les quartiles à partir des tableaux. Ces valeurs ont-elles une unités ?

a) ***Répartition des étudiants selon le nb de points au test de statistiques***

x_i	n_i	f_i en %	F_i en %
2	2	2,5	2,5
3	6	7,5	10
4	6	7,5	17,5
5	9	11,3	28,8
6	14	17,5	46,3
7	19	23,7	70
8	11	13,8	83,8
9	8	10	93,8
10	5	6,2	100
Total	80	100	

b)

Taille en cm	178	179	180	181	182
Effectif	5	2	2	3	3
Fréquence en %	$33,\overline{3}$	$13,\overline{3}$	$13,\overline{3}$	20	20
Fréq. cum. en %	$33,\overline{3}$	$46,\overline{6}$	60	80	100

Exercice 3.25 Déterminer les quartiles à partir des tableaux. Ces valeurs ont-elles une unités ?

a) **Répartition des voitures selon leur prix en KCHF**

$[b_{i-1}\,;b_i[$	n_i	f_i	F_i
[10 ; 15[	2	0,025	0,025
[15 ; 20[	8	0,100	0,125
[20 ; 25[	14	0,175	0,3
[25 ; 30[	21	0,2625	0,563
[30 ; 35[	16	0,200	0,763
[35 ; 40[	12	0,150	0,913
[40 ; 45[	5	0,0625	0,975
[45 ; 50[	2	0,025	1
Total	80	1,000	

b)

Temps [min]	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[
Effectif	3	8	15	14	6	2
Fréquence	0,063	0,167	0,313	0,291	0,125	0,042
Fréq. cum.	0,063	0,229	0,542	0,833	0,958	1

Exercice 3.26 Dans un groupe de 40 étudiants, on a fait une étude sur le nombre d'heures de classe de chacun, la journée de mardi :

4	5	6	3	4	2	2	6	7	4
6	7	4	4	1	3	3	5	1	6
5	5	5	5	5	5	6	3	4	2
3	5	8	4	4	3	4	3	6	5

a) Faire le tableau de distribution sans oublier le titre.

b) Quelle est le type de cette variable ?

c) Déterminer le mode ou la classe modale, la médiane et la moyenne.

d) Déterminer Q_3.

e) Déterminer D_8.

Exercice 3.27 La variable statistique X représente la longueur en centimètres des cannes des joueurs de la ligue de hockey BUTE :

Longueur des cannes en cm	Nombre de cannes
[120 ; 130 [	6
[130 ; 140 [	21
[140 ; 150 [	45
[150 ; 160 [	55
[160 ; 170 [	26
[170 ; 180 [	7

a) Faire le tableau de distribution.

b) Quelle est le type de cette variable ?

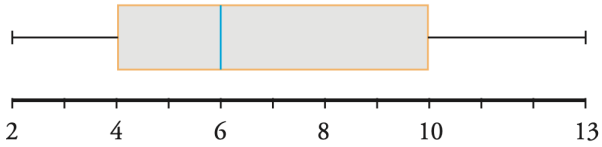
c) Déterminer le mode ou la classe modale, la médiane et la moyenne.

d) Calculer Q_3, D_4, D_7.

Indicateurs de dispersion

Exercice 3.28 Dessiner les boîtes à moustache des séries statistiques des exercices 24, et 25.

Exercice 3.29 Dans l'entreprise A, on interroge un certain nombre d'employés pour savoir combien de mails ils ont envoyés dans une journée. Les résultats sont synthétisés par le diagramme ci-après :



a) Déterminer la médiane, Q_1, Q_3 et l'écart interquartile.

b) Les employés interrogés ont envoyé de ..... à ..... mails.

c) La moitié des employés interrogés ont envoyé ..... mails et plus.

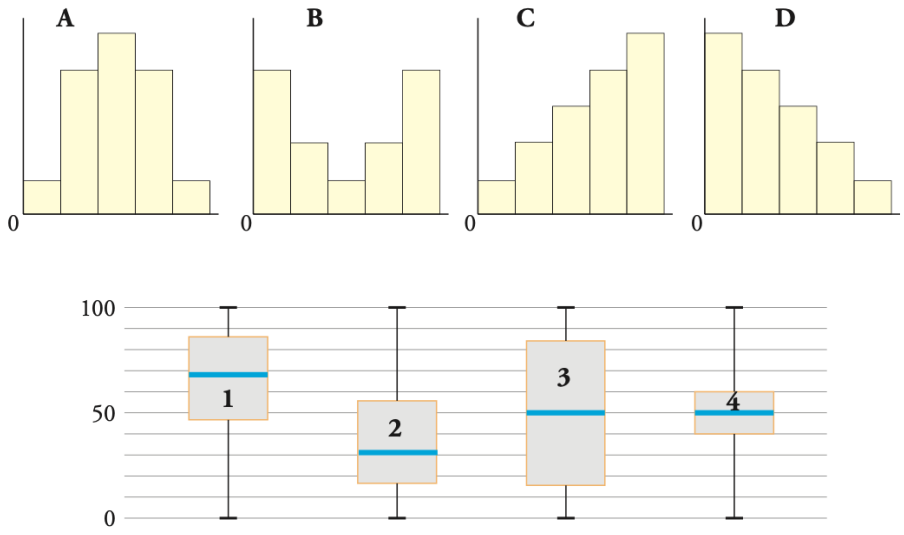
d) ..... % des employés interrogés ont envoyé de 4 à 10 mails.

e) Est-il vrai qu'il y a plus d'employés qui envoient de 6 à 10 mails que de 4 à 6 mails ?

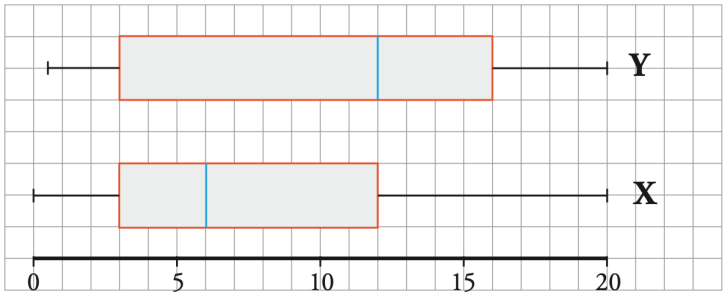
f) L'entreprise B effectue la même statistique et obtient exactement la même boîte à moustaches. A-t-elle le même nombre d'employés que l'entreprise A qui envoient de 6 à 10 mails ?

g) L'entreprise C, avec le même nombre d'employés que l'entreprise A, effectue la même statistique et obtient la même boîte à moustaches mais avec une médiane égale à 5. A-t-elle plus ou moins d'employés que la première qui envoient de 6 à 13 mails ?

Exercice 3.30 Associer ces quatre histogrammes aux quatre boîtes à moustaches ci-après :



Exercice 3.31 Dans deux villes X et Y, on a sélectionné un échantillon de 1000 personnes à qui on a demandé combien de cigarettes ils fumaient par jour. Les résultats ont été présentés sous la forme d'une boîte à moustaches ci-après :



a) Quelle est la valeur de la médiane, de Q_1 et de Q_3 pour les deux villes ?

b) Quelle est la ville la plus consommatrice de cigarettes ?

c) Peut-on affirmer qu'un quart de la population de la ville X fume plus de 3 cigarettes par jour ?

d) Peut-on affirmer que la moitié des habitants de la ville Y fument moins de 12 cigarettes par jour ?

Exercice 3.32 Dans une pépinière, on a mesuré en cm la hauteur de 40 sapins destinés à être vendus pour Noël :

119	125	126	128	132	135	135	135	136	139
138	140	140	142	142	144	145	145	146	146
146	147	147	148	149	150	150	152	153	155
155	157	158	161	163	164	165	168	173	176

a) Calculer la médiane, Q_1 et Q_3.

b) Résumer les données à l'aide d'une boîte à moustaches.

Exercice 3.33 Faire les parties j) à m) de l'exercice 48.

Exercice 3.34 Faire les parties j) à m) de l'exercice 49.

Exercice 3.35 Lors d'un test de mathématique, noté sur 10 points, les élèves de 2 classes ont obtenu les notes suivantes :

Classe A : 4 5 3 4 5 4 3 4 6 7 7 6 3 6 4 5 8 7 6 5 4 9 3 5 6 4 1 5 4 7 5

Classe B : 2 4 3 2 5 6 5 1 3 8 3 6 8 7 2 3 7 10 5 7 7 2 10 0 1 0 4 7 8 9 10

a) Compléter les tableaux ci-dessous :

Classe A

x_i	n_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Total :				

Classe B

x_i	n_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Total :				

b) Calculer la moyenne de chacune des deux classes.

c) Calculer la variance et l'écart-type des deux classes.

d) À partir des résultats précédents, faire une comparaison des deux classes.

Exercice 3.36 Calculer la variance et l'écart-type de la série statistique suivante.

Modalité	Effectif
25	4
30	8
35	11
38	15
41	18
52	12
55	7
60	5

Exercice 3.37 Calculer la variance et l'écart-type de la série statistique suivante.

Classe	Effectif
$[6;10[$	2
$[10;14[$	9
$[14;18[$	16
$[18;22[$	15
$[22;26[$	7
$[26;30[$	1

Exercice 3.38 En faisant une enquête auprès de 40 élèves, on leur a demandé le nombre d'enfants dans leur famille. Les résultats sont synthétisés dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'enfants	Nombre d'élèves
1	12
2	10
3	8
4	4
5	3
6	1
7	1
8	1

a) Déterminer la moyenne, la médiane et le mode de la variable statistique.

b) Déterminer la variance et l'écart-type de la variable statistique.

Exercice 3.39 Lors d'une course de vélo, les 40 participants ont mis les temps suivants pour effectuer le parcours :

Temps en min	Effectif
[43 ;45[	2
[45 ;47[	3
[47 ;49[	7
[49 ;51[	11
[51 ;53[	8
[53 ;55[	6
[55 ;57[	3

a) Déterminer la moyenne, la médiane et la classe modale de la variable statistique.

b) Déterminer la variance et l'écart-type de la variable statistique.

Exercice 3.40 La maison de jeu PROBA a demandé à son croupier de noter pendant 60 jours consécutifs combien de fois par jour on obtient le 00 au jeu de la roulette. Le croupier a présenté les données suivantes :

Nombre de 00 par jour	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nombre de jours	1	3	6	9	14	11	7	6	2	1

a) Calculer les mesures de tendance centrale.

b) Calculer la variance et l'écart-type.

Exercice 3.41 Léon a couru 12 km en une heure. Quelle est sa cote et comment peut-on l'analyser ?

a) La moyenne est de 10 et l'écart-type 2.

b) La moyenne est de 14 et l'écart-type 2.

c) La moyenne est de 12 et l'écart-type 5.

d) La moyenne est de 9 et l'écart-type 1.

Exercice 3.42 On donne la moyenne μ et l'écart-type σ de la variable statistique de l'exercice 3.32 :

$$\mu = 146{,}85 \qquad \sigma = 12{,}879$$

a) Calculer la cote Z du huitième sapin.

b) Calculer la cote Z du trente-quatrième sapin.

Exercice 3.43 Trois élèves se disputent le prix du meilleur financement de la semaine spéciale dans une école :

- Edgar a vendu 85 tablettes de chocolat, alors que la moyenne de vente est de 52 tablettes par élève avec un écart-type de 13 tablettes.
- Faustine a vendu 25 arrangement de fleurs, avec une moyenne de 12 arrangements et un écart-type de 6.
- Georges a vendu 75 abonnements au journal de l'école, avec une moyenne de 47 abonnements et un écart-type de 10.

Qui mérite le prix ?

Exercice 3.44 Voici les âges de 20 personnes qui se présentent au permis de conduire :

18	19	19	23	36	21	57	23	22	19
18	18	20	21	19	26	32	19	21	20

a) Calculer la moyenne et la médiane de cette distribution.

b) Quel est le pourcentage de personnes de moins de 25 ans qui se présentent à l'examen ?

c) Quel est le pourcentage de personnes d'au moins 25 ans qui se présentent à l'examen ?

d) Quelle est la cote Z du candidat le plus âgé ? Interpréter le résultat.

e) Quel âge aurait un candidat avec une cote $Z = -1$? Est-ce possible ?

Exercice 3.45 Voici la durée d'hospitalisation en jours de 40 bébés nés à terme :

2	1	7	1	33	2	2	3	4	3
4	3	3	10	9	2	5	4	3	3
20	6	2	4	5	2	1	3	3	4
4	2	3	4	3	2	3	4	2	3

a) Quelle est la cote Z du bébé qui est resté 20 jours à l'hôpital ?

b) Calculer le pourcentage des bébés dont l'écart à la moyenne n'excède pas un écart-type. Quelle a été la durée de leur hospitalisation ?

Exercice 3.46 Faire les parties n) à o) de l'exercice 48.

Exercice 3.47 Faire les parties n) à o) de l'exercice 49.

Exercice 3.48 En recevant les élèves qui désirent faire partie d'une équipe de foot du gymnase, l'entraîneur a pris note du poids en kg de ces 60 joueurs :

72,6	81,9	84,7	88,1	89,4	91,6	93,7	95,8	99,1	103,2
75,8	82,6	85,4	88,1	90,2	92,4	93,9	96,6	99,4	103,9
77,5	82,9	86,2	88,3	90,9	92,5	94,4	97,1	99,8	104,0
78,3	83,0	86,9	88,7	91,1	92,8	94,7	97,2	100,4	105,2
79,6	83,5	87,3	89,0	91,2	93,0	94,8	97,5	101,7	106,1
81,5	84,1	87,8	89,1	91,3	93,3	95,2	98,3	102,1	118,7

a) Identifier la population.

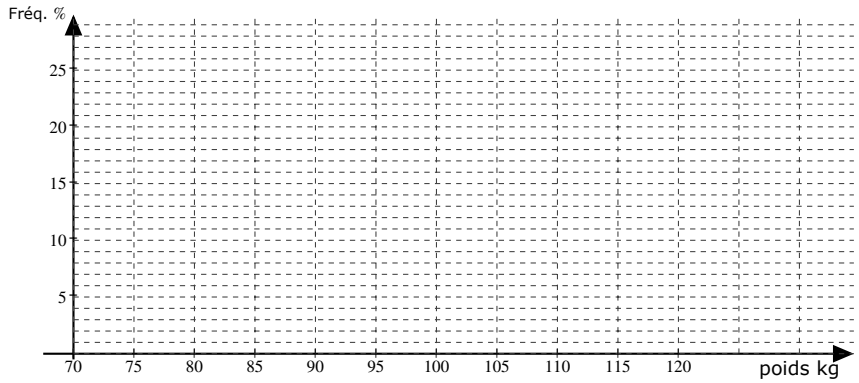
b) Identifier la variable statistique.

c) Cette variable statistique est-elle discrète ou continue ?

d) Compléter les 3 premières colonnes du tableau de distribution et écrire son titre.

$[b_{i-1}\,;b_i[$	x_i	n_i	f_i			
$[70\,;75[$						
$[75\,;80[$						
$[80\,;85[$						
$[85\,;90[$						
$[90\,;95[$						
$[95\,;100[$						
$[100\,;105[$						
$[105\,;120[$						
	Total :					

e) Représenter les données par un histogramme et le polygone des fréquences.

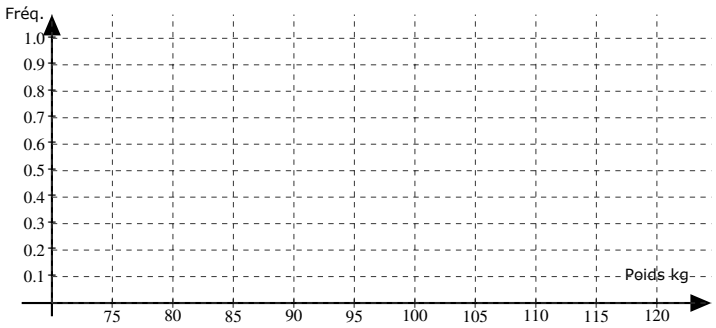


f) Compléter le tableau de distribution en ajoutant les colonnes des fréquences cumulées.

g) Trouver la proportion de joueurs ayant un poids de plus de 100 kg et plus.

h) Trouver la proportion de joueurs ayant un poids situé de 80 kg à 95 kg (non compris).

i) Représenter les courbes des fréquences cumulées.

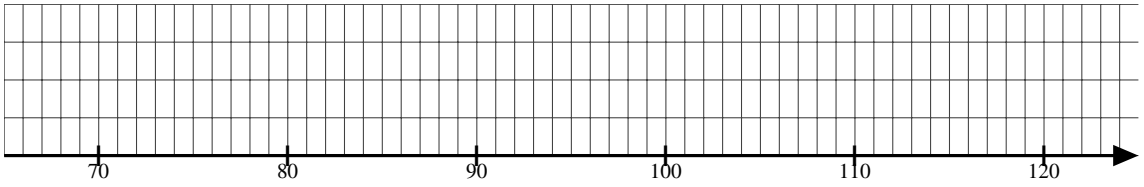


j) Déterminer la médiane, la moyenne et la classe modale.

k) Calculer les quartiles et l'équart interquartile.

l) Quelle est l'étendue ?

m) Représenter la boîte à moustaches.



n) Calculer la variance et l'équart-type.

o) Quelle est la cote du joueur de $72{,}6$ kg ?

Exercice 3.49 Le directeur de l'usine PRO a fait une étude sur l'ancienneté des ouvriers de l'usine. Il a donc noté, en ordre croissant, le nombre d'années d'ancienneté de tous les ouvriers. Voici les données rangées :

0,1	1,6	5,8	7,8	9,7	13,2	15,4	18,2	22,4	25,9
0,3	2,3	6,2	8,3	10,2	13,6	15,9	19,1	22,6	26,7
0,5	3,4	6,6	8,6	11,1	14,3	16,2	19,8	23,5	27,8
0,9	3,9	6,9	9,0	12,3	14,6	16,6	20,3	24,1	29,8
1,1	5,1	7,2	9,2	12,7	14,7	16,8	20,7	24,8	32,5
1,2	5,3	7,5	9,4	12,9	14,9	17,0	21,2	25,3	47,2

a) Identifier la population.

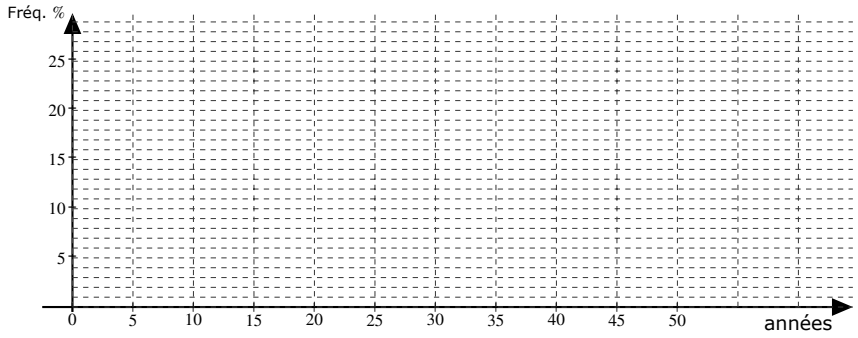
b) Identifier la variable statistique.

c) Cette variable statistique est-elle discrète ou continue ?

d) Compléter les 3 premières colonnes du tableau de distribution et écrire son titre.

$[b_{i-1}\,;b_i[$	x_i	n_i	f_i			
$[0\,;5[$						
$[5\,;10[$						
$[10\,;15[$						
$[15\,;20[$						
$[20\,;25[$						
$[25\,;30[$						
$[30\,;50[$						
	Total :					

e) Représenter les données par un histogramme et le polygone des fréquences.

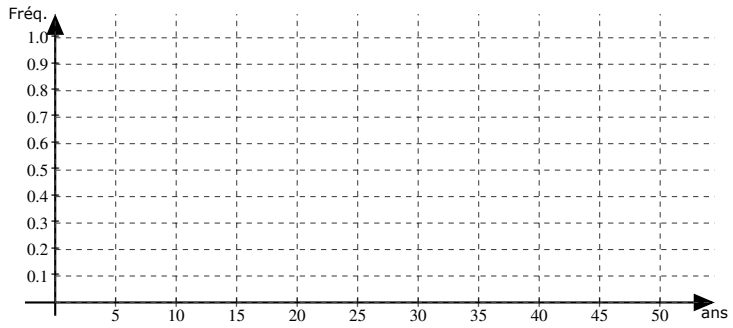


f) Compléter le tableau de distribution en ajoutant les colonnes des fréquences cumulées.

g) Trouver la proportion des ouvriers qui ont de 10 à 20 ans d'ancienneté (non compris).

h) Trouver la proportion des ouvriers qui ont 20 ans ou plus d'ancienneté.

i) Représenter les courbes des fréquences cumulées.

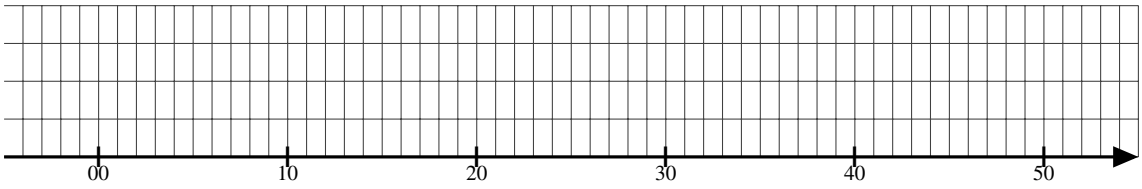


j) Déterminer la médiane, la moyenne et la classe modale.

k) Calculer les quartiles et l'équart interquartile.

l) Quelle est l'étendue ?

m) Représenter la boîte à moustaches.

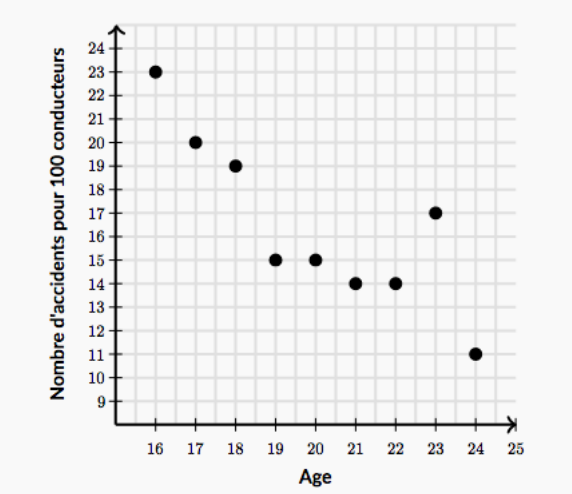


n) Calculer la variance et l'équart-type.

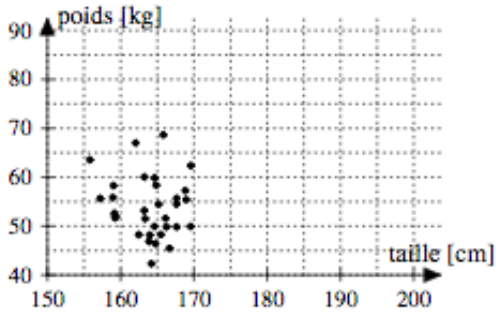
o) Quelle est la cote du joueur qui a le plus d'ancienneté ?

Statistique bivariée

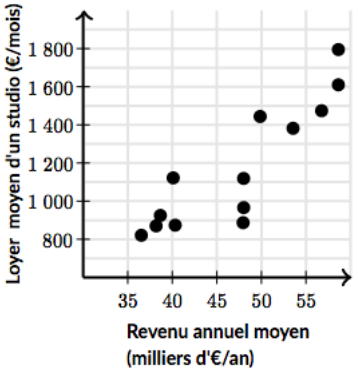
Exercice 3.50 Ce nuage de points représente la distribution de 100 conducteurs selon leur âge et leur nombre d'accidents de voiture lors de l'année 2009. Que peut-on en déduire sur la relation entre ces deux variables ?



Exercice 3.51 À propos des filles de 4 classes d'un gymnase, utiliser le nuage de points suivants pour savoir s'il existe une éventuelle corrélation entre leur taille et leur poids ?



Exercice 3.52 Ce nuage de points représente la relation entre le salaire moyen des habitants d'une ville et le montant moyen du loyer d'un studio dans cette ville. Que peut-on en déduire sur la relation entre ces deux variables ?



Exercice 3.53 Le tableau suivant présente l'évolution du budget publicitaire X et du chiffre d'affaires d'une société Y au cours des 6 dernières années.

Budget publicitaire en milliers de francs x_i	8	10	12	14	16	18
Chiffre d'affaires en milliers de francs y_i	40	50	55	70	75	95

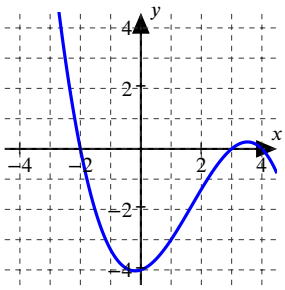
a) Dans un graphique, représenter le nuage de points $(x_i \ ; \ y_i)$.

b) Interpréter le résultat obtenu.

7.4 Signe d'une fonction

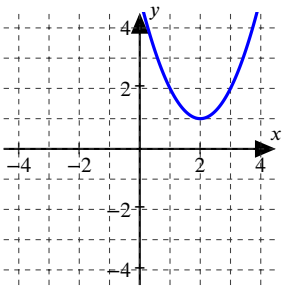
Exercice 4.1 Compléter le tableau des signes des fonctions représentées ci-dessous.

a)



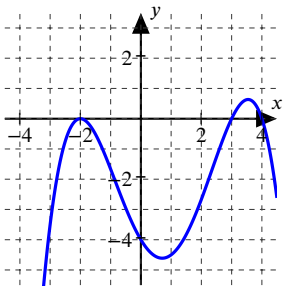
x	
$f(x)$	

c)



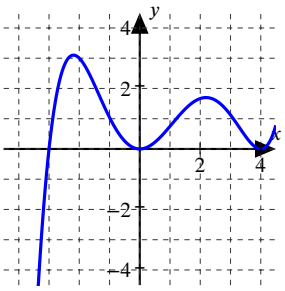
x	
$h(x)$	

b)



x	
$g(x)$	

d)

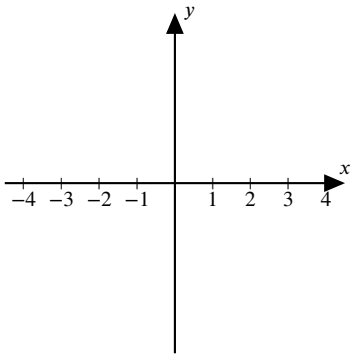


x	
$i(x)$	

Exercice 4.2 Faire une esquisse du graphe d'une fonction correspondant au tableau des signes.

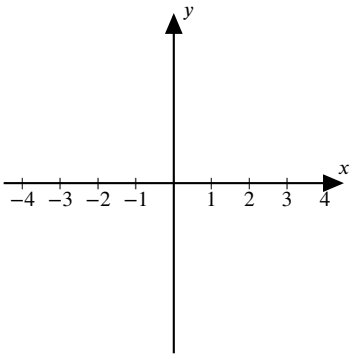
a)

x		-3		0		2	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$



b)

x		-3		2	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$



Signe d'un produit

Exercice 4.3 Compléter la dernière ligne du tableau des signes .

a)

x		4		6	
-5	–		–		–
$x-4$	–	0	+		+
$x-6$	–		–	0	+
$-5(x-4)(x-6)$					

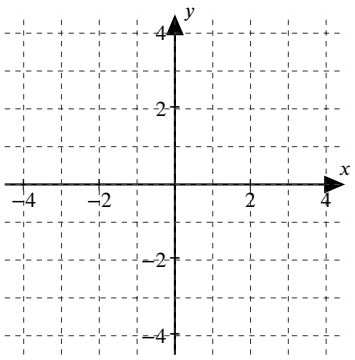
b)

x		-7		5	
$5-x$	+		+	0	–
$x+7$	–	0	+		+
$x+7$	–	0	+		+
$(5-x)(x+7)^2$					

Signe d'une fonction affine

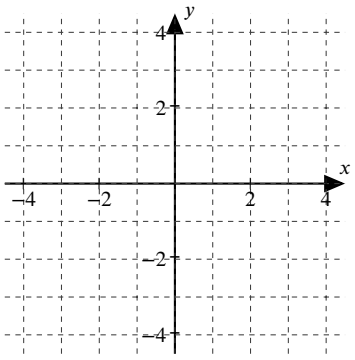
Exercice 4.4 Représenter le graphe de la fonction puis remplir son tableau des signes.

a) $f(x) = -\frac{3}{4}x + 1$



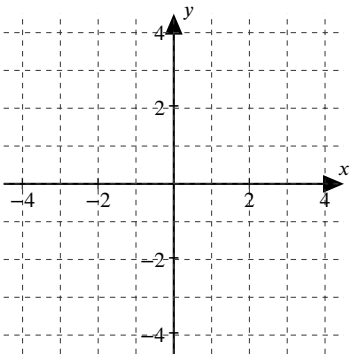
x	
$f(x)$	

b) $g(x) = x$



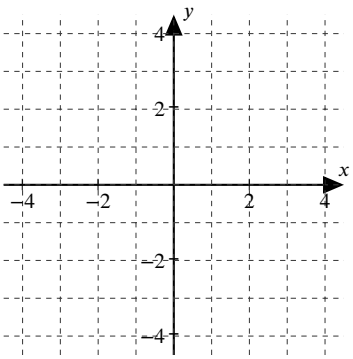
x	
$g(x)$	

c) $h(x) = -1$



x	
$h(x)$	

d) $i(x) = 3x - 2$



x	
$i(x)$	

Exercice 4.5 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$7-x$	

b)

x	
$4x-7$	

c)

x	
$-\frac{1}{3}x+2$	

d)

x	
$\frac{4}{5}x$	

e)

x	
13	

f)

x	
$-6+x$	

Exercice 4.6 Remplir le tableau des signes .

a)

x	
3	
$5-x$	
$2x+3$	
$3(5-x)(2x+3)$	

c)

x	
-4	
$x+4$	
$x-6$	
$-4(x+4)(x-6)$	

b)

x	
$3x$	
$-5+4x$	
$3x(-5+4x)$	

d)

x	
$-4x$	
$7x+1$	
$-4x(7x+1)$	

Exercice 4.7 Trouver l'expression de deux fonctions affines différentes correspondant à ce tableau des signes :

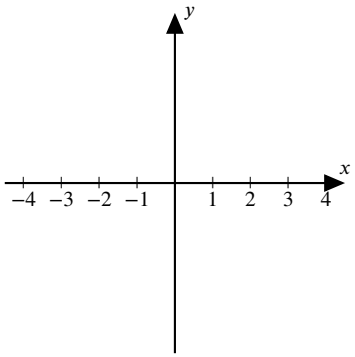
x		4	
$f(x)$	+	0	−

Signe d'une fonction quadratique

Exercice 4.8 Remplir le tableau des signes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

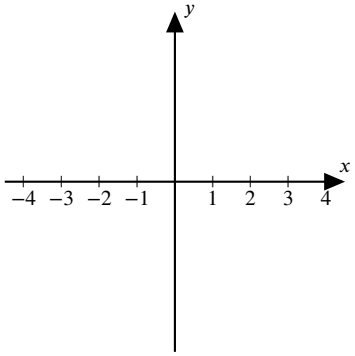
a)

x	
$(x+2)^2$	



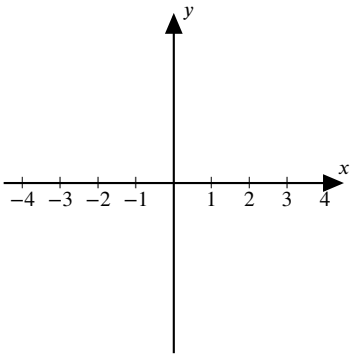
b)

x	
x^2+2	



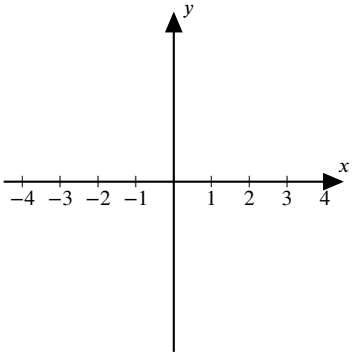
c)

x	
$-2x^2+7x$	



d)

x	
x^2-x-6	



Exercice 4.9 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$-x^2-16x-55$	

b)

x	
$13x^2+12x-1$	

c)

x	
$4x^2+12x+9$	

d)

x	
$-5+x^2$	

e)

x	
x^2+x+9	

f)

x	
$-9x^2+2x$	

g)

x	
$-x^2-9$	

h)

x	
$-5x^2$	

Exercice 4.10 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$5-x^2$	
$2x^2+3$	
$(5-x^2)(2x^2+3)$	

b)

x	
$x+3$	
x^2+x-6	
$(x+3)(x^2+x-6)$	

Signe d'une fonction polynomiale

Exercice 4.11 Factoriser au maximum.

a) $64x^2-49x^4$

b) $3x^3-3x^2-60x$

c) $9x^2-3x-2$

d) $2x^3+250$

e) $80x^3-120x^2+60x-10$

f) $x^3-4x^2-9x+36$

g) x^4-29x^2+100

h) $x^3+4x^2-7x-10$

Exercice 4.12 Étudier le signe des fonctions suivantes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

a) $5x(3x+2)(7-x)$

b) $-4(x-8)(5x+1)(x^2+2)$

c) $(x+7)^3$

d) $x^2(-2x+5)$

Exercice 4.13 Étudier le signe des fonctions suivantes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

a) $9x^3-18x^2-x+2$

b) $16-x^4$

c) x^3+x^2-2

d) $-25x^3+30x^2-9x$

Signe de $(g(x))^n$

Exercice 4.14 Remplir le tableau des signes.

a)

x	
$(5-x)^3$	

b)

x	
$(3x+7)^4$	

c)

x	
$x^3(x-2)^2$	

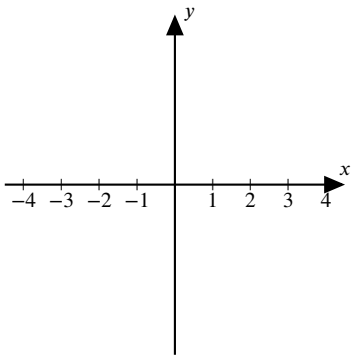
d)

x	
$-3x(x+4)^4(6-x)^2$	

Exercice 4.15 Remplir le tableau des signes et faire une esquisse du graphe de la fonction.

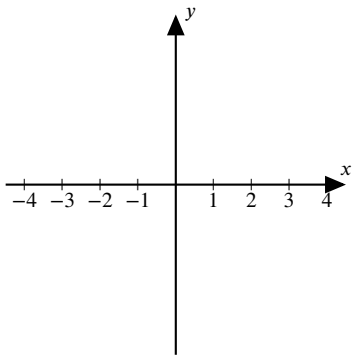
a)

x	
$(x-1)^2(x+2)^2$	



b)

x	
$(x-1)^2(x+2)^5$	



Signe d'une fonction rationnelle

Exercice 4.16 Donner l'ensemble de définition et étudier le signe de la fonction.

a) $f(x) = \dfrac{x+4}{6-x}$

b) $f(x) = \dfrac{2(x+1)^3}{x^4}$

c) $f(x) = \dfrac{-x^2+8x-7}{2x-11}$

d) $f(x) = \dfrac{x+3}{81-x^4}$

Inéquations

Exercice 4.17 Résoudre.

a) $x^2+15x+44 \leq 0$

b) $\dfrac{7-x}{x} > 0$

c) $x^4+7x^2+19 \geq 10+x^2$

d) $\dfrac{7-x}{x} > 1$

Ensemble de définition d'une racine carré

Exercice 4.18 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-5x}{x-3}}$

c) $f(x) = \sqrt{(x-9)^3}$

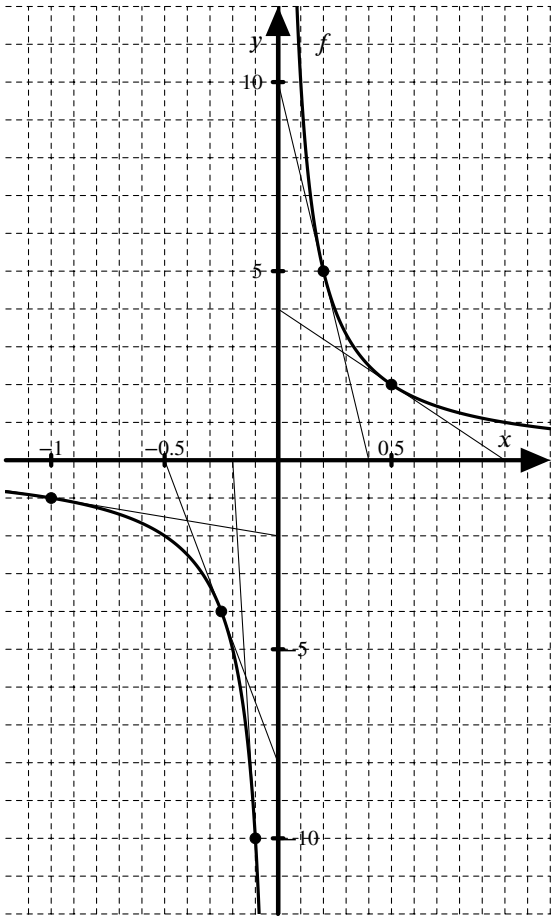
d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2+4x+4}}$

7.5 Dérivées

Définition

Exercice 5.1 Compléter le tableau en calculant les pentes à l'aide du graphique, puis chercher l'expression algébrique de f'.

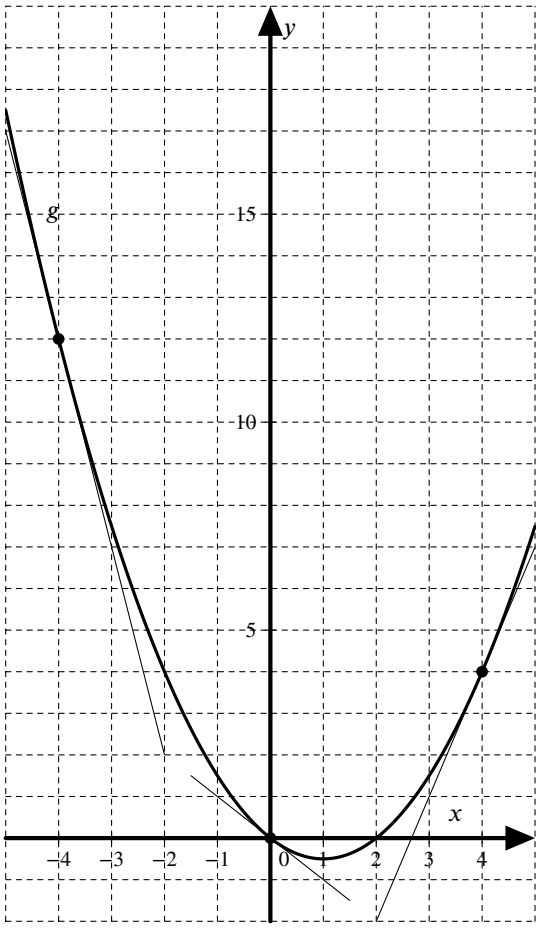
a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$



x	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$					

$f'(x) =$

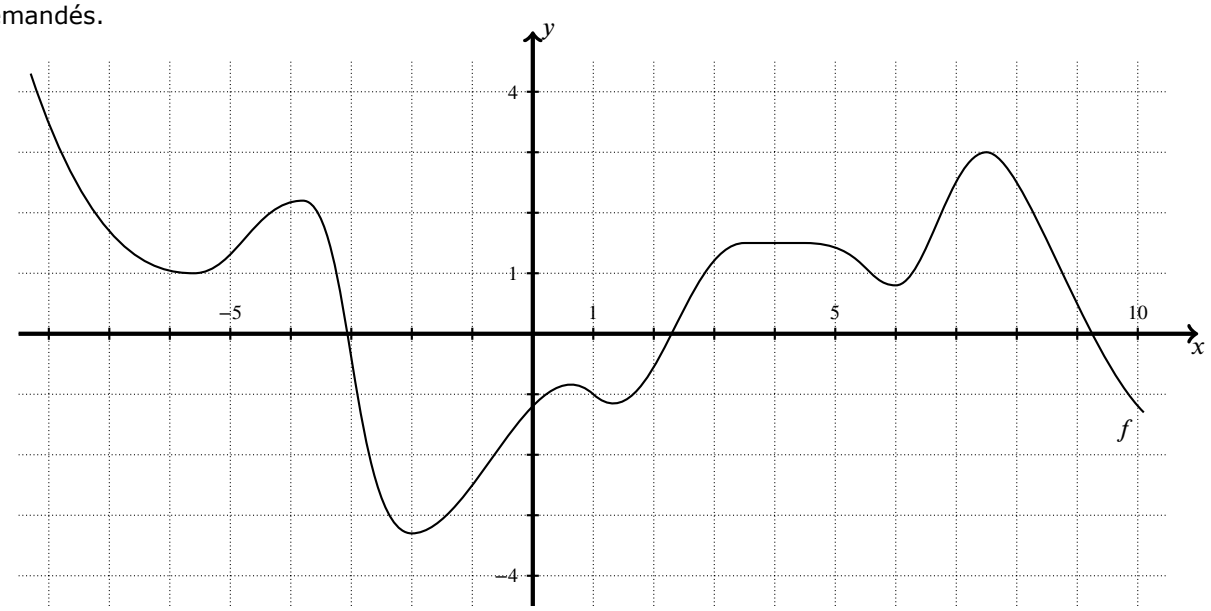
b) $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x$



x	-4	-2	0	2	4
$g'(x)$					

$g'(x) =$

Exercice 5.2 D'après le graphe de la fonction f ci-dessous, identifier le **signe** de la dérivée aux points demandés.



$f'(-8)$
$f'(-5)$
$f'(-4)$
$f'(-3)$
$f'(-2)$
$f'(0)$
$f'(1)$
$f'(2)$
$f'(4)$
$f'(5)$
$f'(6)$
$f'(7)$
$f'(9)$
$f'(-\frac{1}{2})$
$f'(\frac{9}{2})$
$f'(-\frac{7}{2})$

Exercice 5.3

a) Décrire la croissance d'une fonction f dont la dérivée est $f'(x) = -2x + 8$ et faire l'esquisse du graphe d'une fonction correspondant à cette croissance.

b) Faire de même pour g dont la dérivée est $g'(x) = x^2 + x$.

Exercice 5.4 Esquisser le graphe de la fonction et en déduire la dérivée.

a) $f(x) = -3$

b) $g(x) = -3x$

c) $h(x) = x - 3$

d) $i(x) = -3x + 2$

Règles de dérivation

Exercice 5.5 Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = x^4$

b) $f(x) = 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

d) $f(x) = \sqrt[5]{x^9}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 5.6 Montrer les règles ci-dessous :

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}} \qquad \boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Exercice 5.7 Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = -\dfrac{8}{\sqrt[8]{x}}$

b) $f(x) = 10x^3$

c) $f(x) = 9$

d) $f(x) = \dfrac{5}{x^7}$

e) $f(x) = \dfrac{x^7}{5}$

f) $f(x) = \sqrt{2} \cdot x$

Exercice 5.8 Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = x^3 - \dfrac{2}{7}x^2 + 2x - 5$

b) $f(x) = x + 2$

c) $f(x) = 5 + \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = x^{10} - 4x^5$

e) $f(x) = -7x^2 + \dfrac{x}{3} - 4$

f) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + 3$

Exercice 5.9 Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = (3x - 7)(5x + 2)$

b) $f(x) = 6x^3(5x^2 + 3x + 4)$

c) $f(x) = x^2(9 - x)$

d) $f(x) = (x^2 + 4x + 5)(5x^2 - 2x - 4)$

e) $f(x) = (4x - 3)^2$

f) $f(x) = (x - 7)(x + 7)(x - 7)$

Exercice 5.10 Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 4}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{4x - 5}$

c) $f(x) = \dfrac{5x + 1}{x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{x^4 + 5}{5x^2 - 3x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 6}$

f) $f(x) = \dfrac{7x^3}{x^3 + 3}$

Exercice 5.11 Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{4}$, une première fois à l'aide des règles de base, puis une deuxième fois à l'aide de la règle du quotient. Comparer les résultats. Quelle est la méthode la plus simple ?

Exercice 5.12 Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{4}{x^3}$, une première fois à l'aide des règles de base, puis une deuxième fois à l'aide de la règle du quotient. Comparer les résultats. Quelle est la méthode la plus simple ?

Exercice 5.13 Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = 5 \cdot \sqrt{x}$, une première fois à l'aide des règles de base, puis une deuxième fois à l'aide de la règle du produit. Comparer les résultats. Quelle est la méthode la plus simple ?

Exercice 5.14 Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = (3x + 2)(5x - 1)$, une première fois à l'aide à l'aide de la règle du produit, puis une deuxième fois en effectuant la multiplication avant de dériver. Comparer les résultats. Quelle est la méthode la plus simple ?

Exercice 5.15 Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = (5x-3)^4$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+16}$

c) $f(x) = \left(\dfrac{x+4}{x-4}\right)^7$

d) $f(x) = (7-x)^2$

e) $f(x) = (x^2-4x-6)^5$

f) $f(x) = \dfrac{1}{(2x^3+1)^6}$

g) $f(x) = \sqrt{(x^2+3)(4x+7)}$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{8x+1}{x-3}}$

i) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+3x+1}$

Exercice 5.16 Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = (11x+8)^2$, une première fois à l'aide de la règle du produit, puis une deuxième fois à l'aide de la règle de la puissance. Comparer les résultats. Quelle est la méthode la plus simple ?

Exercice 5.17 Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = (2x+9)(x-3)^5$

b) $f(x) = (x^2+9)^7(3x-1)^2$

c) $f(x) = x^4(x^2+x+11)^4$

Exercice 5.18 Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = \dfrac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^9}{(8-x)^3}$

c) $f(x) = \dfrac{(x^2-x+1)^3}{x^5}$

Exercice 5.19 Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \left(\dfrac{3x+1}{5-x}\right)^4$, puis comparer avec la dérivée de $f(x) = \dfrac{(3x+1)^4}{(5-x)^4}$. Comparer les résultats. Quelle est la méthode la plus simple ?

Exercice 5.20 Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{8x}$

b) $f(x) = \dfrac{(x^2+2)^3}{8x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{8}$

d) $f(x) = 8x(x^2+2)$

e) $f(x) = \left(\dfrac{x^2+2}{8x}\right)^3$

f) $f(x) = 8x(x^2+2)^3$

Exercice 5.21 Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = 5x^4+4x^3+10$

b) $f(x) = \sqrt{x^2-x}$

c) $f(x) = \dfrac{7x+2}{3x-5}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{7x+2}{3x-5}\right)^2$

e) $f(x) = (5x+7)(3x+2)$

f) $f(x) = (3x+7)^4(x^2+1)^3$

Exercice 5.22 Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous. Ne pas laisser de racine au dénominateur.

a) $f(x) = x\sqrt{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

Exercice 5.23 Trouver une fonction dont la dérivée est celle proposée.

a) $f'(x) = 2$

b) $f'(x) = 2x$

c) $f'(x) = 2x + 2$

d) $f'(x) = 6x$

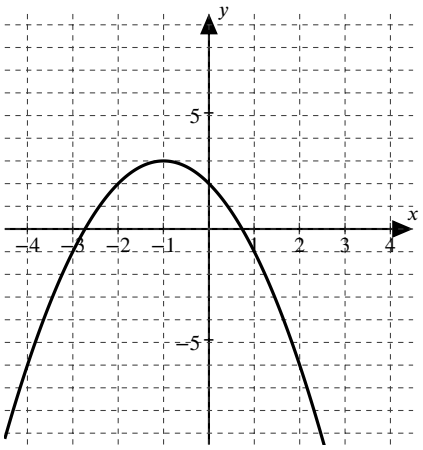
e) $f'(x) = x^2$

f) $f'(x) = 0$

Étude de la croissance

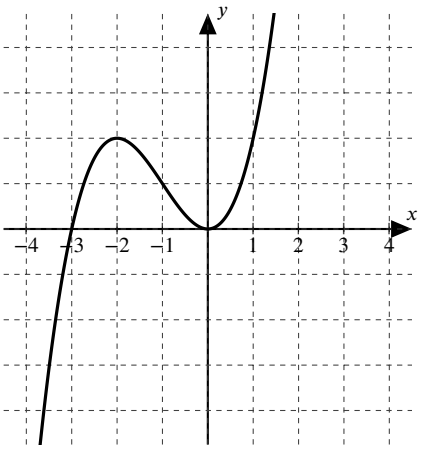
Exercice 5.24 Compléter le tableau de croissance d'après le graphique.

a)



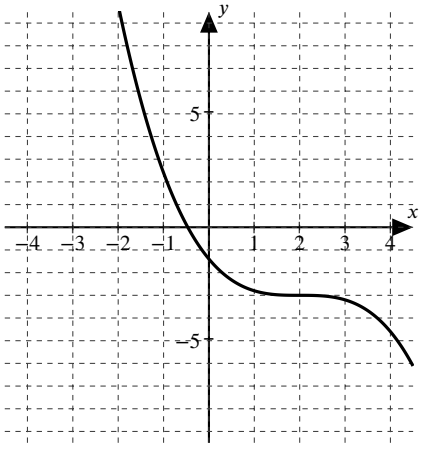
x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

c)



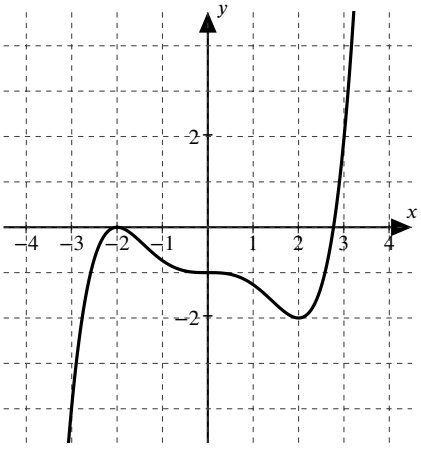
x	
$h'(x)$	
$h(x)$	

b)



x	
$g'(x)$	
$g(x)$	

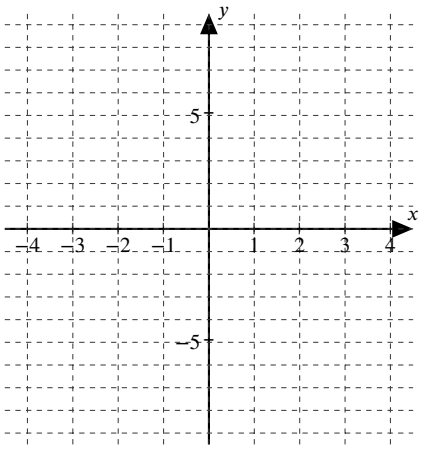
d)



x	
$i'(x)$	
$i(x)$	

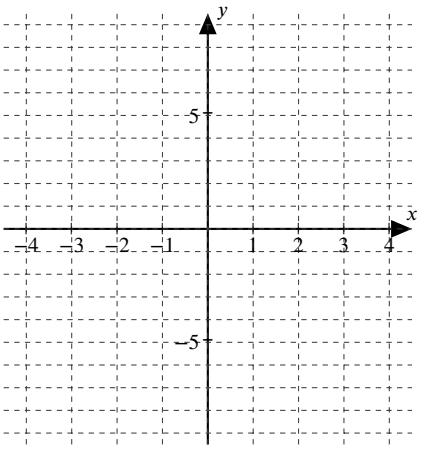
Exercice 5.25 Esquisser le graphe d'une fonction qui correspond au tableau de croissance.

a)



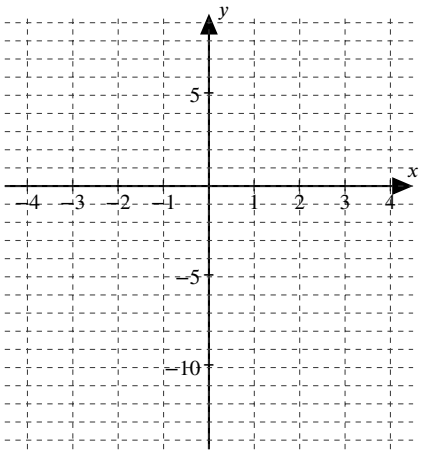
x		2	
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	MIN $(2\,;-3)$	↗

c)



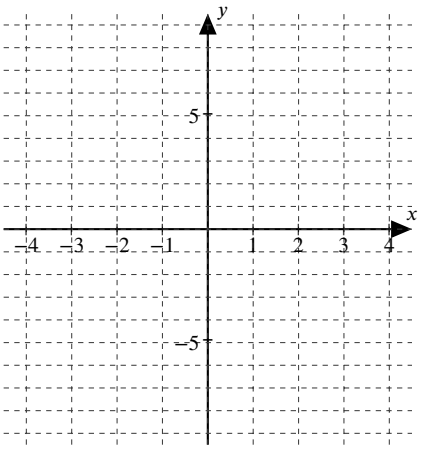
x		1	
$h'(x)$	−	||	−
$h(x)$	↘	||	↘

b)



x		-2		2	
$g'(x)$	−	0	−	0	+
$g(x)$	↘	plat $(-2\,;5)$	↘	MIN $(2\,;-11)$	↗

d)



x		1	
$i'(x)$	+	||	−
$i(x)$	↗	||	↘

Exercice 5.26 Étudier la croissance des fonctions ci-dessous et faire une esquisse qui correspond.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2$ b) $f(x) = -x^4 + 2x^3$ c) $f(x) = (x-2)^2(x+1)$

Exercice 5.27 Déterminer l'ensemble de définition, puis étudier la croissance des fonctions ci-dessous et faire une esquisse qui correspond.

a) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x-1)^2}$ c) $f(x) = \dfrac{-x^2-2x+3}{x^2}$

Exercice 5.28 La fonction

$$N(t) = -t^4 + 8t^2 + 10 \quad (0 \leq t \leq 3)$$

dans laquelle t est le temps en semaines depuis le début d'une épidémie, représente le nombre de milliers de personnes atteintes d'un certain virus.

Déterminer l'intervalle de temps durant lequel le nombre de malades augmente.

Exercice 5.29 Une campagne publicitaire génère le profit

$$P(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x \quad (0 \leq x \leq 4)$$

dans lequel x représente les frais de publicité en dizaine de milliers de francs.

Sur quel intervalle de x le profit décroît-il ?

Exercice 5.30 Un centre de ski a observé que sa clientèle C lors de la x^{e} journée de la saison est donnée par la fonction

$$C(x) = \frac{6000x}{x^2 + 6400} \quad (1 \leq x \leq 160)\,.$$

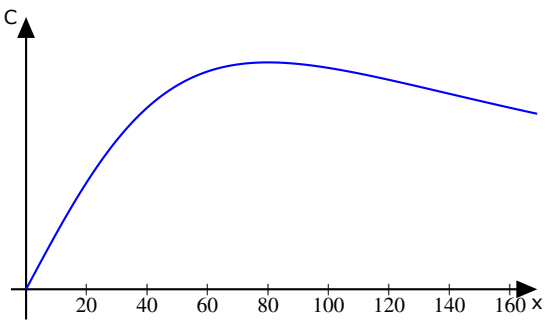
a) Combien y a-t-il de clients durant la 20^{e} journée ? Est-il exact que le nombre de clients va encore augmenter durant la 21^{e} journée ?

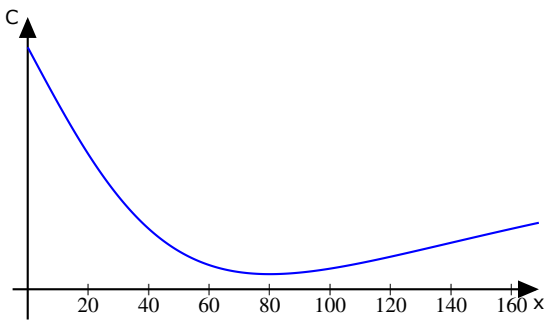
b) Combien y a-t-il de clients durant la 100^{e} journée ? Est-il exact que le nombre de clients va encore augmenter durant la 101^{e} journée ?

c) Sur quel intervalle la clientèle est-elle croissante ?

d) Après combien de jours le centre de ski admettra-t-il un maximum de clients ?

e) Lequel de ces deux graphes représente la fonction $C(x)$?





Exercice 5.31 Étudier le signe de la fonction, puis sa croissance et faire une esquisse qui correspond.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2$ b) $g(x) = 4x^3 - 3x + 1$ c) $h(x) = (x-1)(x-3)^3$

Exercice 5.32 Déterminer l'ensemble de définition, étudier le signe de la fonction, puis sa croissance et faire une esquisse qui correspond.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ b) $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ c) $h(x) = \dfrac{4x}{(x-2)^2}$

Exercice 5.33 Déterminer l'ensemble de définition, étudier le signe de la fonction, puis sa croissance et faire une esquisse qui correspond.

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ b) $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ c) $h(x) = \sqrt{-x^2-2x+3}$

Exercice 5.34 La fonction

$$P(x) = -x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 30x + 100 \quad (0 \leq x \leq 8)$$

modélise la population de moustiques sur une certaine surface durant le mois d'août où x représente le nombre de centimètres d'eau tombée durant ce mois.

a) Déterminer l'intervalle de chute de pluie pour lequel cette population augmente et celui pour lequel elle décroît.

b) Esquisser la courbe $P(x)$ après avoir déterminé la population maximum de moustiques.

Exercice 5.35 Supposons que certains astronomes utilisent la fonction

$$d(t) = t^3 - 48t + 200 \quad (t \geq 0)$$

pour représenter la distance en milliers de kilomètres d'un météore à la Terre à l'instant t en mois.

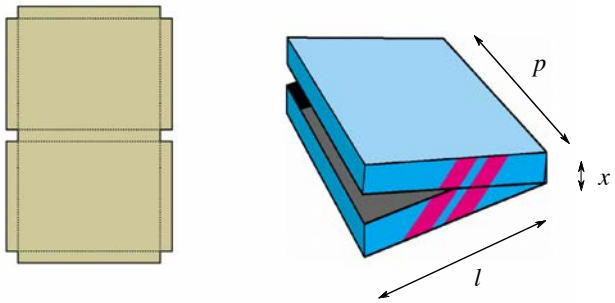
a) Établir le tableau de croissance de la fonction $d(t)$.

b) À partir de quel instant le météore va-t-il s'éloigner de la Terre ?

c) Quelle sera la distance la plus proche entre la Terre et le météore ?

7.6 Optimisation

Exercice 6.1 On désire construire une boîte en carton à partir d'une feuille rectangulaire en coupant 6 carrés comme représentés ci-dessous des côtés et en pliant les côtés.



La feuille de carton mesure 45 cm sur 30 cm. Quelles sont les dimensions de la boîte fermée admettant un volume maximum et quel est ce volume ?

Exercice 6.2 On désire construire un garage en forme de parallélépipède rectangle. La paroi du fond, les deux parois latérales, ainsi que le toit du garage sont en tôle. La porte est en bois. Le garage doit avoir une profondeur de 6 mètres et un volume de 75 m^3.

On sait que le prix de la tôle est de 20 francs le m^2, alors que le prix de la porte en bois est de 30 francs le m^2.

Quelles sont les dimensions du garage de coût minimum et quel est ce prix ?

Exercice 6.3 Une cabine de douche est en forme de parallélépipède rectangle. Son socle est carré. Elle n'a pas de toit. Elle est fabriquée à partir de deux matériaux différents :

- le socle revient à $500.-$ Frs. par m^2,
- les quatre autres parois coûtent $100.-$ Frs. par m^2.

Le coût total des matériaux est de $1500.-$ Frs.

Quelles doivent être les dimensions de la cabine si l'on veut que son volume soit le plus grand possible ?

Exercice 6.4 L'entreprise de portes et fenêtres qui vous emploie projette la construction d'un entrepôt de 450 m^2 de surface au sol.

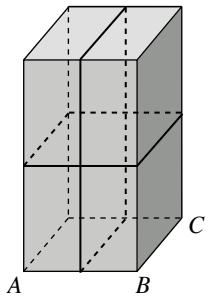
Les exigences municipales de la commune sur l'esthétisme des rues commerciales obligent les commerçants à recouvrir la façade de leurs édifices avec des matériaux de première qualité alors que les côtés et l'arrière peuvent être recouverts avec des matériaux de moindre qualité. Les coûts ont été estimés à $800.-$ Frs. le mètre carré pour la façade et de $100.-$ Frs. le mètre carré pour les côtés et l'arrière.

Sachant que la hauteur de l'édifice sera de 3 mètres, déterminer le coût minimum possible pour recouvrir les 4 parois de l'entrepôt.

Exercice 6.5 Un aquarium (ouvert au-dessus) de 15 cm de haut doit avoir une contenance de 600 cm^3.

Déterminer les dimensions de cet aquarium permettant de minimiser la surface de verre.

Exercice 6.6 On se propose d'envoyer un colis de volume égal à 12 dm^3 dont la forme est celle d'un parallélépipède rectangle de base carrée ($AB = BC$). Son emballage est maintenu à l'aide d'une ficelle comme le montre la figure.



Trouver les dimensions du colis permettant d'utiliser le moins de ficelle possible.

Exercice 6.7 On veut clôturer un champ de forme rectangulaire, devant avoir une superficie de 100 ha.

Une route rectiligne longe un des côtés de ce champ. Il faut une clôture particulière pour ce côté, qui coûte $500.-$ Frs. le km, soit $200.-$ Frs. de plus le km que celle qu'on utilise pour les trois autres côtés.

Quelles sont les dimensions du champ qui minimisent les coûts ?

8 Solutions

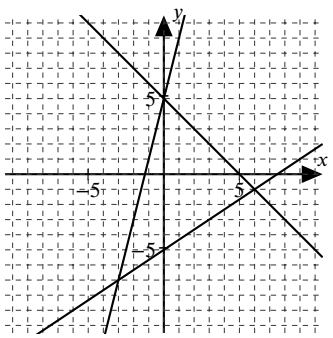
8.1 Solutions - Inéquations

1.1

a) $\mathcal{S} =]-\infty\,;6]$

b) $\mathcal{S} = [-3\,;+\infty[$

c) $\mathcal{S} =]-\infty\,;0[$

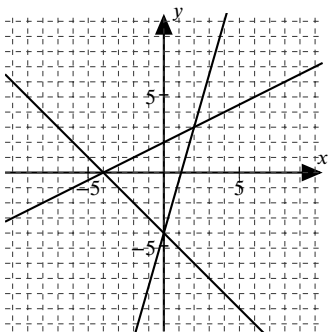


1.2

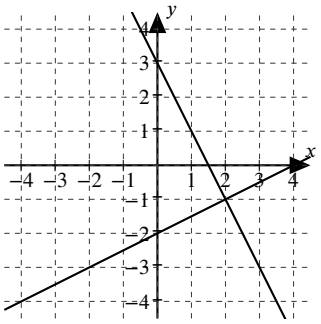
a) $\mathcal{S} =]-4\,;+\infty[$

b) $\mathcal{S} =]-\infty\,;0]$

c) $\mathcal{S} =]-\infty\,;2[$



1.3



a) $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

b) $\mathcal{S} = \left\{2\right\}$

c) $\mathcal{S} = \left\{1\right\}$

d) $\mathcal{S} = \left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$

e) $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;2\right[$

f) $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;1\right]$

1.4

a) $\mathcal{S} = [-1\,;+\infty[$

b) $\mathcal{S} =]-\infty\,;1]$

c) $\mathcal{S} =]10\,;+\infty[$

d) $\mathcal{S} = [5\,;+\infty[$

e) $\mathcal{S} =]-\infty\,;1]$

f) $\mathcal{S} =]-\infty\,;15[$

g) $\mathcal{S} =]-\infty\,;0[$

h) $\mathcal{S} = \left]\frac{3}{4}\,;+\infty\right[$

i) $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{8}{5}\right]$

1.5

a) $\mathcal{S} = \left]-10\,;+\infty\right[$

b) $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\frac{9}{2}\right[$

c) $\mathcal{S} = \left[-\frac{15}{19}\,;+\infty\right[$

d) $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{90}{19}\right]$

e) $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;35\right[$

f) $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{6}{7}\right[$

g) $\mathcal{S} = \left[-\frac{11}{5}\,;+\infty\right[$

h) $\mathcal{S} = \left]2\,;+\infty\right[$

i) $\mathcal{S} = \left]\frac{15}{13}\,;+\infty\right[$

1.6

a) $\mathcal{S} = [3\,;+\infty[$

b) $-\frac{2}{3}x + 4 \leq x - 1 \implies x \geq 3 \implies \mathcal{S} = [3\,;+\infty[$

1.7

a) $\mathcal{S} =]-\infty\,;2]$
b) $\mathcal{S} =]-2\,;+\infty[$
c) $\mathcal{S} = [\frac{15}{2}\,;+\infty[$
d) $\mathcal{S} = [-\frac{5}{11}\,;+\infty[$
e) $\mathcal{S} =]\frac{5}{4}\,;+\infty[$
f) $\mathcal{S} =]-\infty\,;\frac{98}{41}]$

1.8

x : nombre d'années depuis l'achat
$2000x + 50'000 < 4000x + 40'000$
$\mathcal{S} =]5\,;+\infty[$
Dès la sixième année.

1.9

$\frac{5}{9}(F-32) > 30 \implies F > 86$
$\frac{5}{9}(F-32) < 40 \implies F < 104$
Entre 86 et 104 degrés Fahrenheit.

1.10

a) $\mathcal{S} = \varnothing$
b) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
c) $\mathcal{S} = \varnothing$
d) $\mathcal{S} = \varnothing$
e) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
f) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
g) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
h) $\mathcal{S} = \varnothing$

1.11

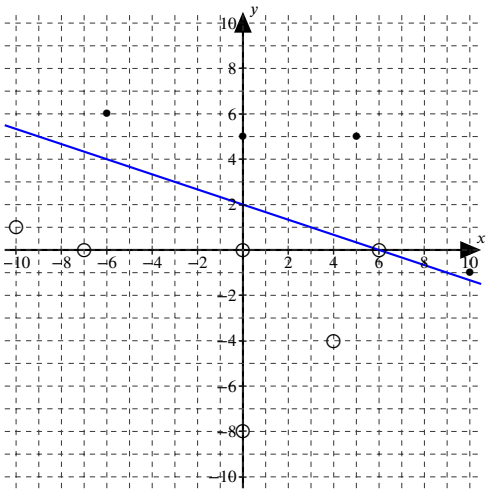
a) $\mathcal{S} =]-\infty\,;1]$
b) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
c) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
d) $\mathcal{S} = \varnothing$
e) $\mathcal{S} = \varnothing$
f) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
g) $\mathcal{S} = \varnothing$
h) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

8.2 Solutions - Programmation linéaire

2.1

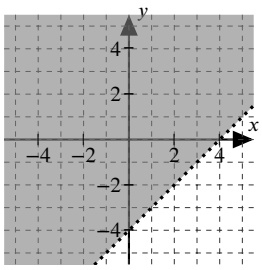
a) $0 < 6$ non; $12 > 6$ oui; $-7 < 6$ non; $6 = 6$ non; $-24 < 6$ non
$20 > 6$ oui; $-8 < 6$ non; $15 > 6$ oui; $-7 < 6$ non; $7 > 6$ oui

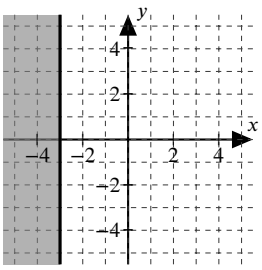
b)

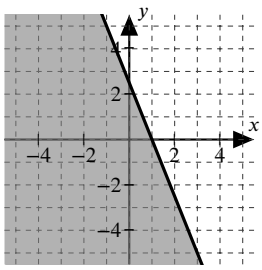


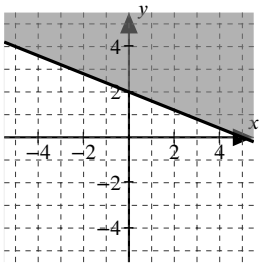
c) Les solutions sont au dessus de la droite.

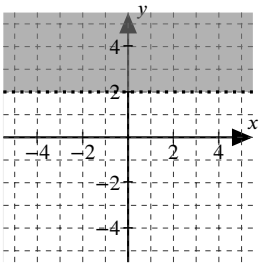
2.2

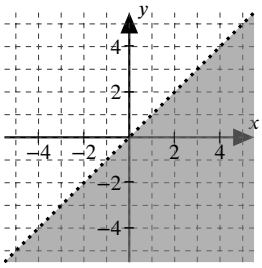
a) 

c) 

e) 

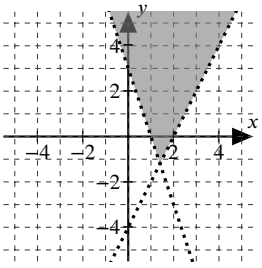
b) 

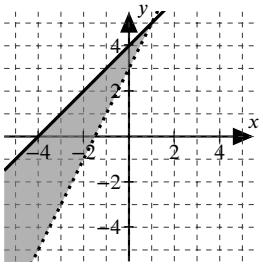
d) 

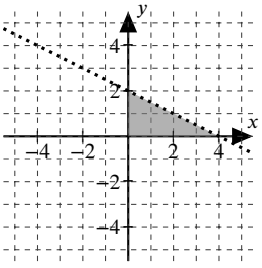
f) 

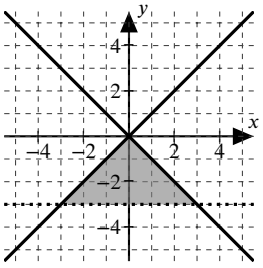
2.3 $(-2\,;5)$ oui $(2\,;-1)$ non $(2\,;1)$ oui $(0\,;-1)$ oui $(-1\,;7)$ non $(1\,;1)$ oui

2.4

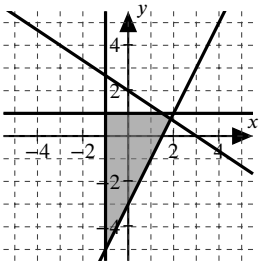
a) 

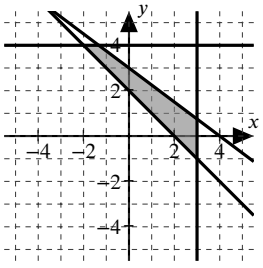
c) 

b) 

d) 

2.5

a) 

b) 

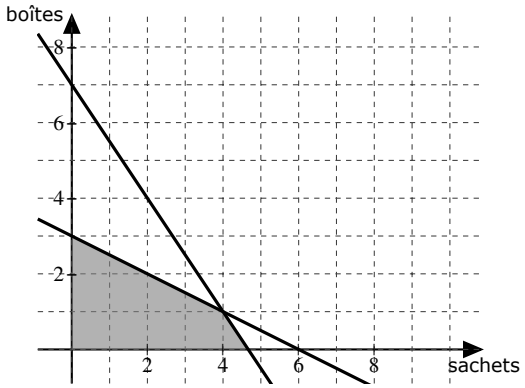
2.6 a) $(\frac{7}{5}\,;-\frac{6}{5})$ b) $(0\,;0)$ $(0\,;2)$ $(4\,;0)$ c) $(1\,;5)$ d) $(0\,;0)$ $(-3\,;-3)$ $(3\,;-3)$

2.7 a) $(-1\,;1)$ $(-1\,;-5)$ $(\frac{15}{8}\,;\frac{3}{4})$ $(\frac{3}{2}\,;1)$ b) $(3\,;-1)$ $(3\,;\frac{3}{4})$ $(-\frac{4}{3}\,;4)$ $(-2\,;4)$

2.8

a) $15x + 10y \leq 70$ b) $5x + 10y \leq 30$ c) $x \geq 0$ et $y \geq 0$

d)



e) 0 sachet et 0, 1, 2 ou 3 boîtes
1 sachet et 0, 1 ou 2 boîtes
2 sachets et 0, 1 ou 2 boîtes
3 sachets et 0 ou 1 boîte
4 sachets et 0 ou 1 boîte

2.9

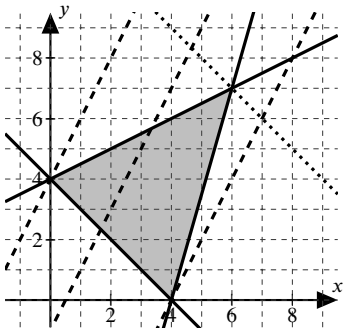
a) Max : $P_1(4\,;0) = 16$ et Min $P_1(0\,;4) = -8$

b) $y = 2x - 1$, $(2\,;3)$ et $(3\,;5)$

c) $P_2(6\,;7) = 13$

d) $P_2(4\,;0) = P_2(3\,;1) = P_2(2{,}5\,;1{,}5) = \cdots = 4$

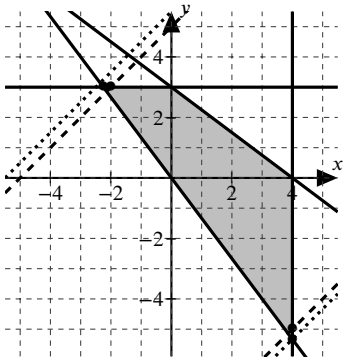
$$\begin{cases} x - 2y \geq -8 \\ 7x - 2y \leq 28 \\ x + y \geq 4 \end{cases}$$



2.10

a) $P_{max} = P(4\,;-\frac{16}{3}) = \frac{28}{3}$
$P_{min} = P(-\frac{9}{4}\,;3) = -\frac{21}{4}$

b) $P_{max} = P(4\,;-5) = 9$
$P_{min} = P(-2\,;3) = -5$



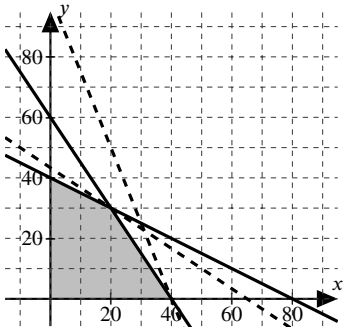
2.11

a) $P(x\,;y) = 50x + 20y$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

c) Il faut produire 40 boîtes de type A et aucune de type B. Le profit sera de CHF 2000.−.

d) Il faut produire 20 boîtes de type A et 30 de type B. Le profit sera de CHF 1300.−.

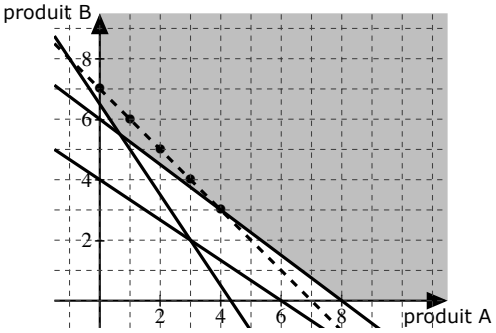


2.12

$P(x\,;y) = x + y$

$$\begin{cases} 15x + 10y \geq 65 \\ 20x + 30y \geq 120 \\ 300x + 400y \geq 2400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Il faut mettre 0 dose de produit A et 7 de produit B ou 1 de A et 6 de B ou 2 de A et 5 de B ou 3 de A et 4 de B ou 4 de A et 3 de B.
Le prix sera de CHF $7.-$.

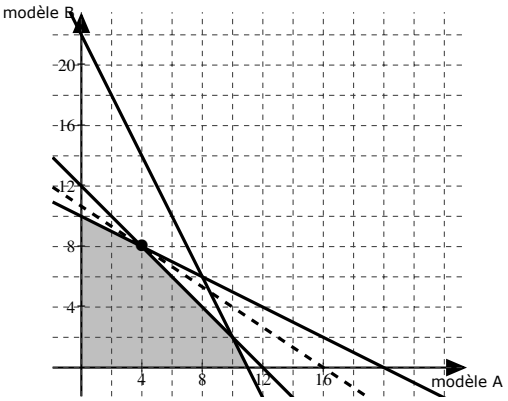


2.13

$P(x\,;y) = 200x + 300y$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 22 \\ x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Il faut faire 4 statues A et 8 statues B. Le profit sera de CHF $3200.-$.



2.14 150 t du fournisseur A et 625 t du fournisseur B

2.15

a) 15 armoires et 30 tables.

b) 15 armoires et 30 tables ou 20 armoires et 24 tables ou 25 armoires et 18 tables ou 30 armoires et 12 tables.

2.16 $4'000$ km en bateau, $2'000$ km en car et $2'000$ km en train.

8.3 Solutions - Statistiques

3.1

a) la population
b) un individu
c) variable statistique
d) quantitative
e) discrète
f) quantitative continue
g) qualitative / modalités
h) un échantillon
i) le produit
j) le prix / quantitative discrète (ou continue)
k) les voitures vendues
l) la couleur / qualitative
m) les élèves de la classe
n) la taille / quantitative continue
o) les collégiens
p) l'opinion / qualitative

3.2

a) qualitative
b) qualitative
c) quantitative discrète
d) quantitative discrète
e) quantitative continue
f) qualitative
g) quantitative continue
h) qualitative
i) quantitative continue
j) qualitative
k) quantitative discrète
l) quantitative discrète

3.3

a) l'effectif
b) l'effectif de la population
c) fréquence / $\frac{\text{effectif}}{\text{effectif population}}$

3.4

a) Population : employés d'une entreprise

Variable statistique : état civil

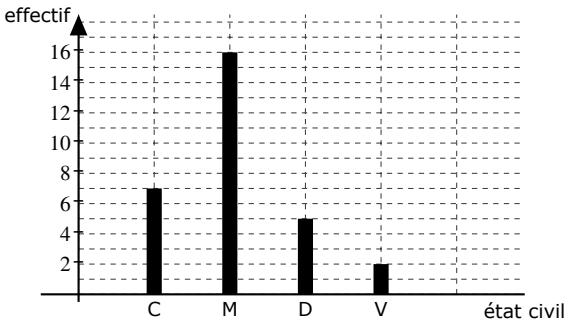
b) Célibataire, Marié·e, Divorcé·e, Veu·f·ve

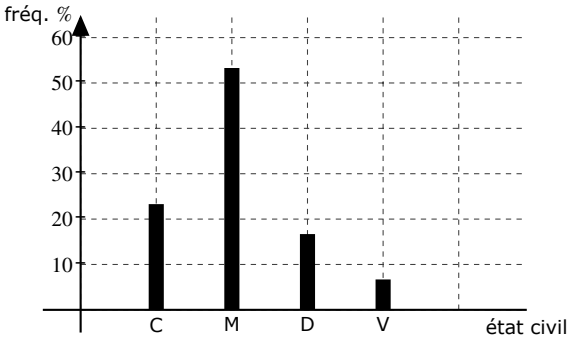
c) ***Répartition des employés selon leur état civil.***

État civil	Effectif n_i	Fréquence f_i en %
Célibataire	7	23,3
Marié·e	16	53,3
Divorcé·e	5	16,7
Veu·f·ve	2	6,7
Total	30	100

d) Le mode est "Célibataire".

f) Les deux diagrammes sont identiques seules les échelles changent.





3.5

a) Enfants de classes de troisième primaire

b) Choix pour la journée ”neige”

c) 6

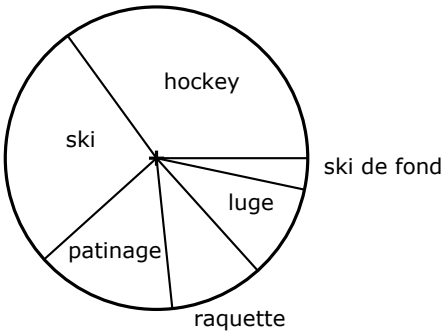
d) 10% des élèves ont choisi la luge.

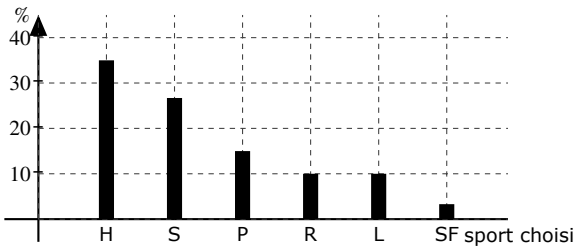
e) Le mode est ”hockey”.
L’activité où il y aura le plus d’élèves est le hockey.

Répartition des élèves selon leur choix pour la journée ”neige”

Sport choisi	Effectif n_i	Fréquence f_i en %	Angle α_i
Hockey	21	0,350	126
Ski	16	0,267	96
Patinage	9	0,150	54
Raquette	6	0,100	36
Luge	6	0,100	36
Ski de fond	2	0,033	12
Total	60	1,000	360

f)





3.6

a)

État	effectif
guéri	775
malade	100
décédé	25
Total	900

b) 86,1%

c) 2,78%

3.7

a) Quantitative discrète

Répartition des étudiants selon le nb de points au test de statistiques

Note x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i en %	Fréquence cumulée F_i en %
2	2	2,5	2,5
3	6	7,5	10
4	6	7,5	17,5
5	9	11,3	28,8
6	14	17,5	46,3
7	19	23,7	70
8	11	13,8	83,8
9	8	10	93,8
10	5	6,2	100
Total	80	100	

b) 7. La majorité des étudiants ont eu 7 points.

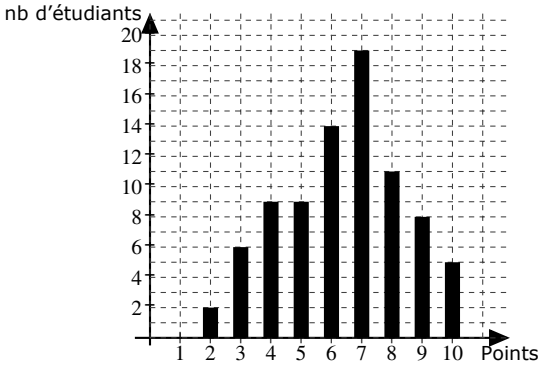
c) 17,5%. 17,5% des étudiants ont eu 6 points.

d) 46,3%. 46,3% des étudiants ont eu 6 points ou moins.

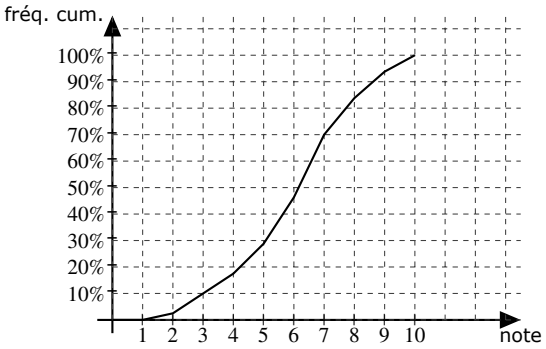
e) $46{,}3\% - 10\% = 46{,}3\%$

f) $100\% - 46{,}3\% = 53{,}7\%$

g)

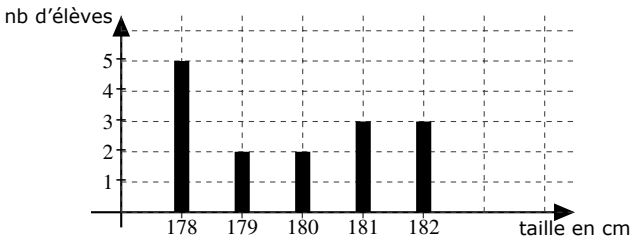


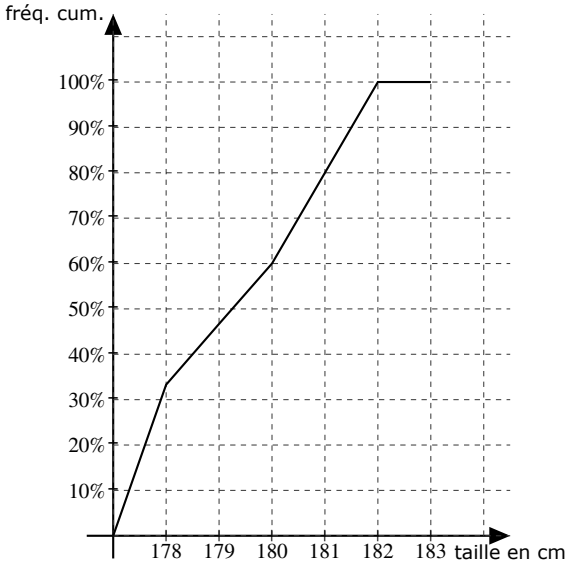
h)



3.8

Taille en cm	178	179	180	181	182
Effectif	5	2	2	3	3
Fréquence en %	$33{,}\overline{3}$	$13{,}\overline{3}$	$13{,}\overline{3}$	20	20
Fréq. cum. en %	$33{,}\overline{3}$	$46{,}\overline{6}$	60	80	100





3.9

a) Non. Il n'y a eu que 8 infractions de plus, ce qui ne représente que $\frac{8}{4778} = 0{,}17\%$.

b) La graduation des effectifs ne commence pas à 0.

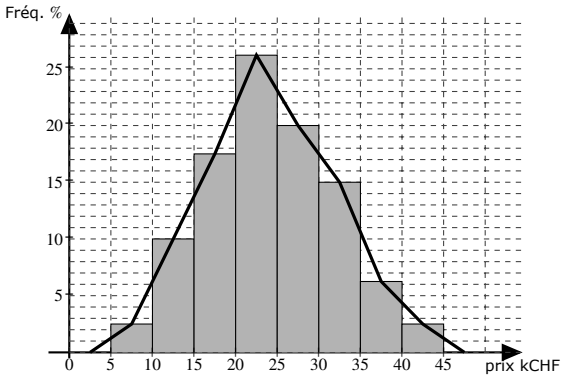
3.10

a) **Répartition des voitures selon leur prix**

$[b_{i-1}\,;b_i[$	x_i	n_i	f_i	F_i
[10′000 ; 15′000[	12′500	2	0,025	0,025
[15′000 ; 20′000[	17′500	8	0,100	0,125
[20′000 ; 25′000[	22′500	14	0,175	0,3
[25′000 ; 30′000[	27′500	21	0,2625	0,563
[30′000 ; 35′000[	32′500	16	0,200	0,763
[35′000 ; 40′000[	37′500	12	0,150	0,913
[40′000 ; 45′000[	42′500	5	0,0625	0,975
[45′000 ; 50′000[	47′500	2	0,025	1
Total		80	1,000	

b) [25′000 ; 30′000[

c)



d)

e) $91{,}3 - 12{,}5 = 78{,}8\%$

f) $100 - 91{,}3 = 8{,}7\%$

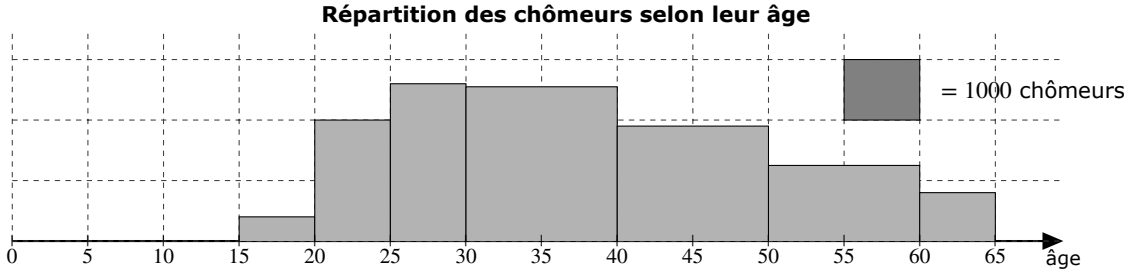
3.11 voir corrigé du 48

3.12 voir corrigé du 49

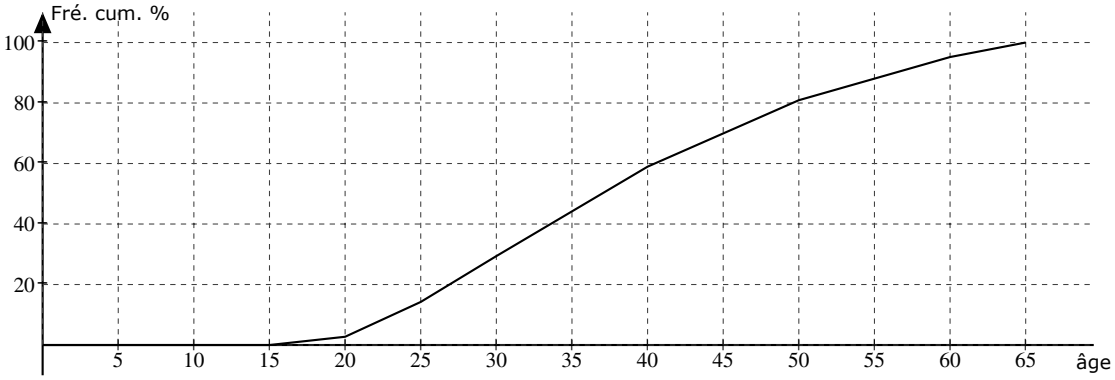
3.13

a) Les largeurs des colonnes ne sont pas proportionnelles aux largeurs des classes.

b)



c)



3.14

1. a 2. c 3. d 4. b

3.15

a) Quantitative discrète

b) Données brutes ordrées :
0 0 0 0 0 1 1 1 2 2
2 2 3 3 4 4 4 5 6 10
La médiane est donc 2

c) Au moins 50% des employés a manqué 2 jours ou moins.
Au moins 50% des employés a manqué 2 jours ou plus.

d) **Répartition des employés selon le nb de jours d'absence**

x_i	n_i	f_i	F_i
0	5	0,25	0,25
1	3	0,15	0,4
2	4	0,2	0,6
3	2	0,1	0,7
4	3	0,15	0,85
5	1	0,05	0,9
6	1	0,05	0,95
10	1	0,05	1
Totaux	20	1	

e) 17 employés, donc 85%

f) 3 employés, donc 15%

g) Le mode est 0.
La majorités des employés n'a eu aucune absence.

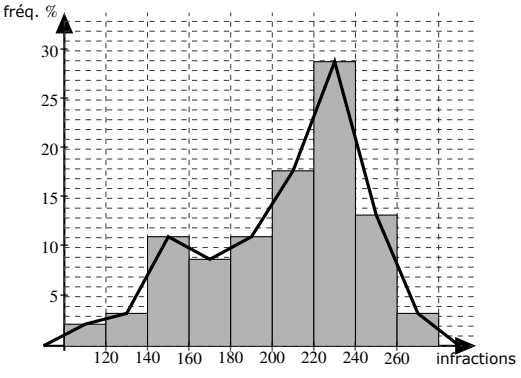
3.16

a) **Répartition des jours de l'été selon le nombre d'infractions constatées**

Classe $[b_{i-1}\,;b_i[$	centre x_i	effectif n_i	fréquence f_i	fréq. cum. F_i
[100 ; 120[	110	2	0,022	0,022
[120 ; 140[	130	3	0,033	0,055
[140 ; 160[	150	10	0,111	0,166
[160 ; 180[	170	8	0,088	0,254
[180 ; 2000[	190	10	0,111	0,365
[200 ; 220[	210	16	0,178	0,543
[220 ; 240[	230	26	0,289	0,832
[240 ; 260[	250	12	0,133	0,965
[260 ; 280[	270	3	0,033	1
	Total :	90	1	

b) [220 ; 240[

c)



d) $M = 200 + \dfrac{0{,}5 - 0{,}365}{0{,}178} \cdot 20 \simeq 215{,}17$

3.17

a) X : quantitative discrète
Y : quantitative continue
W : quantitative continue

b) $X_0 = 1$ $M = 2$ $\mu = 2{,}7$

d) $Y_0 = [18\,;19[$ $M = 19$ $\overline{Y} = 19{,}15$

e) $W_0 = [0\,;400[$ $M = 1'266{,}67$ $\overline{W} = 1'370$

c)

$[b_{i-1}\,;b_i[$	y_i	n_i	f_i	F_i	$f_i y_i$
[17 ; 18[	17,5	6	0,15	0,15	2,625
[18 ; 19[	18,5	14	0,35	0,5	6,475
[19 ; 20[	19,5	12	0,3	0,8	5,85
[20 ; 21[	20,5	5	0,125	0,925	2,5625
[21 ; 22[	21,5	2	0,05	0,975	1,075
[22 ; 23[	22,5	1	0,025	1	0,5625
	Total :	40	1		19,15

3.18 $M_0 = 14$ (24^e valeur) $M = 14$ $\mu = \dfrac{20+33+84+117+196+120+48+17}{47} = 13{,}5$

3.19

Classe	$[0\,;2[$	$[2\,;4[$	$[4\,;6[$	$[6\,;8[$	$[8\,;10[$	$[10\,;12[$
Effectif	3	8	15	14	6	2
Fréquence	0,0625	0,1667	0,3125	0,291	0,125	0,0417
Fréq. cum.	0,0625	0,2292	0,5417	0,8327	0,9577	1
$f_i \cdot x_i$	0,0625	0,5	1,5625	2,0417	1,125	0,4583

$M_0 = [4\,;6[$ $M = 4 + \dfrac{0{,}5 - 0{,}2292}{0{,}3125} \cdot 2 \simeq 5{,}73$ $\mu = 5{,}75$

3.20 $M_0 = [170\,;180[$ $M = 172{,}7$ $\mu = 170{,}2$

3.21 $\mu = 41'250$ km

3.22 Sur le polygone des fréq. cumulées, on détermine la valeur qui correspond à une fréquence cumulée de $0{,}5$.

3.23
Seul le mode peut être déterminé.
Comme les modalités ne sont pas des nombres, elles n'ont pas forcément un ordre. Si il n'y a pas d'ordre, la médiane n'a pas de sens.
Comme les modalités ne sont pas des nombres, on ne peut pas les additionner donc faire de moyenne.
Par exemple, comment pourrait-on donner un sens à la moyenne des partis politiques pour lesquels on a voté ?

3.24

a) $Q_1 = 5$, $M = 7$, $Q_3 = 8$ points

b) $Q_1 = 178$, $M = 180$, $Q_3 = 181$ cm

3.25

a) $Q_1 = 20 + \dfrac{0{,}25 - 0{,}125}{0{,}175} \cdot 5 \simeq 23{,}6$ $M = 25 + \dfrac{0{,}5 - 0{,}3}{0{,}2625} \cdot 5 \simeq 28{,}8$ $Q_3 = 30 + \dfrac{0{,}75 - 0{,}563}{0{,}2} \cdot 5 \simeq 34{,}7$ KCHF

b) $Q_1 = 4 + \dfrac{0{,}25 - 0{,}229}{0{,}313} \cdot 2 \simeq 4{,}1$ $M = 4 + \dfrac{0{,}5 - 0{,}229}{0{,}313} \cdot 2 \simeq 5{,}7$ $Q_3 = 6 + \dfrac{0{,}75 - 0{,}542}{0{,}291} \cdot 2 \simeq 7{,}4$ minutes

3.26

a) **Répartition des étudiants selon le nombre d'heures de classe le mardi**

x_i	n_i	f_i	F_i
1	2	0,05	0,05
2	3	0,075	0,125
3	7	0,175	0,3
4	9	0,225	0,525
5	10	0,25	0,775
6	6	0,1	0,925
7	2	0,25	0,975
8	1	0,1	1
Total	40	1,000	

b) quantitative discrète

c) $M_0 = 5$ $M = 4$
$\mu = 4{,}325$

d) $Q_3 = 5$

e) $D_8 = 6$

3.27

a) **Répartition des cannes des joueurs selon leur longueur en centimètres**

$[b_{i-1}\,;\,b_i[$	x_i	n_i	f_i	F_i	$f_i x_i$
$[120\,;\,130[$	125	6	0,0375	0,0375	4,688
$[130\,;\,140[$	135	21	0,0131	0,16875	17,719
$[140\,;\,150[$	145	45	0,28125	0,45	40,78
$[150\,;\,160[$	155	55	0,34375	0,79375	53,28
$[160\,;\,170[$	165	26	0,1625	0,95625	26,81
$[170\,;\,180[$	175	7	0,04375	1	7,66
	Total	160	1,000		151,94

b) quantitative continue

c) $M_0 = [150\,;\,160[$

$M = 150 + \dfrac{0{,}5 - 0{,}45}{0{,}34375} \cdot 10 \simeq 151{,}45$

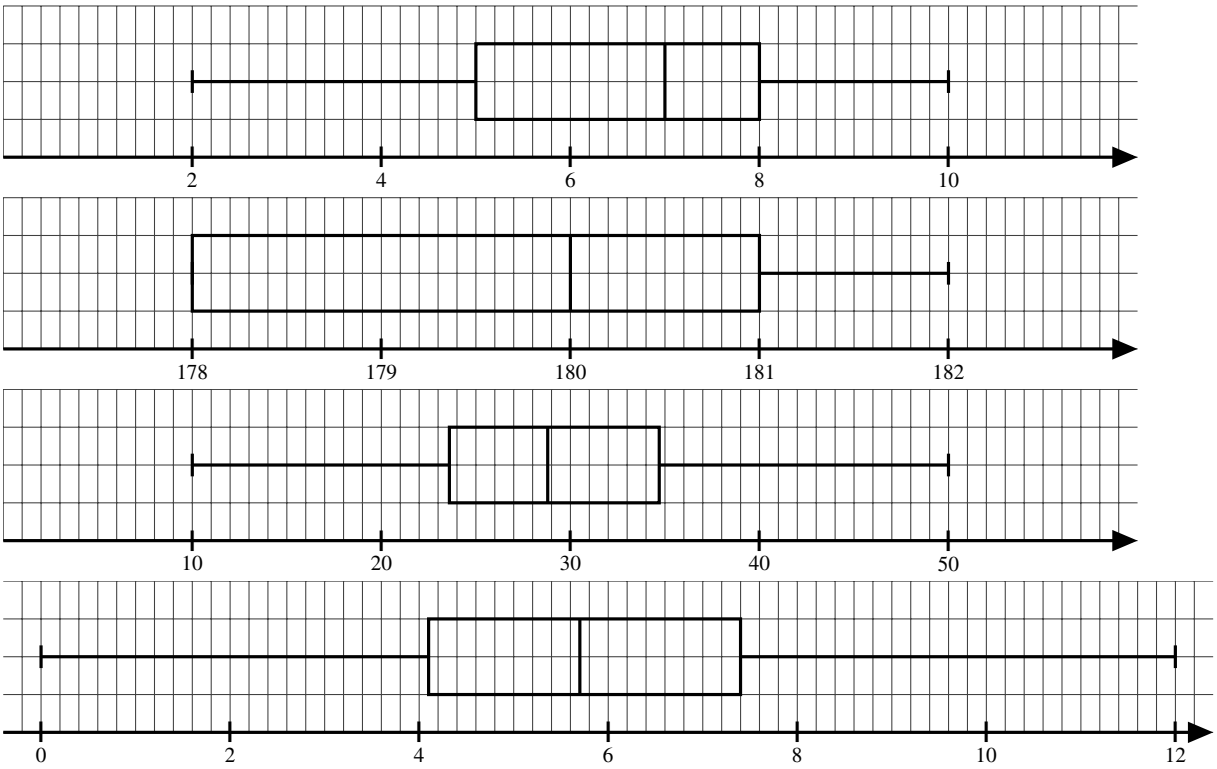
$\mu = 151{,}94$

d) $Q_3 = 158{,}72$

$D_4 = 148{,}22$

$D_7 = 157{,}27$

3.28



3.29

a) $M = 6$, $Q_1 = 4$, $Q_3 = 10$
écart interquartile $EIQ = 6$

b) 2 et 13

c) 6

d) 50%

e) Non, il y en a autant.

f) Non, la même proportion, pas forcément le même nombre car cela dépend du nombre d'employés total

g) Moins car ils représentent 50% pour la A et moins de 50% pour la C.

3.30

A : Valeurs concentrées au centre + symétriques ⇒ 4

B : Valeurs très étendues + symétriques ⇒ 3

C : Étirement à gauche ⇒ 1

D : Étirement à droite ⇒ 2

3.31

a) Ville Y : $M = 12$; $Q_1 = 3$; $Q_3 = 16$ Ville X : $M = 6$; $Q_1 = 3$; $Q_3 = 12$

b) La médiane et Q_3 sont plus élevés pour Y que pour X. Donc Y est plus consommatrice que X.

c) Non, le quart de la population fume trois cigarettes ou moins par jour.

d) Non, la moitié des habitants de Y fument douze cigarettes ou moins par jour.

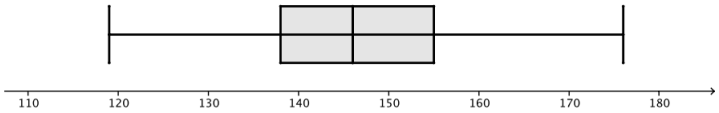
3.32

a) $M = 146$

$Q_1 = 138$

$Q_3 = 155$

b)



3.33 voir corrigé du 48

3.34 voir corrigé du 49

3.35

a)

Classe A

x_i	n_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	0	0	0	0
1	1	0,032	0,032	0,03
2	0	0	0	0
3	4	0,129	0,387	1,16
4	8	0,258	1,032	4,13
5	7	0,226	1,129	5,65
6	5	0,161	0,968	5,81
7	4	0,129	0,903	6,32
8	1	0,032	0,258	2,06
9	1	0,032	0,29	2,61
10	0	0	0	0
Total	31	1	5	27,77

Classe B

x_i	n_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	2	0,065	0	0
1	2	0,065	0,065	0,06
2	4	0,129	0,258	0,52
3	4	0,129	0,387	1,16
4	2	0,065	0,258	1,03
5	3	0,097	0,484	2,42
6	2	0,065	0,387	2,32
7	5	0,161	1,129	7,90
8	3	0,097	0,774	6,19
9	1	0,032	0,29	2,61
10	3	0,097	0,968	9,68
Total	31	1	5	33,90

b) On obtient pour chacune des classes le diagramme à barres ci-dessous :

c) $\mu_A = 5$ $\mu_B = 5$

d) Pour la classe A, la variance et l'écart-type sont $\sigma^2(A) \simeq 2{,}77$ et $\sigma_A \simeq 1{,}67$
Pour la classe B, la variance et l'écart-type sont $\sigma^2(B) \simeq 8{,}90$ et $\sigma_B \simeq 2{,}98$

e) La classe A et la classe B ont la même moyenne, mais au vu de l'écart-type de chaque série, on peut dire que la classe A est une classe homogène alors que la classe B est une classe hétérogène.

3.36 $\sigma^2 = 88{,}799$ $\sigma = 9{,}423$

3.37 $\sigma^2 = 19{,}770$ $\sigma = 4{,}446$

3.38 a) $\mu = 2{,}7$ $M = 2$ $M_0 = 1$ b) $\sigma^2 = 3{,}01$ $\sigma = 1{,}74.$

3.39 a) $\mu = 50{,}50$ $M = 50{,}45$ classe modale = $[49\,;51[$
b) $\sigma^2 = 9{,}35$ $\sigma = 3{,}06$

3.40 a) $M_0 = 11$ $M = 11$ $\mu = 11{,}37$ b) $\sigma^2 = 3{,}632$ $\sigma = 1{,}906$

3.41

a) Cote $= \dfrac{2}{2} = 1$ C'est déjà pas mal !

b) Cote $= \dfrac{-2}{2} = -1$ Courage, encore un peu d'entraînement...

c) Cote $= \dfrac{0}{5} = 0$ Pile dans la moyenne.

d) Cote $= \dfrac{3}{1} = 3$ Excellent !

3.42 a) $-0{,}92$ b) $1{,}1$

3.43 Cotes Z des 3 élèves : $Z_E \cong 2{,}54$ $Z_F \cong 2{,}17$ $Z_G = 2{,}8$ Georges obtiendra le prix.

3.44

a) $\mu = 23{,}55$ $M = 20{,}5$ d) $3{,}75$ Le candidat est une exception.

b) 80%

c) 20% e) $14{,}62$ Non, la situation serait illégale.

3.45 a) $2{,}77$ b) 95% des bébés sont restés entre 1 et 10 jours.

3.46 voir corrigé du 48

3.47 voir corrigé du 49

3.48

a) Les étudiants qui désirent faire partie de l'équipe de football du gymnase.

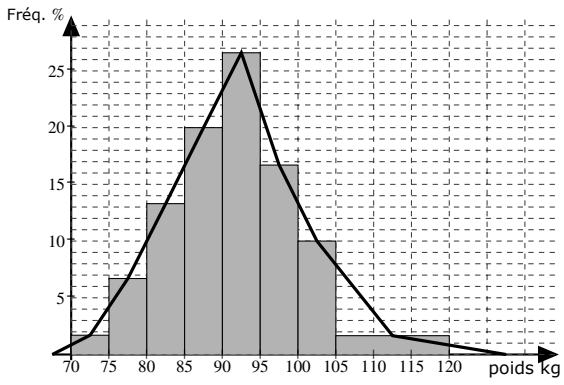
b) Le poids des étudiants qui désirent faire partie de l'équipe de football du gymnase.

c) Quantitative continue.

d) **Répartition des étudiants de l'équipe de foot selon leur poids**

$[b_{i-1}\,;\,b_i[$	x_i	n_i	f_i
[70 ; 75[	72,5	1	0,017
[75 ; 80[	77,5	4	0,067
[80 ; 85[	82,5	8	0,133
[85 ; 90[	87,5	12	0,200
[90 ; 95[	92,5	16	0,266
[95 ; 100[	97,5	10	0,167
[100 ; 105[	102,5	6	0,100
[105 ; 120[	112,5	3	0,050
Total		60	1,000

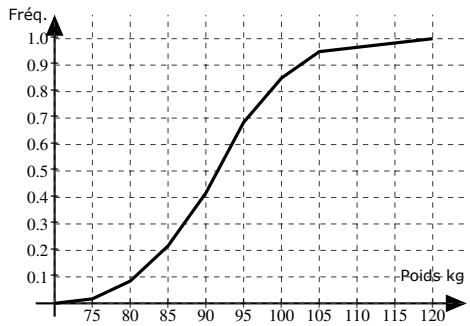
e)



f)

F_i
0,017
0,084
0,217
0,417
0,684
0,851
0,951
1

g)



h) 14,9%

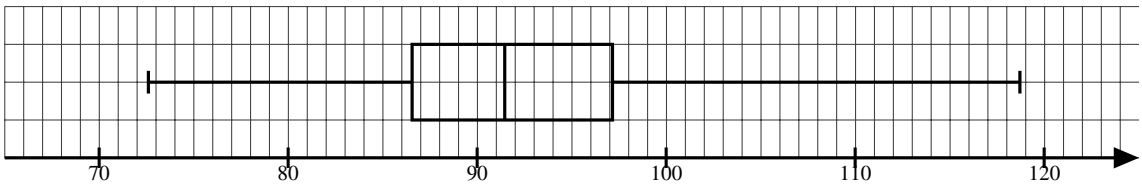
i) 60%

j) $M \simeq 91{,}45$ $\mu \simeq 91{,}66$ $M_0 = [90\,;95[$

k) $Q_1 \simeq 86{,}55$ $Q_3 \simeq 19{,}05$ $EIQ \simeq 10{,}6$

l) 46,1

m)



n) $\sigma^2 \simeq 877{,}85$ $\sigma \simeq 29{,}63$

o) $Z = \dfrac{72{,}6 - 91{,}66}{29{,}63} \simeq -0{,}64$

3.49

a) L'ensemble des ouvriers de l'usine PRO.

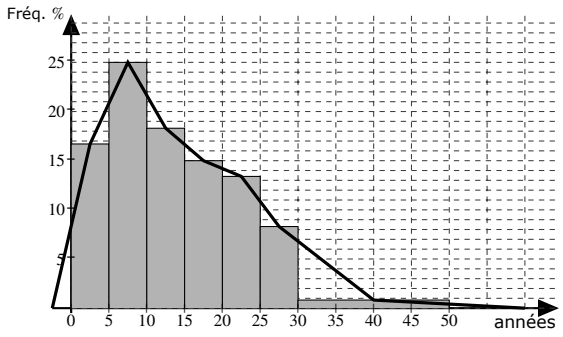
b) Le nombre d'années d'ancienneté des ouvriers.

c) Quantitative continue.

d) **Répartition des ouvriers selon leur ancienneté**

$[b_{i-1}\,;b_i[$	x_i	n_i	f_i
[0 ; 5[	2,5	10	0,167
[5 ; 10[	7,5	15	0,250
[10 ; 15[	12,5	11	0,183
[15 ; 20[	17,5	9	0,150
[20 ; 25[	22,5	8	0,134
[25 ; 30[	27,5	5	0,083
[30 ; 50[	40,0	2	0,033
Total		60	1,000

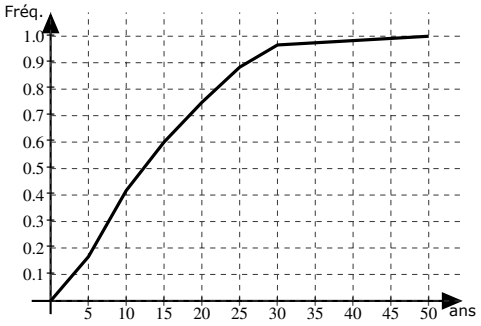
e)



f)

F_i
0,167
0,417
0,6
0,75
0,883
0,967
1

g)



h) 33,3%

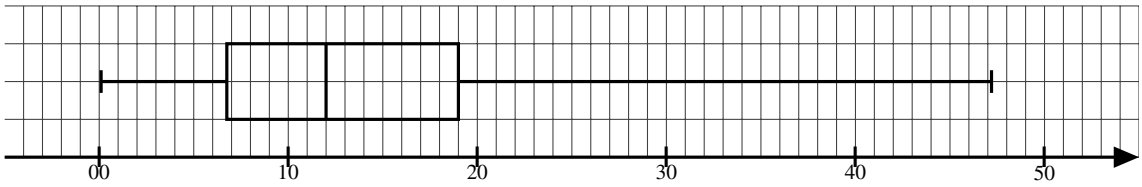
i) 25%

j) $M \simeq 12{,}05$ $\mu \simeq 13{,}82$ $M_0 = [5\,;10[$

k) $Q_1 \simeq 6{,}75$ $Q_3 \simeq 19{,}05$ $EIQ \simeq 12{,}3$

l) $E = 47{,}1$

m)



n) $\sigma^2 \simeq 82{,}05$ $\sigma \simeq 9{,}06$

o) $Z = \dfrac{47{,}2 - 13{,}82}{9{,}06} \simeq 3{,}7$

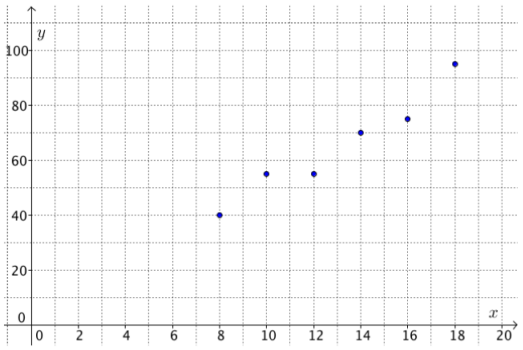
3.50 Corrélation linéaire négative : plus l'âge du conducteur augmente, moins il a d'accidents.

3.51 Pas de corrélation entre leur taille et leur poids.

3.52 Corrélation linéaire positive : plus le revenu annuel moyen est élevé, plus le loyer moyen d'un studio est élevé.

3.53

a)



b) Le nuage étant dessiné, on peut tracer une droite qui passe au mieux par ces points, il y a donc une corrélation positive entre ces deux variables.

8.4 Solutions - Signe d'une fonction

4.1

a)

x		-2		3		4	
$f(x)$	+	0	−	0	+	0	−

b)

x		-2		3		4	
$g(x)$	−	0	−	0	+	0	−

c)

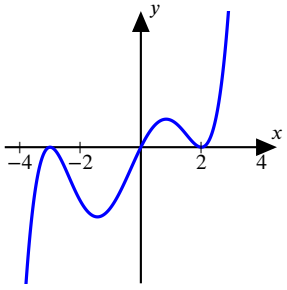
x	
$h(x)$	+

d)

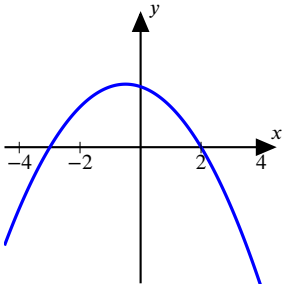
x		-3		0		4	
$i(x)$	−	0	+	0	+	0	+

4.2

a)



b)



4.3

a)

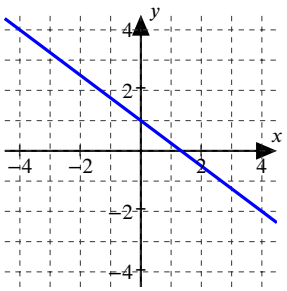
x		4		6	
$-5(x-4)(x-6)$	−	0	+	0	−

b)

x		-7		5	
$(5-x)(x+7)^2$	+	0	+	0	−

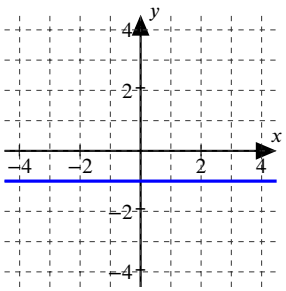
4.4

a)



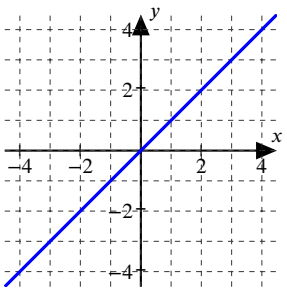
x		$\frac{4}{3}$	
$f(x)$	+	0	−

c)



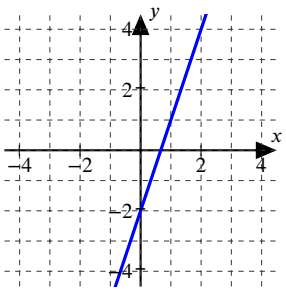
x	
$h(x)$	−

b)



x		0	
$g(x)$	−	0	+

d)



x		$\frac{2}{3}$	
$i(x)$	−	0	+

4.5

a)

x		7	
$7-x$	+	0	−

b)

x		$\frac{7}{4}$	
$4x-7$	−	0	+

c)

x		6	
$-\frac{1}{3}x+2$	+	0	−

d)

x		0	
$\frac{4}{5}x$	−	0	+

e)

x	
13	+

f)

x		6	
$-6+x$	−	0	+

4.6

a)

x		$-\frac{3}{2}$		5	
$3(5-x)(2x+3)$	−	0	+	0	−

b)

x		0		$\frac{5}{4}$	
$3x(-5+4x)$	+	0	−	0	+

c)

x		-4		6	
$-4(x+4)(x-6)$	−	0	+	0	−

d)

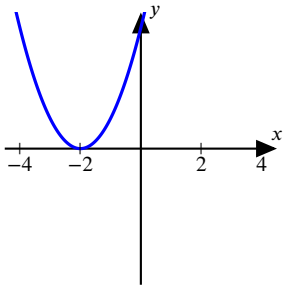
x		$-\frac{1}{7}$		0	
$-4x(7x+1)$	−	0	+	0	−

4.7 Par exemple $f(x)=4-x$ ou $f(x)=8-2x$ ou $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$ ou ...

4.8

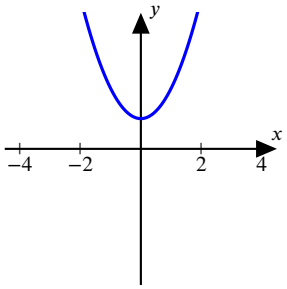
a)

x		-2	
$(x+2)^2$	+	0	+



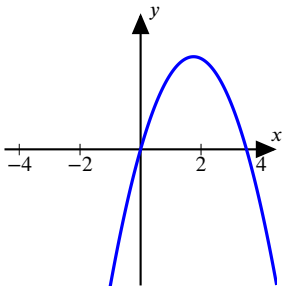
b)

x	
x^2+2	+



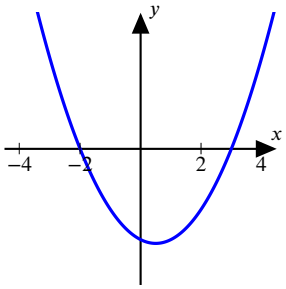
c)

x		0		$\frac{7}{2}$	
$-2x^2+7x$	−	0	+	0	−



d)

x		-2		3	
x^2-x-6	+	0	−	0	+



4.9

a)

x		-11		-5	
$-x^2-16x-55$	−	0	+	0	−

b)

x		-1		$\frac{1}{13}$	
$13x^2+12x-1$	+	0	−	0	+

c)

x		$-\frac{3}{2}$	
$4x^2+12x+9$	+	0	+

d)

x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
$-5+x^2$	+	0	−	0	+

e)

x	
x^2+x+9	+

f)

x		0		$\frac{2}{9}$	
$-9x^2+2x$	−	0	+	0	−

g)

x	
$-x^2-9$	−

h)

x		0	
$-5x^2$	−	0	−

4.10

a)

x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
$(5-x^2)(2x^2+3)$	−	0	+	0	−

b)

x		-3		2	
$(x+3)(x^2+x-6)$	−	0	−	0	+

4.11

a) $x^2(8+7x)(8-7x)$

b) $3x(x-5)(x+4)$

c) $(3x+1)(3x-2)$

d) $2(x+5)(x^2-5x+25)$

e) $10(2x-1)^3$

f) $(x-4)(x+3)(x-3)$

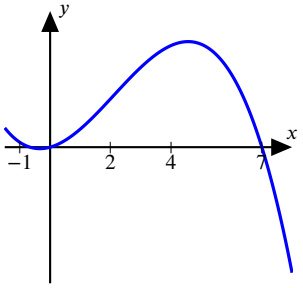
g) $(x-2)(x+2)(x-5)(x+5)$

h) $(x+5)(x-2)(x+1)$

4.12

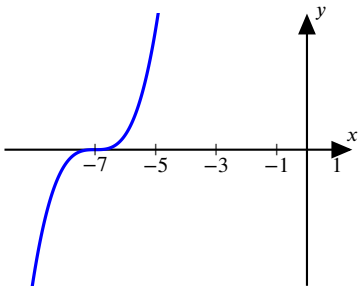
a)

x		$-\frac{2}{3}$		0		7	
$5x(3x+2)(7-x)$	+	0	−	0	+	0	−



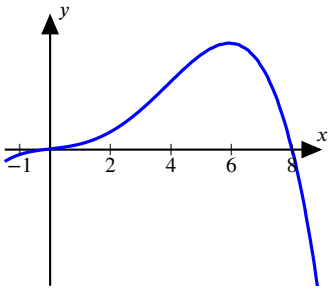
c)

x		-7	
$(x+7)^3$	−	0	+



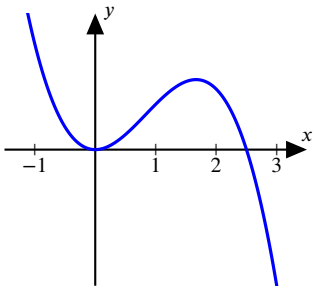
b)

x		$-\frac{1}{5}$		8	
$-4(x-8)(5x+1)(x^2+2)$	−	0	+	0	−



d)

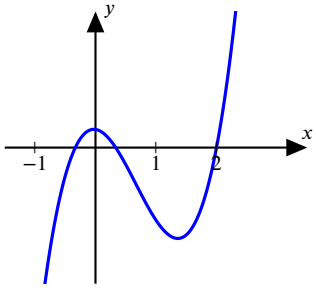
x		0		$\frac{5}{2}$	
$x^2(-2x+5)$	+	0	+	0	−



4.13

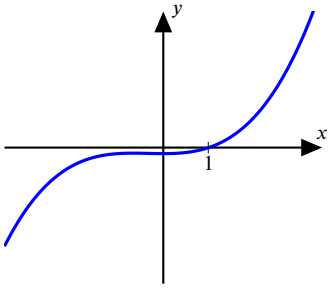
a)

x		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		2	
$(3x+1)(3x-1)(x-2)$	−	0	+	0	−	0	+



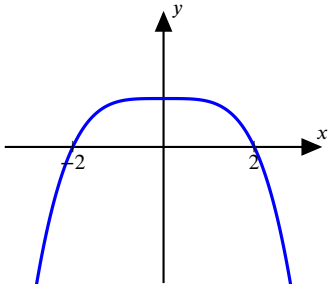
c)

x		1	
$(x-1)(x^2+2x+2)$	−	0	+



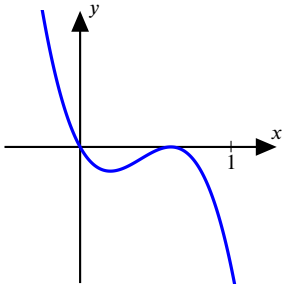
b)

x		-2		2	
$(2+x)(2-x)(4+x^2)$	−	0	+	0	−



d)

x		0		$\frac{3}{5}$	
$-x(5x-3)^2$	+	0	−	0	−



4.14

a)

x		5	
$(5-x)^3$	+	0	−

b)

x		$-\frac{7}{3}$	
$(3x+7)^4$	+	0	+

c)

x		0		2	
$x^3(x-2)^2$	−	0	+	0	+

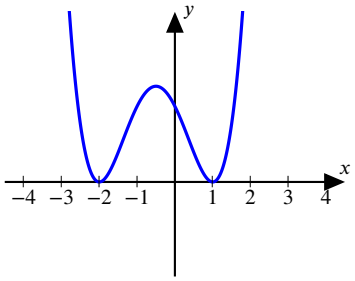
d)

x		-4		0		6	
$-3x(x+4)^4(6-x)^2$	+	0	+	0	−	0	−

4.15

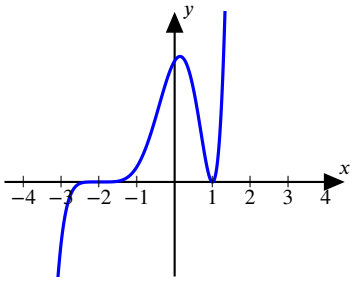
a)

x		-2		1	
$(x-1)^2(x+2)^2$	+	0	+	0	+



b)

x		-2		1	
$(x-1)^2(x+2)^5$	−	0	+	0	+



4.16

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{6\}$

x		-4		6	
$\frac{x+4}{6-x}$	−	0	+	||	−

b) $D_f = \mathbb{R}^*$

x		-1		0	
$\frac{2(x+1)^3}{x^4}$	−	0	+	||	+

c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{11}{2}\}$

x		1		$\frac{11}{2}$		7	
$\frac{-x^2+8x-7}{2x-11}$	+	0	−	||	+	0	−

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;3\}$

x		-3		3	
$\frac{x+3}{81-x^4}$	+	||	+	||	−

4.17

a) $\mathcal{S} = [-11\,;-4]$ b) $\mathcal{S} =]0\,;7[$ c) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ d) $\mathcal{S} =]0\,;\frac{7}{2}[$

4.18

a) $D_f =]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[$

b) $D_f = [\frac{1}{5}\,;3[$

c) $D_f = [9\,;+\infty[$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

8.5 Solutions - Dérivées

5.1

a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

x	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	-1	-16	-100	-25	-4

b) $g'(x) = x - 1$

x	-4	-2	0	2	4
$g'(x)$	-5	-3	-1	1	3

5.2

$f'(-8) < 0$
$f'(-5) > 0$
$f'(-4) > 0$
$f'(-3) < 0$

$f'(-2) = 0$
$f'(0) > 0$
$f'(1) < 0$
$f'(2) > 0$

$f'(4) = 0$
$f'(5) < 0$
$f'(6) = 0$
$f'(7) > 0$

$f'(9) < 0$
$f'(-\frac{1}{2}) > 0$
$f'(\frac{9}{2}) = 0$
$f'(-\frac{7}{2}) < 0$

5.3

a) La fonction est croissante jusqu'au point d'abscisse 4, où elle atteint son maximum, puis elle est décroissante.

b) La fonction est croissante jusqu'au point d'abscisse -1, où elle atteint un maximum, puis elle est décroissante jusqu'à point d'abscisse 0, où elle atteint un minimum et devient à nouveau croissante.

5.4

a) $f'(x) = 0$ b) $g'(x) = -3$ c) $h'(x) = 1$ d) $i'(x) = -3$

5.5 a) $4x^3$ b) 0 c) $-3 \cdot \frac{1}{x^4}$ d) $\frac{9}{5} \cdot \sqrt[5]{x^4}$ e) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ f) $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

5.6 $\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5.7 a) $\frac{1}{\sqrt[8]{x^9}}$ b) $30x^2$ c) 0 d) $-\frac{35}{x^8}$ e) $\frac{7x^6}{5}$ f) $\sqrt{2}$

5.8 a) $3x^2 - \frac{4}{7}x + 2$ c) $-\frac{1}{x^2}$ e) $-14x + \frac{1}{3}$
b) 1 d) $10x^9 - 20x^4$ f) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

5.9 a) $30x - 29$ c) $18x - 3x^2$ e) $32x - 24$
b) $150x^4 + 72x^3 + 72x^2$ d) $20x^3 + 54x^2 + 26x - 26$ f) $3x^2 - 14x - 49$

5.10 a) $-\frac{6}{(x-4)^2}$ c) $\frac{-10x-3}{x^4}$ e) $\frac{-4x^2+10x+14}{(x^2-2x+6)^2}$
b) $\frac{4x^2-10x}{(4x-5)^2}$ d) $\frac{10x^5-9x^4+4x^3-50x+15}{(5x^2-3x+1)^2}$ f) $\frac{63x^2}{(x^3+3)^2}$

5.11 $\left(\frac{x^3}{4}\right)' = \left(\frac{1}{4}x^3\right)' = \frac{3}{4}x^2$ $\left(\frac{x^3}{4}\right)' = \frac{12x^2-0}{16} = \frac{3}{4}x^2$

5.12 $\left(\frac{4}{x^3}\right)' = \left(4\frac{1}{x^3}\right)' = \left(4x^{-3}\right)' = -12x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$ $\left(\frac{4}{x^3}\right)' = \frac{0-12x^2}{x^6} = -\frac{12}{x^4}$

5.13 $\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)' = 5\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$ $\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)' = 0 + 5\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$

5.14 $[(3x+2)(5x-1)]' = 3(5x-1) + 5(3x+2) = 30x + 7$ $[(3x+2)(5x-1)]' = [15x^2 + 7x - 2]' = 30x + 7$

5.15 a) $20(5x-3)^3$ d) $-2(7-x)$ g) $\frac{6x^2+7x+6}{\sqrt{(x^2+3)(4x+7)}}$
b) $\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ e) $10(x-2)(x^2-4x-6)^4$ h) $-\frac{25}{2(x-3)^2\sqrt{\frac{8x+1}{x-3}}}$
c) $-\frac{56(x+4)^6}{(x-4)^8}$ f) $\frac{-36x^2}{(2x^3+1)^7}$ i) $\frac{2x+3}{3\sqrt[3]{(x^2+3x+1)^2}}$

5.16 $[(11x+8)^2]' = [(11x+8)(11x+8)]'$
$= 11(11x+8) + 11(11x+8) = 242x + 176$
$[(11x+8)^2]' = 22(11x+8) = 242x + 176$

5.17 a) $3(x-3)^4(4x+13)$
b) $2(3x-1)(x^2+9)^6(24x^2-7x+27)$
c) $4x^3(x^2+x+11)^3(3x^2+2x+11)$

5.18 a) $\frac{(x-5)^2(x+13)}{(x+1)^3}$ b) $\frac{-6(x-12)x^8}{(8-x)^4}$ c) $\frac{(x^2-x+1)^2(x^2+2x-5)}{x^6}$

5.19

$$\left(\left(\frac{3x+1}{5-x}\right)^4\right)' = 4\left(\frac{3x+1}{5-x}\right)^3 \cdot \left(\frac{3x+1}{5-x}\right)'$$
$$= 4\left(\frac{3x+1}{5-x}\right)^3 \cdot \frac{3(5-x)-(3x+1)(-1)}{(5-x)^2}$$
$$= \left(\frac{3x+1}{5-x}\right)^3 \cdot \frac{64}{(5-x)^2}$$
$$= \frac{64(3x+1)^3}{(5-x)^5}$$

$$\left(\frac{(3x+1)^4}{(5-x)^4}\right)'$$
$$= \frac{\left((3x+1)^4\right)' \cdot (5-x)^4 - (3x+1)^4 \cdot \left((5-x)^4\right)'}{(5-x)^8}$$
$$= \frac{12(3x+1)^3 \cdot (5-x)^4 + 4(3x+1)^4 \cdot (5-x)^3}{(5-x)^8}$$
$$= \frac{(3x+1)^3 \cdot (5-x)^3 \cdot (12(5-x)+4(3x+1))}{(5-x)^8}$$
$$= \frac{64(3x+1)^3}{(5-x)^5}$$

5.20

a) $\frac{x^2-2}{8x^2}$

b) $\frac{(x^2+2)^2(5x^2-2)}{8x^2}$

c) $\frac{x}{4}$

d) $8(3x^2+2)$

e) $\frac{3(x^2-2)(x^2+2)^2}{512x^4}$

f) $8(x^2+2)^2(7x^2+2)$

5.21

a) $4x^2(5x+3)$

b) $\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

c) $-\frac{41}{(3x-5)^2}$

d) $\frac{-82(7x+2)}{(3x-5)^3}$

e) $30x+31$

f) $6(3x+7)^3(x^2+1)^2(5x^2+7x+2)$

5.22

a) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$

b) $\frac{\sqrt{x}}{2x}$

c) $-\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$

5.23

a) $f(x) = 2x+1$

b) $f(x) = x^2-5$

c) $f(x) = x^2+2x+\frac{1}{2}$

d) $f(x) = 3x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$

f) $f(x) = 7$ ou un autre nombre

5.24

a)

x		-1	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	MAX $(-1\,;3)$	↘

b)

x		2	
$g'(x)$	−	0	−
$g(x)$	↘	plat $(2\,;-3)$	↘

c)

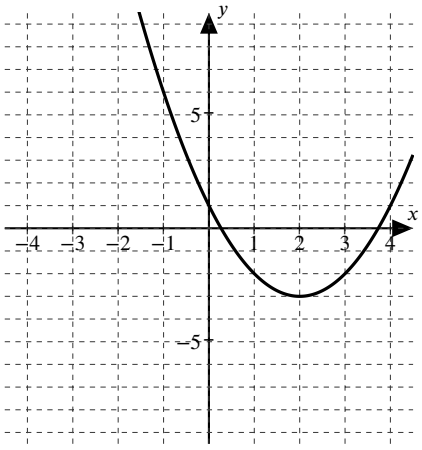
x		-2		0	
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	MAX $(-2\,;2)$	↘	MIN $(0\,;0)$	↗

d)

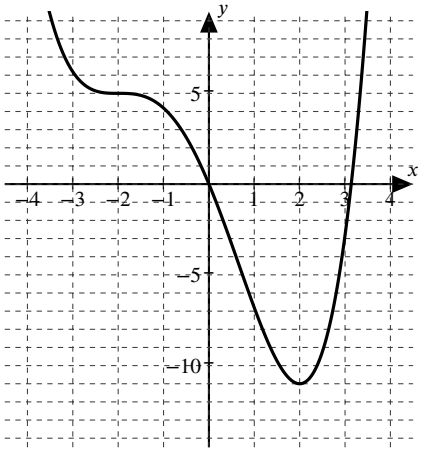
x		-2		0		2	
$i'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$i(x)$	↗	MAX $(-2\,;0)$	↘	plat $(0\,;-1)$	↘	MIN $(2\,;-2)$	↗

5.25

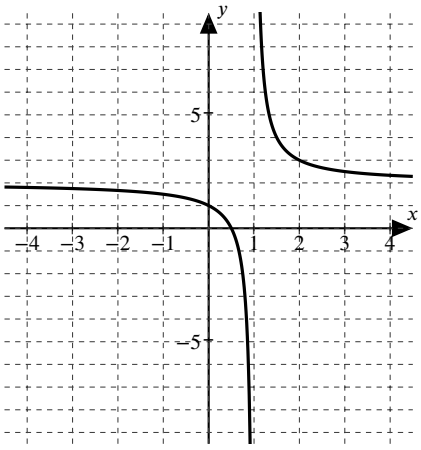
a)



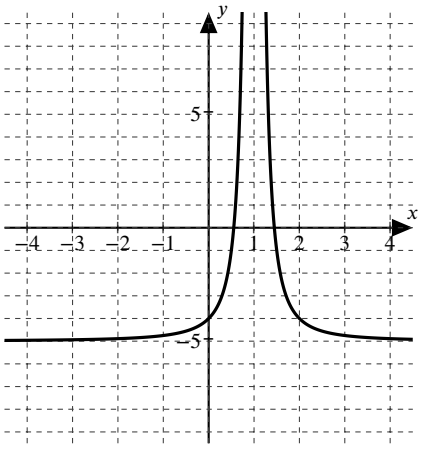
b)



c)



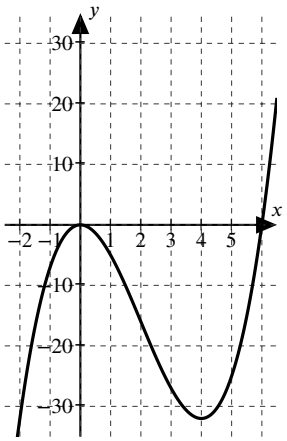
d)



5.26

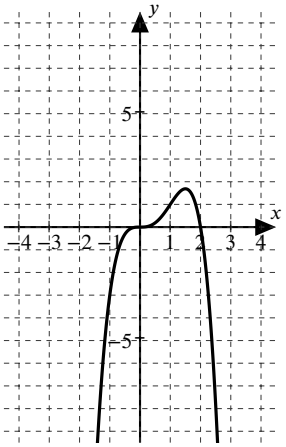
a) $f'(x) = 3x(x-4)$

	0		4	
+	0	−	0	+
↗	MAX $(0;0)$	↘	MIN $(4;-32)$	↗



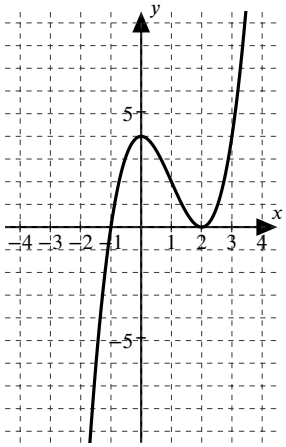
b) $f'(x) = 2x^2(3-2x)$

	0		$\frac{3}{2}$	
+	0	+	0	−
↗	plat $(0;0)$	↗	MAX $(\frac{3}{2};\frac{27}{16})$	↘



c) $f'(x) = 3x(x-2)$

	0		2	
+	0	−	0	+
↗	MAX $(0;4)$	↘	MIN $(2;0)$	↗

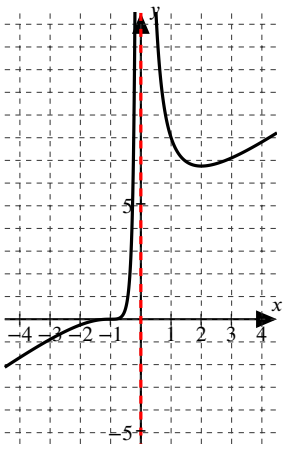


5.27

a) $D_f = \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}$$

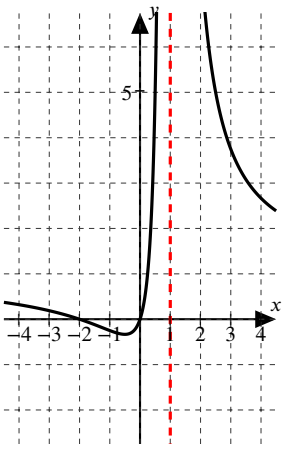
	-1		0		2	
$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$\nearrow$	plat $(-1\,;0)$	$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$	MIN $(2\,;\frac{27}{4})$	$\nearrow$



b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{-2(2x+1)}{(x-1)^3}$$

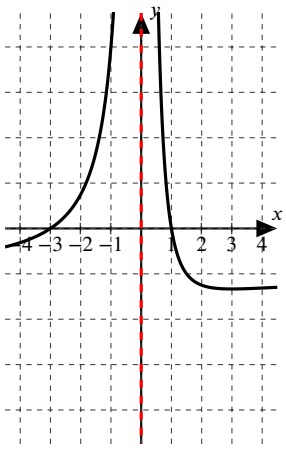
	$-\frac{1}{2}$		1	
$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$
$\searrow$	MIN $(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{3})$	$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$



c) $D_f = \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{2(x-3)}{x^3}$$

	0		3	
$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$	MIN $(3\,;-\frac{4}{3})$	$\nearrow$



5.28 De 0 à 2 semaines.

5.29 Pour x entre 2 et 4, donc entre $20'000$ et $40'000$ Frs.

5.30

a) $C(20) \approx 17{,}65$.
Le nombre de clients va encore augmenter durant la 21^{e} journée car $C(21) \approx 18{,}42$.

b) $C(100) \approx 36{,}59$.
Le nombre de clients va diminuer durant la 101^{e} journée car $C(101) \approx 36{,}50$.

c) La clientèle augmente pour x dans l'intervalle $[0\,;80[$.

d) Le centre de ski admet un maximum de clients le 80^{e} jour.

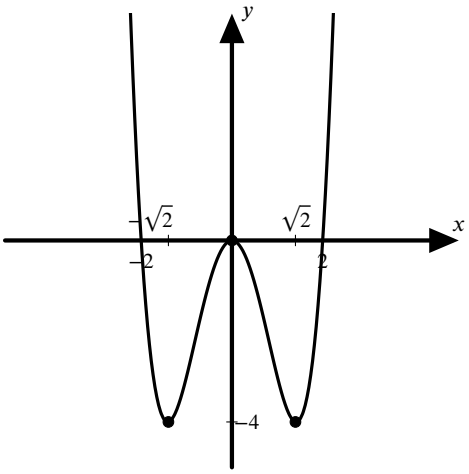
e) Le graphe de gauche.

5.31

a) $f'(x) = 4x(x^2 - 2)$

x		-2		0		2	
$f(x)$	+	0	−	0	−	0	+

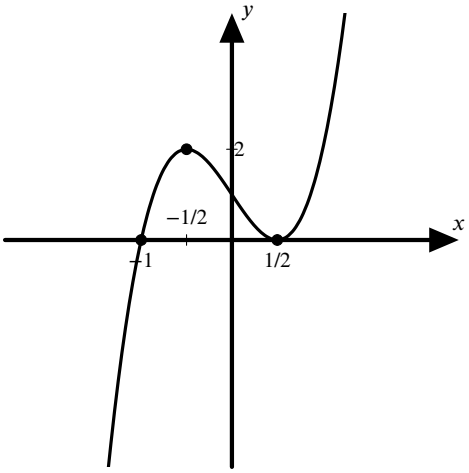
x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	MIN $(-\sqrt{2};-4)$	↗	MAX $(0;0)$	↘	MIN $(\sqrt{2};-4)$	↗



b) $g'(x) = 3(2x+1)(2x-1)$

x		-1		$\frac{1}{2}$	
$g(x)$	−	0	+	0	+

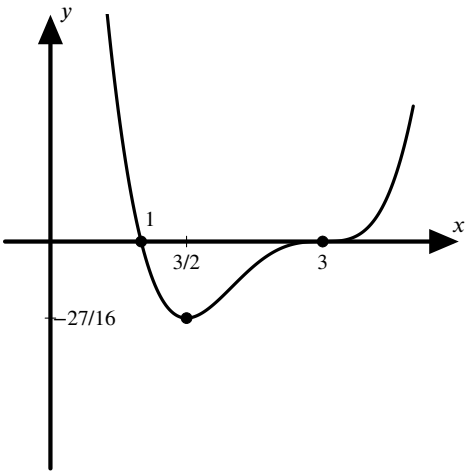
x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	MAX $(-\frac{1}{2};2)$	↘	MIN $(\frac{1}{2};0)$	↗



c) $h'(x) = 2(x-3)^2(2x-3)$

x		1		3	
$h(x)$	+	0	−	0	+

x		$\frac{3}{2}$		3	
$h'(x)$	−	0	+	0	+
$h(x)$	↘	MIN $(\frac{3}{2};-\frac{27}{16})$	↗	plat $(3;0)$	↗



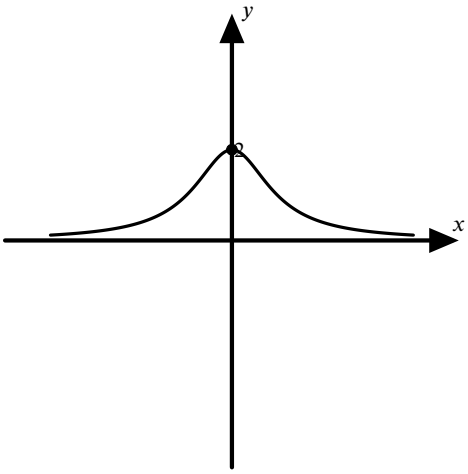
5.32

a)

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	MAX $(0\,;2)$	↘

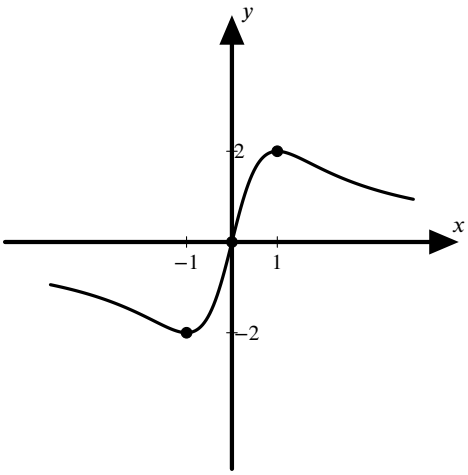


b)

$D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = -\dfrac{4(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

x		-1		1	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	MIN $(-1\,;-2)$	↗	MAX $(1\,;2)$	↘



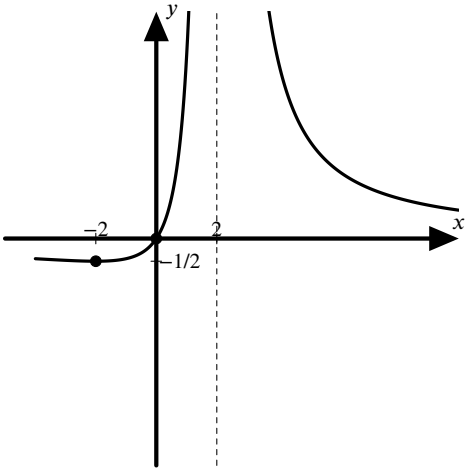
c)

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$h'(x) = -\dfrac{4(x+2)}{(x-2)^3}$

x		0		2	
$h(x)$	$-$	0	$+$	||	$+$

x		-2		2	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	||	$-$
$h(x)$	↘	MIN $(-2\,;-1/2)$	↗	||	↘



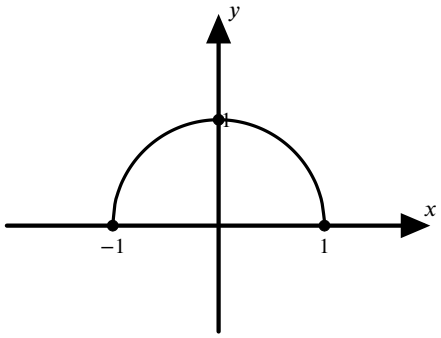
5.33

a) $D_f = [-1\,;1]$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

x	-1		1
$f(x)$	0	+	0

x	-1		0		1
$f'(x)$	||	+	0	–	||
$f(x)$	||	↗	MAX $(0\,;1)$	↘	||

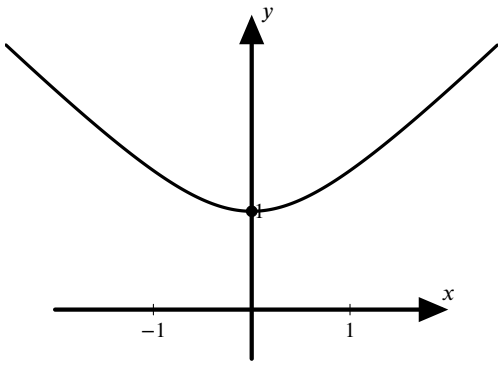


b) $D_g = \mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

x	
$g(x)$	+

x		0	
$g'(x)$	–	0	+
$g(x)$	↘	MIN $(0\,;1)$	↗

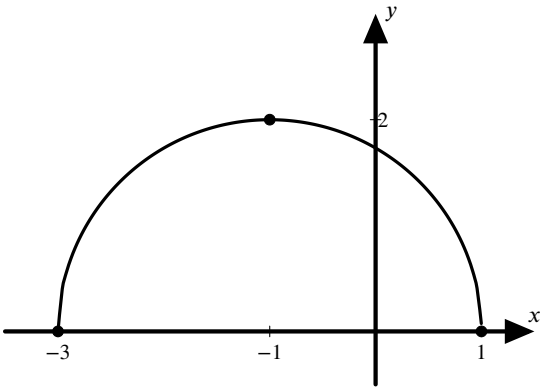


c) $D_h = [-3\,;1]$

$$h'(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$$

x	-3		1
$h(x)$	0	+	0

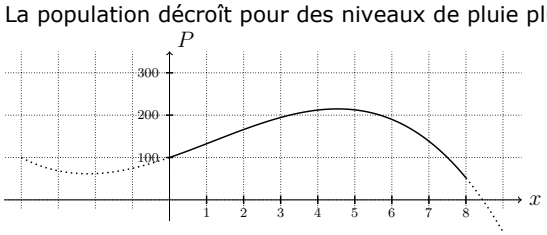
x	-3		-1		1
$h'(x)$	||	+	0	–	||
$h(x)$	||	↗	MAX $(-1\,;2)$	↘	||



5.34

a) La population augmente pour des niveaux de pluie situés entre 0 et $4{,}54$ cm.
La population décroît pour des niveaux de pluie plus élevés que $4{,}54$ cm.

b)



$$P\left(\frac{7+\sqrt{409}}{6}\right) \approx 214{,}76$$

Remarque : le graphe ci-dessus n'a d'interprétation en terme de population de moustiques que pour $0 \leq x \leq 8$.

5.35

a) $d'(t) = 3t^2 - 48$

0		4	
	–	0	+
	↘	MIN (4 ; 72)	↗

b) Après de 4 mois.

c) $d(4) = 72'000$ km.

8.6 Solutions - Optimisation

6.1 $V = l \cdot p \cdot x$ $\quad p = 30 - 2x$ $\quad l = \dfrac{45-3x}{2}$ $\quad E_V = [0\,;15]$ $\quad V(x) = 3x^3 - 90x^2 + 675x$

Le volume maximum est des 1500 cm^3. Il est atteint quand $x = 5$ cm, $p = 20$ cm et $l = 15$ cm.

6.2 $C = 50xh + 120x + 240h$ $\quad h = \dfrac{25}{2h}$ $\quad E_V = \mathbb{R}_+$ $\quad C(x) = 625 + 120x + \dfrac{3000}{x}$

Le coût minimum est de $1825.-$ Frs. Le garage mesure alors 6 m sur 5 m sur $2{,}5$m.

6.3 $V = x^2 \cdot h$ $\quad h = \dfrac{15-5x^2}{4x}$ $\quad E_V = [0\,;\sqrt{3}]$ $\quad V(x) = -\dfrac{5}{4}x^3 + \dfrac{15}{4}x$

Le volume est maximal lorsque la base de la cabine mesure 1 m et la hauteur $2{,}5$ m.

6.4 $C(x) = \dfrac{2700x^2 + 270'000}{x}$ Le coût minimum sera de $54'000.-$ Frs.

6.5 $S(x) = 30x + \dfrac{1200}{x} + 40$

La surface est minimale lorsque la base de l'aquarium est un carré de $2\sqrt{10}$ cm de côté.

6.6 Le colis mesurera 2 dm sur 2 dm sur 3 dm.

6.7 $P = 600x + 800y$ $\quad y = \dfrac{1}{x}$ $\quad E_V = \mathbb{R}_+^*$ $\quad P(x) = 600x + \dfrac{800}{x}$

Le champ mesurera $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ km sur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ km.

Références

[1] S. Amaudruz : Cours et exercices. Gymnase de Bugon.
[2] S. Amaudruz : Statistique descriptive 1M. CADEV n° 30’003, 2013.
[3] H. Bovet : Diplôme 2D. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2008.
[4] H. Bovet : Diplôme 3D. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2008.
[5] C.-A. Chevalley : Calculs pour l’économie. DFJC Vaud, 2009.
[6] J.-P. Favre : Mathématiques pour la Matu pro. Promath Editions, 2019.
[7] M.-A. Jaquemet et N. Lakehal : Cours et exercices. Gymnase de Beaulieu.
[8] J.-P. Javet : Cours et exercices. Gymnase de Morges.
[9] J.-P. Javet : Analyse mathématiques 3EC. http://www.gymomath.ch, 2020.
[10] J.-P. Javet : Mathématiques 3EC. http://www.gymomath.ch, 2020.
[11] O. Kruger et A. Schenkel : Cours et exercices. Gymnase de Beaulieu et du Bugon.
[12] Laroche : Cours et exericces de statistiques de 1L.
[13] C. Mermoud : Statistiques descriptives. Gymnase de Burier, Juin 2015.
[14] K. Studer et P. Frommenwiler : Mathématiques pour la maturité. Algèbre et analyse de données. Cornelsen Schweiz, 2014.
[15] A. Terra : Statistique II, 2018.
[16] M. Tissot-Daguette : Cours et exercices. Gymnase d’Yverdon.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch
sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 29 juin 2026