

2E

**Mathématiques et
Analyses mathématiques
semestre 4**

Sarah Delmonico

Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2023-2024

Table des matières

Partie I - Mathématiques

1 Puissances et racines	2
1.1 Rappel	2
1.2 Les fonctions puissances	4
1.3 Les racines	5
1.4 Les fonctions racines	6
1.5 Propriétés des racines	8
1.5.1 Extraction d'une racine carrée	9
1.5.2 Rationalisation des dénominateurs	9
1.6 Les puissances rationnelles	10
1.7 Résolution d'équations	13
2 Intérêts composés	15
2.1 Taux d'intérêt équivalents	19
3 Logarithmes	20
3.1 Équations exponentielles	20
3.2 Logarithmes	21
3.3 Propriétés des logarithmes	22
3.4 Équations logarithmiques	24

Partie II - Analyses mathématique

4 Systèmes d'équations linéaires 3 x 3	25
4.1 Résolution d'un système d'équations linéaires 3 x 3	25
4.2 Interprétation graphique et systèmes particuliers	29
4.3 Problèmes	31
4.4 Parabole passant par trois points donnés	32
5 Optimisation quadratique	33
6 Exercices	35
6.1 Exercices - Puissances et racines	35
6.2 Exercices - Intérêts composés	45
6.3 Exercices - Logarithmes	47
6.4 Exercices - Systèmes d'équations linéaires 3 x 3	49
6.5 Exercices - Optimisation quadratique	52
7 Solutions	55
7.1 Solutions - Puissances et racines	55
7.2 Solutions - Intérêts composés	59
7.3 Solutions - Logarithmes	60
7.4 Solutions - Systèmes d'équations linéaires 3 x 3	61
7.5 Solutions - Optimisation quadratique	62

1 Puissances et racines

1.1 Rappel

Soit n un entier strictement positif et a un nombre réel. On appelle **puissance n -ième de a** ou **a à la puissance n** , le nombre noté $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$.

Le nombre a s'appelle la **base** de la puissance et le nombre n s'appelle l'**exposant** de la puissance.

Exemples : Calculer les expressions ci-dessous.

a) $5^3 =$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 =$

b) $(-0,1)^6 =$

e) $-11^2 =$

c) $(-20)^5 =$

f) $(-11)^2 =$

On généralise la notion de puissance à des exposants entiers négatifs ou nuls de la manière suivante :

$$\text{pour } a \neq 0 : \quad a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Attention : 0^0 n'est pas défini.

Exemples : Calculer les expressions ci-dessous.

a) $2^{-3} =$

e) $\left(-\frac{10}{3}\right)^{-4} =$

b) $(-2)^3 =$

f) $0,5^{-2} =$

c) $11^{-1} =$

g) $0^4 =$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} =$

h) $4^0 =$

Propriétés des puissances

Soit m, n des entiers et a, b des nombres réels.

$$(i) \ 0^n = 0 \text{ si } n \neq 0$$

$$(vii) \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}, \text{ si } a, b \neq 0$$

$$(ii) \ 1^n = 1$$

$$(viii) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}, \text{ si } a, b \neq 0$$

$$(iii) \ a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0$$

$$(ix) \ a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(iv) \ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ si } a \neq 0$$

$$(x) \ (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(v) \ a^1 = a$$

$$(xi) \ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ si } a \neq 0$$

$$(vi) \ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ si } b \neq 0$$

$$(xii) \ (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Exemples : Simplifier et calculer les expressions ci-dessous.

$$a) \ 9^5 \cdot 9^{-6} \cdot 9 =$$

$$e) \ \frac{21^4}{7^4} =$$

$$b) \ 2^6 \cdot 5^6 =$$

$$f) \ (0,\bar{6})^{-3} =$$

$$c) \ \frac{25^3}{5^7} =$$

$$g) \ \frac{2^4}{2^{-4}} =$$

$$d) \ \left(\frac{3}{7}\right)^{-2} =$$

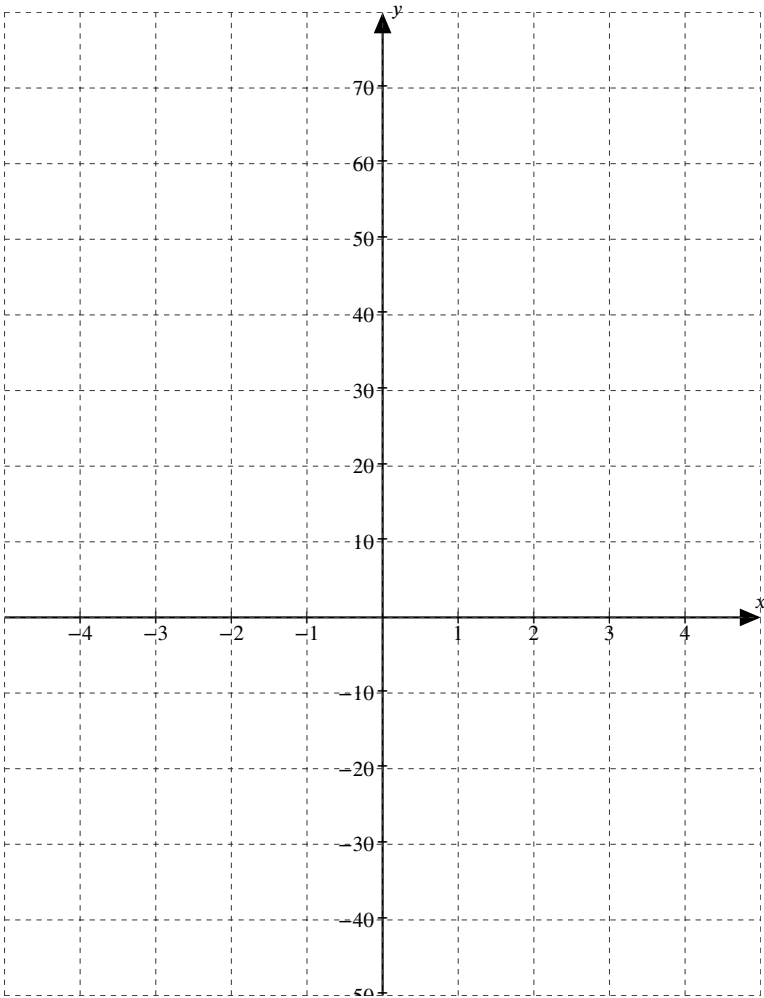
$$h) \ 12^2 - 2^2 =$$

1.2 Les fonctions puissances

Une **fonction puissance** est une fonction du type $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exemples : Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^0									
x^1									
x^2									
x^3									
x^4									
x^5									



1.3 Les racines

Définition

Soit n un entier positif non nul *pair* et x un nombre réel *positif*. **La racine n -ième de x** est le nombre réel *positif* y défini par :

$$y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x \text{ et } y \geq 0$$

Soit n un entier positif *impair* et x un nombre réel (*positif* ou *négatif*). **La racine n -ième de x** est le nombre réel y défini par :

$$y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x$$

Exemples :

a) $\sqrt[2]{64} =$ car

b) $\sqrt[3]{64} =$ car

c) $\sqrt[6]{64} =$ car

d) $\sqrt[1]{64} =$ car

e) $\sqrt[3]{-64} =$ car

f) $\sqrt[2]{-64} =$ car

g) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} =$ car

h) $\sqrt[2]{1'000'000} =$ car

i) $\sqrt[3]{1'000'000} =$ car

j) $\sqrt[4]{0,0001} =$ car

k) $\sqrt[3]{-0,027} =$ car

Vérifier les réponses obtenues à l'aide des touches racines de la calculatrice.

Notation : On note généralement $\sqrt{x}$ à la place de $\sqrt[2]{x}$ et on l'appelle **racine carrée**.

$\sqrt[3]{x}$ se lit **racine cubique**.

Historique

Au V^e av. J.-C., les Grecs ne connaissaient que les nombres rationnels $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire les nombres pouvant s'écrire sous forme de fractions.

Ils découvrent alors que la racine carrée de 2, la diagonale d'un carré de côté 1, ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers. Dès lors une nouvelle catégorie de nombres apparaît : les irrationnels.

La racine d'un nombre naturel est soit un nombre naturel, soit un nombre irrationnel.

Exemples :

a) $\sqrt{0} =$

d) $\sqrt{3} =$

b) $\sqrt{1} =$

e) $\sqrt{4} =$

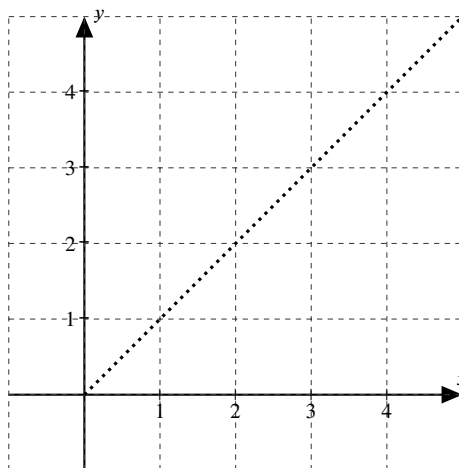
c) $\sqrt{2} =$

f) $\sqrt{5} =$

1.4 Les fonctions racines

Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

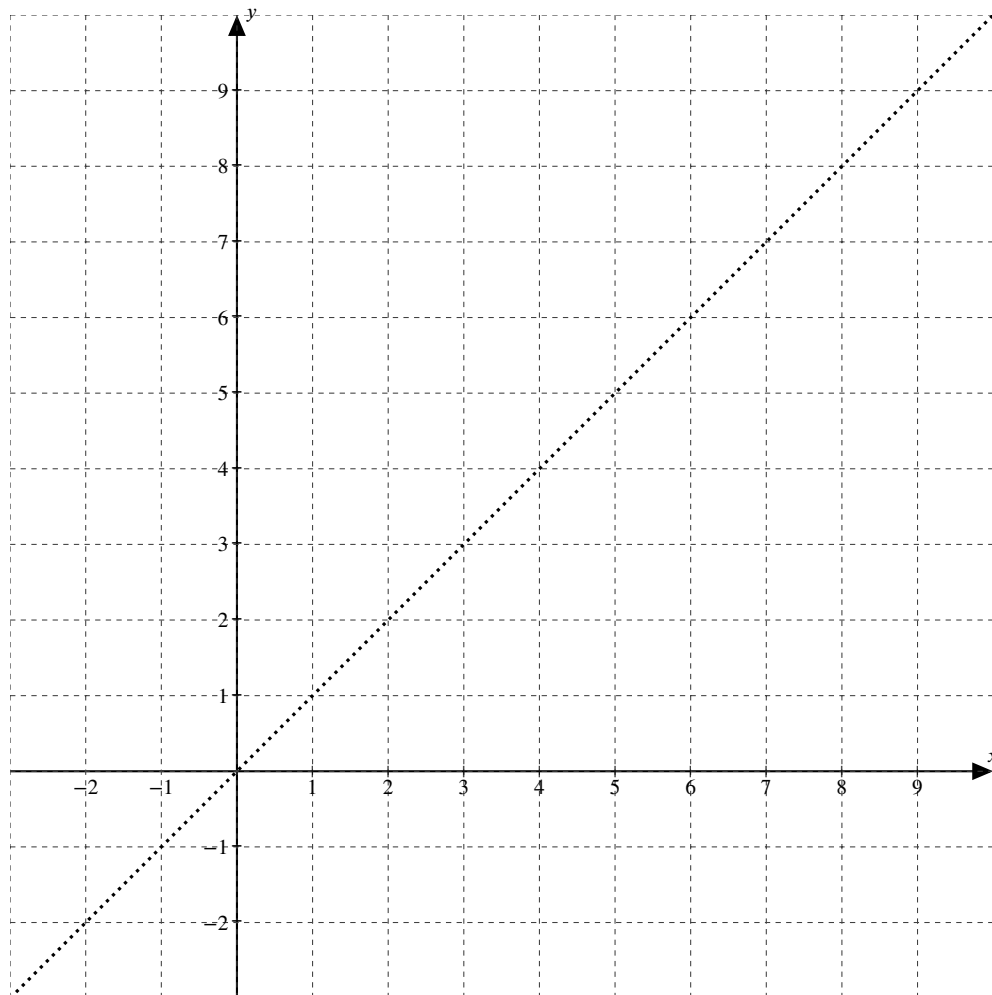
x	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5
x^2								
$\sqrt{x}$								



Que peut-on observer ?

Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3													
$\sqrt[3]{x}$													



Que peut-on observer ?

Conclusions

- $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $g(x) = \sqrt{x}$ est la **fonction réciproque** de $f(x) = x^2$ pour $x \geq 0$ car $y = x^2$ et $x \geq 0 \iff x = \sqrt{y}$.
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \sqrt[3]{x}$ est la **fonction réciproque** de $f(x) = x^3$ pour tout x car $y = x^3$ et $x \geq 0 \iff x = \sqrt[3]{y}$.

1.5 Propriétés des racines

Soit a et b des nombres réels positifs et n un entier naturel, alors :

$$(i) \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$(iii) \sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$(ii) \text{ si } b \neq 0 : \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$(iv) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Attention à : $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ et $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$

Exemples :

$$a) \sqrt[3]{7} =$$

$$f) \sqrt{484} =$$

$$b) (\sqrt[3]{5})^3 =$$

$$g) \sqrt[3]{125'000} =$$

$$c) \sqrt[7]{29^7} =$$

$$h) \sqrt{3^2+4^2} =$$

$$d) \sqrt{\frac{1}{9}} =$$

$$i) \sqrt{13^2-5^2} =$$

$$e) \sqrt[4]{\frac{16}{625}} =$$

$$j) \sqrt{(-5)^2} =$$

1.5.1 Extraction d'une racine carrée

En général, les réponses sous forme de racines doivent être extraites au maximum. Cela veut dire que l'on sort le plus grand entier possible de la racine en utilisant la règle :

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a \cdot \sqrt{b} \text{ pour } a, b \geq 0$$

Il faut donc d'abord décomposer en produit le nombre sous la racine, de manière à repérer les facteurs au carré.

On peut procéder de manière similaire pour les racines cubiques.

Exemples :

a) $\sqrt{72} =$

b) $\sqrt{54} =$

c) $\sqrt[3]{40} =$

d) $\sqrt{45} - \sqrt{20} =$

e) $\frac{\sqrt{700} + \sqrt{28}}{12} =$

1.5.2 Rationalisation des dénominateurs

En général, on ne laisse pas de racine au dénominateur.

Pour enlever une racine carrée du dénominateur, on amplifie la fraction par cette racine.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} =$

b) $\frac{21}{\sqrt{7}} =$

c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1000}} =$

Pour enlever $\sqrt[n]{a}$ du dénominateur, on amplifie la fraction de manière à obtenir $\sqrt[n]{a^n}$.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} =$

b) $\frac{4}{\sqrt[5]{1000}} =$

1.6 Les puissances rationnelles

L'objectif est de définir $a^{\frac{p}{q}}$ pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, en gardant les propriétés déjà étudiées des puissances.

Exemples : Observer et expliquer chaque étape :

$$100^{1/2} = (10^2)^{1/2} = 10^{2 \cdot 1/2} = 10^1 = 10 = \sqrt[2]{100} \quad \text{donc} \quad 100^{1/2} = \sqrt[2]{100}$$

$$8^{1/3} = (2^3)^{1/3} = 2^{3 \cdot 1/3} = 2^1 = 2 = \sqrt[3]{8} \quad \text{donc} \quad 8^{1/3} = \sqrt[3]{8}$$

Est-ce qu'une puissance à exposant rationnel serait en fait une racine ? Prouvons-le grâce à la propriété $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$:

- $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$

Pour que cela soit vrai, il faut qu'en élevant $a^{1/q}$ à la puissance q , on obtienne a :

- $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

Pour que cela soit vrai, il faut qu'en élevant $a^{p/q}$ à la puissance q , on obtienne a^p :

Définition des puissances à exposant rationnel

Soit a un nombre réel positif et q un nombre naturel non nul, on définit :

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$$

Soit $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel et a un nombre réel positif :

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Exemples :

a) $1000^{1/3} =$

d) $1000^{-1/3} =$

b) $1000^{2/6} =$

e) $8^{5/3} =$

c) $1000^{3/9} =$

f) $625^{0,25} =$

Vérifier les réponses ci-dessus à l'aide des touches puissances de la calculatrice.

Propriétés des puissances à exposant rationnel

Les propriétés des puissances à exposant rationnel sont les mêmes que celles des puissances à exposant entier relatif :

Soit m, n des nombres rationnels et a, b des nombres réels strictement positifs.

$$(i) \ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ si } a \neq 0$$

$$(v) \ a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(ii) \ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ si } b \neq 0$$

$$(vi) \ (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(iii) \ \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}, \text{ si } a, b \neq 0$$

$$(vii) \ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ si } a \neq 0$$

$$(iv) \ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}, \text{ si } a, b \neq 0$$

$$(viii) \ (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Exemples : Simplifier les expressions ci-dessous. Répondre par une puissance, puis par une racine ou a est un nombre réel strictement positif.

$$a) \ a^{2/7} \cdot a^{1/4} =$$

$$e) \ \left(\frac{1}{7}\right)^{1/2} =$$

$$b) \ (4^{1/3})^{15/2} =$$

$$f) \ \left(\frac{4}{25}\right)^{-1/2} =$$

$$c) \ (8a)^{1/3} =$$

$$g) \ \frac{a^{1/3}}{a^{-2/5}} =$$

$$d) \ 3^{1/3} \cdot 9^{1/3} =$$

Autres propriétés des racines

Soit a un nombre réel positif, n et p des entiers positifs non nuls et m un entier, alors :

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$$

$$\sqrt[pn]{a^{pm}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Justifier ces propriétés à l'aide des propriétés des puissances.

Exemples :

a) $\sqrt[3]{27^4} =$

e) $\sqrt[10]{2^{15}} =$

b) $\sqrt[6]{64^7} =$

f) $\sqrt[6]{8} =$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{a}} =$

g) $\sqrt[5]{32^4} =$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} =$

h) $\sqrt{\sqrt[3]{25}} =$

1.7 Résolution d'équations

1) Équation du type $x^n = a$ avec n un nombre entier positif non nul et a un nombre réel.

Exemples :

a) $x^2 = \frac{1}{169}$

c) $x^5 = 16'807$

b) $x^2 = -9$

d) $x^5 = -32$

Si n est *pair* et a *positif*, il y a deux solutions : $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$, c'est-à-dire $a^{\frac{1}{n}}$ et $-a^{\frac{1}{n}}$.

Si n est *pair* et a *négalif*, il n'y a pas de solutions, car x^n est forcément positif.

Si n est *impair*, il y a une solution : $x = \sqrt[n]{a}$, (ou $a^{\frac{1}{n}}$ si a est positif).

2) Équation du type $x^{-n} = a$ avec n un nombre entier positif et a un nombre réel.

Exemples :

a) $x^{-2} = 0,04$

c) $x^{-5} = 59'049$

b) $x^{-3} = 0$

d) $x^{-3} = -125$

Si $a \neq 0$, l'équation $x^{-n} = a$ est équivalente à l'équation $x^n = \frac{1}{a}$, ce qui nous ramène à la situation précédente.

3) Équation du type $x^{p/q} = a$ avec $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel non nul et a un nombre réel.

Rappel : Si $\frac{p}{q}$ n'est pas entier, $x^{p/q}$ n'est défini sur $\mathbb{R}_+$. Les solutions de l'équation ne peuvent donc être que positives.

Exemples :

a) $x^{2/3} = 16$

c) $x^{-3/2} = 0,008$

b) $x^{2/5} = \frac{1}{10}$

d) $x^{-3/2} = -7$

Sur $\mathbb{R}_+$, l'équation $x^{p/q} = a$ est équivalente à l'équation $x^p = a^q$ et donc à $x = a^{q/p}$.

Si a est négatif, il n'y a pas de solution. Si a est positif, il y a une seule solution qui est $x = a^{q/p}$

2 Intérêts composés

On place une somme de CHF 100'000.– sur un compte épargne au taux annuel de 10%. Les intérêts sont capitalisés à la fin de chaque année.

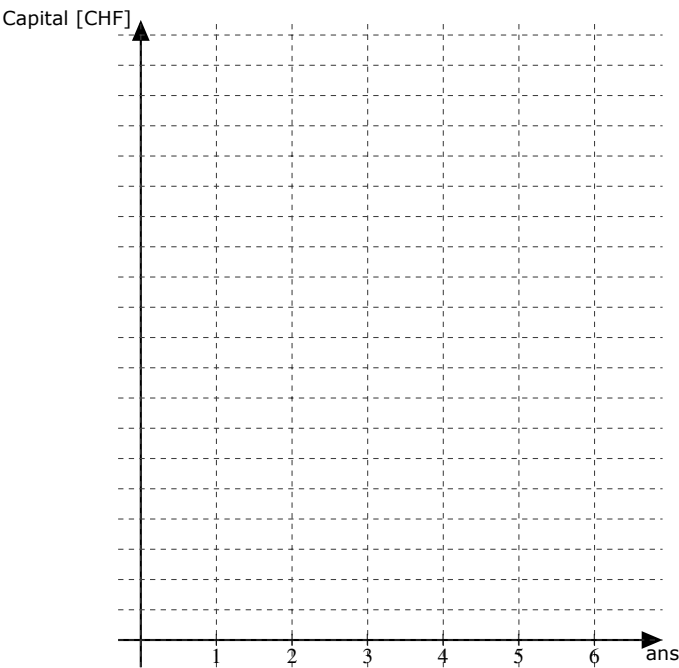
On parle d'intérêts simples si les intérêts ne sont pas ajoutés au capital initial (voir semestre 3).

On parle d'intérêts composés si les intérêts sont ajoutés au capital initial. Il y aura ainsi un capital plus grand la deuxième année et donc plus d'intérêts.

Calculons le capital disponible à la fin des 6 prochaines années dans le cas d'intérêts simples, puis d'intérêts composés :

Intérêts simples				Intérêts composés			
Nombre d'années	Capital sur le compte 1er janvier	Intérêts	Capital total au 31 déc.	Nombre d'années	Capital sur le compte 1er janvier	Intérêts	Capital total au 31 déc.
1	100'000.-			1	100'000.-		
2				2			
3				3			
4				4			
5				5			
6				6			

Pour les deux cas, représenter l'évolution de la fortune sur le graphique ci-dessous :



On appellera :

- C_0 le capital initial ;
- C_n le capital total à la fin de l'année n ;
- I_n l'intérêt de l'année n ;
- i le taux d'intérêt annuel ;
- t le taux d'intérêt annuel multiplié par 100.

Exemple : Si le taux d'intérêt est de 2%, $i = 0,02 = 2\%$ et $t = 2$.

$$I = C \cdot i = \frac{C \cdot t}{100}$$

Intérêts simples (rappel semestre 3)

À la fin de chaque année, les intérêts ne sont **pas** ajoutés au capital, mais sont mis de côté.

Nombre d'années	Capital sur le compte 1er janvier	Intérêts	Capital total depuis le début
1	C_0	$I_1 = C_0 \cdot i$	$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1 + 1 \cdot i)$
2	C_0	$I_2 = C_0 \cdot i$	$C_2 = C_0 + 2 \cdot C_0 \cdot i = C_0(1 + 2 \cdot i)$
3	C_0	$I_3 = C_0 \cdot i$	$C_3 = C_0 + 3 \cdot C_0 \cdot i = C_0(1 + 3 \cdot i)$

On a donc :

$$C_n = C_0(1 + n \cdot i) = C_0(1 + n \cdot \frac{t}{100})$$

Exemple :

- a) À la naissance de ma fille, j'ai placé une somme de CHF 10'000.– sur un compte qui rapporte un intérêt annuel simple de 1%. Combien aura-t-elle à ses 18 ans ?
- b) Quelle somme initiale aurais-je du placer avec cet intérêt pour qu'elle puisse retirer 15'000.– pour ses 18 ans ?
- c) Quel taux d'intérêt annuel faut-il avoir pour placer CHF 10'000.– et retirer CHF 15'000.– 18 ans plus tard ?

Intérêts composés

À la fin de chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital pour former le nouveau capital initial de l'année suivante.

Nombre d'années	Capital sur le compte 1er janvier	Intérêts	Capital total depuis le début
1	C_0	$I_1 = C_0 \cdot i$	$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1 + i)$
2	C_1	$I_2 = C_1 \cdot i$	$C_2 = C_1 + C_1 \cdot i = C_1(1 + i) = C_0(1 + i)^2$
3	C_2	$I_3 = C_2 \cdot i$	$C_3 = C_2 + C_2 \cdot i = C_2(1 + i) = C_0(1 + i)^3$

On a donc :

$$C_n = C_0(1 + i)^n = C_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$$

Le **facteur de capitalisation** est le nombre $r = 1 + i = 1 + \frac{i}{100}$.

Donc $C_n = C_0 \cdot r^n$.

Exemple :

- À la naissance de ma fille, j'ai placé une somme de CHF 10'000.– sur un compte qui rapporte un intérêt annuel composé de 1%. Combien retirera-t-elle à ses 18 ans ?
- Quelle somme initiale aurais-je du placer avec cet intérêt pour qu'elle puisse retirer 15'000.– pour ses 18 ans ?
- Quel taux d'intérêt annuel faut-il avoir pour placer CHF 10'000.– et retirer CHF 15'000.– 18 ans plus tard ?

Sauf spécification particulière, les intérêts sont annuels et composés.

	Capital final	Capital initial	Intérêts ou facteur
Intérêts simples	$C_n = C_0(1 + n \cdot i)$	$C_0 = \frac{C_n}{1+n \cdot i}$	$i = \frac{C_n - C_0}{n \cdot C_0}$
Intérêts composés	$C_n = C_0(1 + i)^n = C_0 \cdot r^n$	$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = \frac{C_n}{r^n}$	$r = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}}$ et $i = r - 1$

Prouver les formules des deux dernières colonnes en partant de celles de la première.

2.1 Taux d'intérêt équivalents

Dans ce chapitre, les intérêts dont nous parlons sont composés.

Il est également possible de travailler avec des intérêts mensuels, trimestriels, semestriels... Dans ce cas, l'unité de temps du paramètre n correspond à la durée selon laquelle l'intérêt est calculé.

On appellera :

- i le taux d'intérêt **annuel**
- i_2 le taux d'intérêt **semestriel** (car 2 semestres en une année)
- i_4 le taux d'intérêt **trimestriel** (car 4 trimestres en une année)
- i_{12} le taux d'intérêt **mensuel** (car 12 mois en une année)

Deux taux d'intérêt sont **équivalents sur 1 an** s'ils font rapporter le même intérêt total en 1 an pour un même capital.

Exemple : Quel est le taux annuel équivalent à un taux d'intérêt mensuel de 1% ? Est-ce plus avantageux ou moins avantageux pour le créancier qu'un taux d'intérêt annuel de 12% ?

Si on appelle i_m le taux d'intérêt payable m fois en 1 an et i le taux annuel. On a :

$$C_0(1 + i_m)^m = C_0(1 + i)$$

donc

$$(1 + i_m)^m = 1 + i$$

Exemples :

- Quel est le taux annuel équivalent à un taux d'intérêt trimestriel de 3% ?
- Quel est le taux mensuel équivalent à un taux d'intérêt annuel de 8% ?
- Quel est le taux mensuel équivalent à un taux d'intérêt semestriel de 5% ?

3 Logarithmes

3.1 Équations exponentielles

Exemple : On place un capital de CHF 10'000.– avec un taux d'intérêt annuel (composé) de 1,2%. Après combien de temps le capital atteindra-t-il CHF 12'000.– ?

La formule des intérêts composés nous dit :

$$12'000 = 10'000 \cdot (1,012)^n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$1,2 = (1,012)^n$$

Constats

- L'inconnue de cette équation se situe à l'exposant d'une puissance.
- Nous ne savons pas résoudre cette équation !!

Lorsque dans une équation l'inconnue est située à l'exposant d'une puissance, elle est appelée **équation exponentielle**.

Pour l'instant, nous ne savons pas résoudre ce type d'équations, à moins qu'elles soient suffisamment simples.

Exemples : Résoudre les équations ci-dessous.

a) $10^x = 1'000'000$

d) $2^x = \frac{1}{16}$

b) $10^x = 0,001$

e) $3^{2x+1} = 9^{3x-4}$

c) $2^x = 512$

f) $2^{3x+1} = 4^x$

3.2 Logarithmes

Jusque dans les années 1980, les solutions des équations exponentielles étaient listées dans des livres appelés « tables logarithmiques ». Maintenant, la calculatrice nous permet de les trouver rapidement grâce aux touches $\boxed{\text{LOG}}$ et $\boxed{\text{LN}}$.

Exemples : Calculer avec votre machine et comparer avec les solutions des équations de l'exemple précédent.

a) $\log(1'000'000)$

b) $\log(0,001)$

On peut remarquer que la fonction $\log(y)$ de la machine donne la solution de l'équation $10^x = y$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle **logarithme en base a de y** la solution de l'équation $a^x = y$. On a donc :

$$x = \log_a(y) \iff a^x = y$$

En d'autres termes, calculer $\log_a(y)$ c'est se demander $y = a^?$.

Exemples : Compléter.

a) $\log_{10}(1'000'000) =$ car

b) $\log_{10}(0,001) =$ car

c) $\log_3(81) =$ car

d) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) =$ car

e) $\log_7(1) =$ car

f) $\log_4(2) =$ car

g) $\log_{625}(5) =$ car

h) $\log_2(-8) =$ car

On note $\log$ au lieu de $\log_{10}$. C'est le **logarithme décimal**.

La machine permet de calculer un autre logarithme que l'on note $\ln$ au lieu de $\log_e$. C'est le **logarithme naturel** ou **logarithme népérien**¹.

1. John Néper, mathématicien britannique (1550-1617)

3.3 Propriétés des logarithmes

Exemples : Calculer à l'aide de la définition et observer.

a) $\log_7(7^3) =$

b) $\log_7(49) =$

$7^{\log_7(49)} =$

c) $\log_7(1) =$

d) $\log_7(7) =$

e) $\log_3(9) =$

$\log_3(81) =$

f) $\log_3(9) =$

$\log_3(81) =$

$\log_3(9 \cdot 81) =$

$\log_3\left(\frac{9}{81}\right) =$

g) $\log(100) =$

$\log(100^4) =$

h) $\log_2(32) =$

$\log_2\left(\frac{1}{32}\right) =$

i) $\log(1'000'000) =$

$\log(100) =$

$\log_{100}(1'000'000) =$

Propriétés : Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in \mathbb{R}$.

(i) $\log_a(a^x) = x$

(vi) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

(ii) $a^{\log_a(y)} = y$

(vii) $\log_a(x^q) = q \log_a(x)$

(iii) $\log_a(1) = 0$

(viii) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

(iv) $\log_a(a) = 1$

(v) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(ix) $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Exemples : Calculer sans calculatrice.

a) $\log(2) + \log(5) =$

b) $\log(300) - \log(3) =$

La propriété (ix) de la page précédente est appelée **formule de changement de base**. Elle permet de calculer les logarithmes dans n'importe quelle base à l'aide des touches $\boxed{\text{LOG}}$ et $\boxed{\text{LN}}$ de la calculatrice.

Exemple : À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approximative de $\log_2(5)$.

Remarques : Les propriétés des logarithmes viennent des propriétés des exponentielles.

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'un produit est la somme des exposants.
 $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ exprime la même propriété.
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'un quotient est la différence des exposants.
 $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ exprime la même propriété.
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ nous dit qu'en base a l'exposant d'une puissance de puissance est le produit des exposants.
 $\log_a(x^q) = q \log_a(x)$ exprime la même propriété.

Attention aux fausses propriétés !

Comparer.

a) $\log(1000)$

c) $\log(1000 + 100)$

b) $\log(100)$

d) $\log(1000 - 100)$

Exemples : Résoudre les équations suivantes.

(Pour résoudre ce genre d'équation, il est vivement conseillé **d'isoler l'exponentielle** avant d'appliquer le $\log_a$.)

a) $10^x = 5$

c) $1,2 = (1,012)^x$

b) $3^x = 12$

d) $8 \cdot 10^{3x+1} + 7 = 167$

3.4 Équations logarithmiques

Une **équation logarithmique** est une équation dans laquelle la variable apparaît dans un logarithme.

Pour résoudre ce type d'équations, nous utiliserons la relation

$$x = \log_a(y) \iff a^x = y$$

Exemples : Résoudre les équations.

a) $\log(5+x) = 3$

b) $3\log_8(x) - 2 = 0$

Il ne faut pas oublier de contrôler que les réponses obtenues ne posent pas de problème dans l'équation de départ.

Exemples : Résoudre et comparer les deux équations.

a) $\log_2(x) + \log_2(x-7) = 3$

b) $\log_2(x^2 - 7x) - 3 = 0$

4 Systèmes d'équations linéaires 3 x 3

4.1 Résolution d'un système d'équations linéaires 3 x 3

Un **système d'équations linéaires 3 x 3** est l'ensemble de trois équations linéaires qui ont au total trois inconnues.

Une **solution** de ce système est un triplet qui vérifie les trois équations.

Exemples : Est-ce que (1;0;5) est une solution des systèmes d'équations ci-dessous :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 7y - z = -3 \\ -3x + 2y + 3z = 12 \\ -5x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3y + z = 5 \\ 2x + y + z = 7 \\ -x + y + z = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 3 \\ x + y - z = -4 \end{cases}$$

Pour résoudre de tels systèmes, nous procéderons de la manière suivante :

- Choisir une des équations et s'en servir pour éliminer une des inconnues dans les deux autres équations, à l'aide de combinaisons linéaires.
- Résoudre le système 2 x 2 obtenu.
- Trouver l'inconnue manquante grâce à l'une des équations de départ.

Exemples : Résoudre.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 7y - z = -3 \\ -3x + 2y + 3z = 12 \\ -5x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3y + z = 5 \\ 2x + y + z = 7 \\ -x + y + z = 4 \end{cases}$$

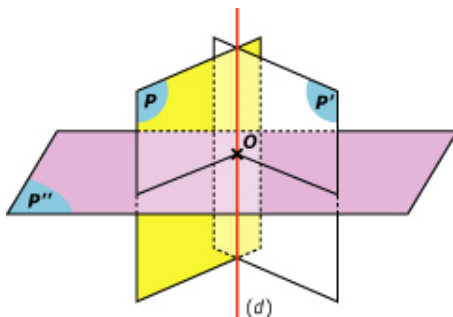
$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 3 \\ x + y - z = -4 \end{cases}$$

4.2 Interprétation graphique et systèmes particuliers

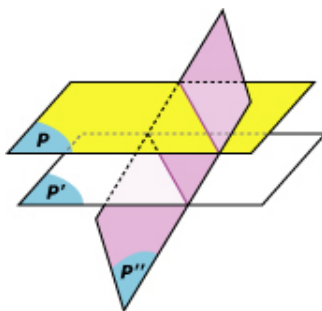
Nous avons vu que la résolution d'un système linéaire 2×2 correspondait géométriquement à la recherche des coordonnées du point d'intersection de 2 droites.

Pour les systèmes 3×3 , il y a une dimension de plus. Le ou les points d'intersection, s'ils existent, ont 3 coordonnées, ils sont dans l'espace en trois dimensions (3D) et il s'agit de l'intersection de 3 plans.

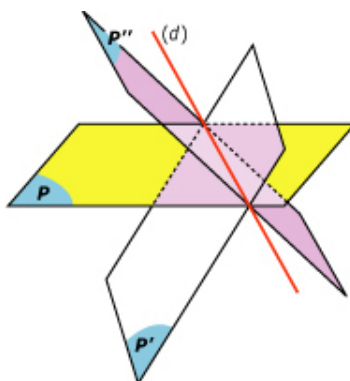
En général, un système linéaire 3×3 a une unique solution.



Parfois, il n'a pas de solution. On dira que le système est **impossible**. Par exemple, si deux des plans sont parallèles :



Parfois, il admet une infinité de solutions. Par exemple, si les trois plans se coupent en une droite. Dans ce cas, nous nous contenterons de dire que le système est **indéterminé**, sans écrire l'ensemble des solutions.



Exemples : Résoudre.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 7y - z = -3 \\ x + 4y + z = 7 \\ x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 7y - z = 0 \\ x + y + z = 3 \\ 5x + 15y - z = 3 \end{cases}$$

4.3 Problèmes

Exemple : Un fleuriste vend des roses, des marguerites et des lys.

J'ai acheté un bouquet de 3 roses, 1 marguerite et 3 lys.

Ma soeur a acheté un bouquet de 2 roses, 9 marguerites et 2 lys.

Mon frère a acheté un bouquet de 5 roses, 5 marguerites et 1 lys.

Sachant que nous avons chacun dépensé CHF 25.—, déterminer le prix de chaque sorte de fleurs.

4.4 Parabole passant par trois points donnés

Exemple : Déterminer l'expression de la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont le graphe passe par les points $(1;0)$, $(-1;6)$ et $(2;3)$.

5 Optimisation quadratique

Les problèmes d'**optimisation** sont des problèmes où l'on cherche à déterminer quand une mesure sera maximum ou minimum.

On procédera de la manière suivante :

- lire soigneusement tout le problème et effectuer éventuellement un croquis de la situation,
- déterminer les variables avec leur unité ;
- écrire les équations liant les différentes variables (autant d'équations qu'il y a de variables) ;
- définir la quantité à optimiser avec son unité et l'exprimer en fonction des variables choisies ;
- substituer pour n'avoir plus qu'une seule variable dans la fonction ;
- déterminer les valeurs qui maximisent ou minimisent la fonction (sommet $\Rightarrow -\frac{b}{2a}$ ou valeurs extrêmes) ;
- vérifier que les solutions obtenues sont cohérentes avec l'ensemble du problème ;
- donner la réponse au problème à l'aide d'une phrase, sans oublier les unités.

Exemple : Je désire construire un enclos rectangulaire pour mon lapin. Un des côtés de l'enclos sera le mur de ma maison et les trois autres seront faits grâce à une clôture de 6 mètres de longueur. Quelles dimensions vais-je choisir pour que mon lapin ait le plus de place possible ?

Exemple : De 2000 à 2010, les dépenses en communication d'une grande société ont évoluées selon la fonction suivante :

$$d(x) = -0,6x^2 + 5x + 130$$

où x est le nombre d'années depuis l'an 2000.

Durant cette période, en quelle année les dépenses ont été :

- a) les plus élevées ?
- b) les moins élevées ?

6 Exercices

6.1 Exercices - Puissances et racines

Rappel

Exercice 1.1 Calculer sans calculatrice.



- | | | | |
|--------------|-----------------|------------------|----------------|
| a) 9^2 | g) $(-1)^{10}$ | m) $0,01^3$ | s) -700^2 |
| b) 4^3 | h) $(-5)^3$ | n) $(-0,2)^4$ | t) $(-3000)^3$ |
| c) 2^9 | i) -10^6 | o) $1,2^2$ | u) 20^4 |
| d) 7^{-2} | j) $(-15)^{-2}$ | p) $(-0,5)^{-2}$ | |
| e) 5^{-3} | k) $(-4)^{-3}$ | q) $0,1^{-5}$ | |
| f) 10^{-4} | l) $(-3)^{-4}$ | r) $0,7^{-2}$ | |

Exercice 1.2 Calculer sans calculatrice.



- | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\left(\frac{11}{13}\right)^2$ | d) $\left(\frac{19}{21}\right)^{-1}$ | g) $\left(-\frac{12}{7}\right)^0$ |
| b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ | e) $\left(\frac{1}{11}\right)^{-2}$ | h) $\left(-\frac{17}{5}\right)^1$ |
| c) $\left(-\frac{3}{10}\right)^3$ | f) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-3}$ | i) $\left(\frac{1}{11}\right)^{-1}$ |

Exercice 1.3 Simplifier. Répondre avec des exposants positifs uniquement, $a, b \in \mathbb{R}^*$.

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------------|--|
| a) $a^2 \cdot a \cdot a^5$ | e) $\frac{(11a)^2}{a^3}$ | i) $\frac{a^5}{(2a)^5}$ |
| b) $(a^3)^5$ | f) $(a^{-2})^7$ | j) $\left(\frac{9a}{5b^{-2}}\right)^{-1}$ |
| c) $(10a^{-3}b^5)^2$ | g) $\left(-\frac{3a}{b}\right)^4$ | k) $\left(\frac{9a}{5a^2}\right)^{-2}$ |
| d) $\frac{a^4}{a^{-5}}$ | h) $\frac{a^5}{2a^5}$ | l) $\frac{a^4 \cdot ab \cdot a^3}{5(a^2b^{-2})^4}$ |

Exercice 1.4 Calculer sans calculatrice, puis vérifier avec.



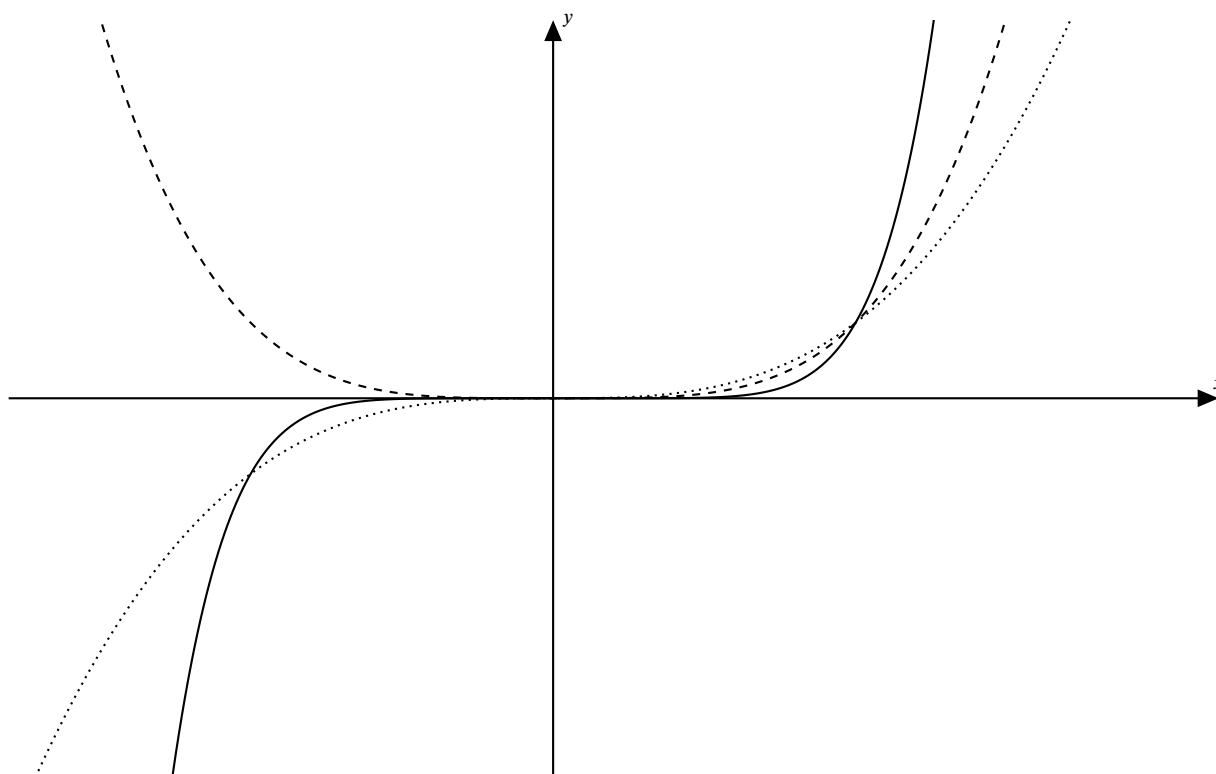
- | | | |
|----------------------------|---|-----------------------|
| a) $4^3 \cdot 2 \cdot 5^7$ | b) $\left(\frac{14^3}{7^3}\right)^{-2}$ | c) $\frac{27^3}{6^9}$ |
|----------------------------|---|-----------------------|

Les fonctions puissances

Exercice 1.5 Sur le graphique ci-dessous, on sait que se trouvent les graphes des fonctions :

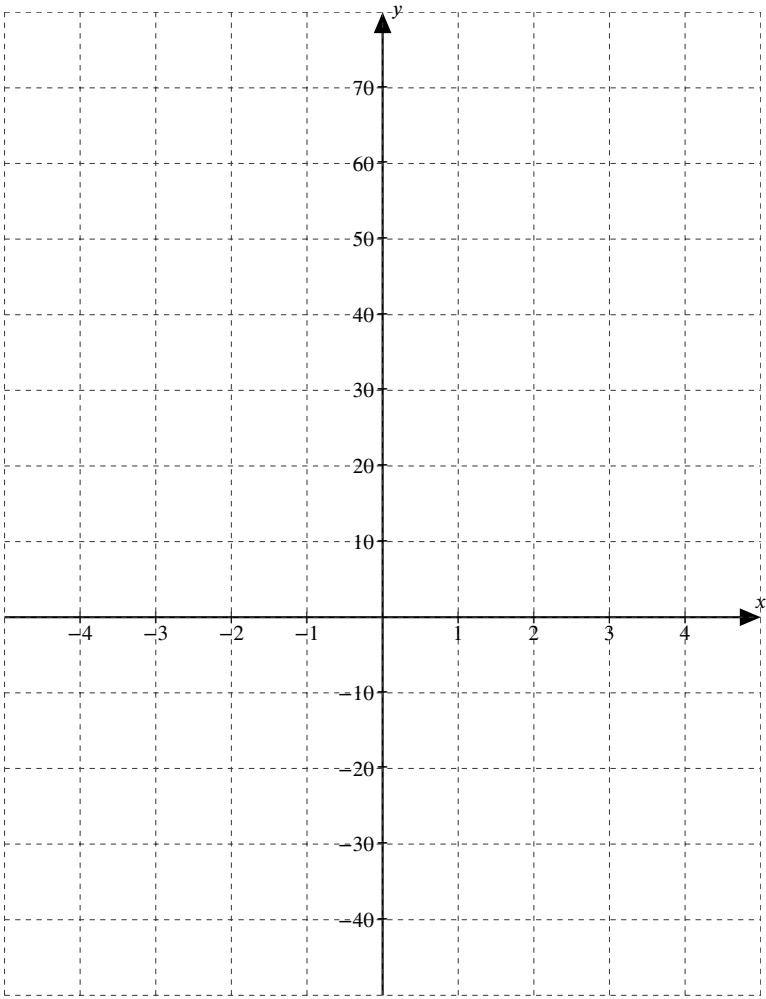
$$f(x) = x^n, \quad g(x) = x^7 \quad \text{et} \quad h(x) = x^3$$

- a) Indiquer à quel graphe correspond chacune de ces fonctions.
- b) Quelles sont les valeurs entières possibles pour n ?
- c) Quelles sont les coordonnées des trois points d'intersection visibles sur ce graphique ?



Exercice 1.6 Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^3									
$\frac{1}{2}x^3$									
$-x^3$									



Exercice 1.7

- a) Exprimer le volume V d'un cube en fonction de son arête x .
- b) Exprimer le volume V d'un cylindre de base de rayon 5 cm en fonction de sa hauteur z .
- c) Exprimer la surface S d'un cube en fonction de son arête x .
- d) Exprimer l'intérêt I d'un capital de CHF 5'000.– placé une année en fonction du taux d'intérêt i .
- e) Exprimer la valeur C_1 d'un capital de CHF 5'000.– placé pendant une année en fonction du taux d'intérêt i .

Exercice 1.8 Résoudre ou calculer.

- | | | |
|------------------|-----------------|---------------|
| a) $x^4 = 16$ | d) $(-4)^2 =$ | g) $x^2 = -9$ |
| b) $x^5 = 7'776$ | e) $(-2)^5 =$ | h) $x^5 = -1$ |
| c) $x^7 = 128$ | f) $x^3 = -125$ | i) $x^2 = 16$ |

Les racines**Exercice 1.9** Calculer sans calculatrice.

- | | | | |
|----------------------|--------------------------|----------------------|------------------------------|
| a) $\sqrt{25}$ | f) $\sqrt[5]{32}$ | k) $\sqrt[3]{0,125}$ | p) $\sqrt[n]{1}$ |
| b) $\sqrt{10'000}$ | g) $\sqrt{1}$ | l) $\sqrt{115^2}$ | q) $\sqrt{-16}$ |
| c) $\sqrt[3]{1'000}$ | h) $\sqrt[3]{8'000'000}$ | m) $\sqrt[4]{5}$ | r) $\sqrt[3]{-8}$ |
| d) $\sqrt[3]{64}$ | i) $\sqrt{0,04}$ | n) $\sqrt[3]{0,027}$ | s) $\sqrt[3]{-0,001}$ |
| e) $\sqrt[4]{81}$ | j) $\sqrt[3]{0,001}$ | o) $\sqrt[5]{0}$ | t) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ |

Exercice 1.10 Vérifier les réponses de l'exercice précédent à l'aide la calculatrice.

Exercice 1.11 Indiquer si l'égalité est vraie ou fausse. (Justifier)

$$\sqrt{2} = \frac{17'131'117}{12'113'529}$$

Exercice 1.12 Pour quels nombres réels x la racine est-elle définie ?

a) $\sqrt[3]{x}$

c) $\sqrt{-x}$

e) $\sqrt[3]{x^3}$

g) $\sqrt{|x|}$

b) $\sqrt{x}$

d) $\sqrt{x^2}$

f) $\sqrt[5]{-x}$

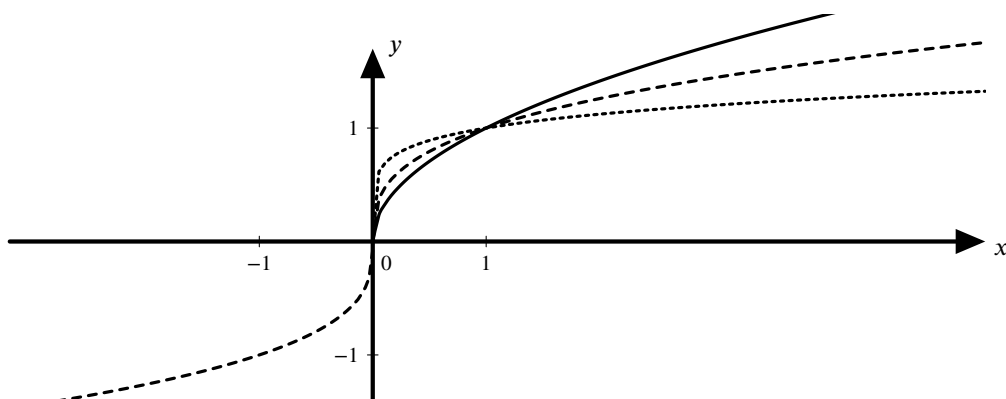
h) $\sqrt{x-2}$

Les fonctions racines

Exercice 1.13 Sur le graphique ci-dessous, on sait que se trouvent les graphes des fonctions :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = \sqrt[6]{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{x}$$

- Comparer l'image de 1'000'000 par ces trois fonctions.
- Indiquer à quel graphe correspond chacune de ces fonctions.
- Esquisser la fonction $i(x) = \sqrt[9]{x}$ sur le graphique.
- Quelles sont les coordonnées des trois points d'intersection visibles sur le graphique ?



Propriétés**Exercice 1.14** Sans utiliser la calculatrice, indiquer si l'égalité est vraie ou fausse.

a) $\sqrt{9} = 3$

f) $\sqrt{(-3)^2} = -3$

k) $\sqrt{2^2 + 3^2} = 2 + 3$

b) $\sqrt{-9} = -3$

g) $\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$

l) $\sqrt{(-3)^2} = 3$

c) $\sqrt{9} = -3$

h) $\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$

m) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3$

d) $-\sqrt{9} = -3$

i) $\sqrt{8-5} = \sqrt{8} - \sqrt{5}$

n) $\sqrt[3]{-10} = -\sqrt[3]{10}$

e) $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$

j) $\sqrt{7 \cdot 19} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{19}$

o) $\sqrt{\frac{7}{19}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{19}}$

Exercice 1.15 Indiquer si l'assertion est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

a) $\sqrt{x^2} = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) $\sqrt[5]{x^5} = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

c) $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

d) $\sqrt{x^2} = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

Exercice 1.16 Calculer sans calculatrice.

a) $\sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{-4}$

d) $\sqrt{16+9}$

g) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{\frac{2}{15}}$

e) $\sqrt[4]{16^3}$

h) $(\sqrt{13})^3$

c) $\sqrt{36^3}$

f) $\sqrt{25 \cdot 36}$

i) $(3\sqrt{5})^2$

Exercice 1.17 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier.

a) $\sqrt{ab^2c^3}$

b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{9a}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{a^6bc^5}{27b^4c^2}}$

Exercice 1.18 Extraire les facteurs carrés ou cubiques des racines.

a) $\sqrt{24}$

d) $\sqrt[3]{3'000}$

g) $\sqrt{125}$

j) $\sqrt{250}$

b) $\sqrt{54}$

e) $\sqrt[3]{8}$

h) $\sqrt[3]{125}$

k) $\sqrt{1000}$

c) $\sqrt{200}$

f) $\sqrt{50}$

i) $\sqrt[3]{250}$

l) $\sqrt[3]{54}$

Exercice 1.19 Effectuer et simplifier sans calculatrice.



a) $3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$

f) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

k) $5\sqrt{45} - 3\sqrt{40}$

b) $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$

g) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}$

l) $2\sqrt{40} - 2\sqrt{90}$

c) $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

h) $2\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$

m) $(4 - \sqrt{43})\sqrt{43}$

d) $3\sqrt{7} - \sqrt{7}$

i) $2\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$

n) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$

e) $3\sqrt{7} + \sqrt{5} - 2\sqrt{7} - 8\sqrt{5}$

j) $3\sqrt{5} - 7\sqrt{20}$

o) $(4 + \sqrt{35})(2 - \sqrt{5})$

Exercice 1.20 Rendre entiers les dénominateurs et simplifier.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

g) $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

b) $\frac{5}{\sqrt{7}}$

e) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$

h) $\frac{2 - \sqrt{13}}{\sqrt{13}}$

c) $\frac{6}{\sqrt{2}}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{10}}$

i) $\frac{1 + \sqrt{a}}{3\sqrt{c}}$ avec $a, c > 0$

Exercice 1.21 Rendre entiers les dénominateurs et simplifier.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

b) $\frac{32}{\sqrt[5]{2}}$

c) $\frac{6}{\sqrt[5]{3^2}}$

Les puissances rationnelles**Exercice 1.22** Écrire sous forme de racine. $a \in \mathbb{R}_+^*$.

a) $7^{1/4}$

e) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1/2}$

i) $a^{0,6}$

b) $5^{2/3}$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

j) $a^{7/5}$

c) $11^{-1/2}$

g) $a^{5/7}$

k) $-a^{4/3}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3/4}$

h) $a^{-1/2}$

l) $(-a)^{9/4}$

Exercice 1.23 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Écrire sous forme de puissance.

a) $\sqrt[5]{7^3}$

g) $\sqrt[5]{a^7}$

n) $\sqrt[8]{\frac{1}{13}}$

b) $\sqrt[3]{5}$

h) $\sqrt[3]{a^3}$

o) $\sqrt{-13}$

c) $\sqrt{a^9}$

i) $(\sqrt[5]{a})^4$

p) $-\sqrt{a}$

d) $\sqrt[10]{11^2}$

j) $\sqrt[4]{a^{12}}$

q) $\frac{1}{\sqrt{a}}$

e) $\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$

k) $\sqrt[10]{7^6}$

r) $\sqrt[3]{-a}$

f) $\frac{1}{\sqrt{a}}$

l) $-\sqrt[4]{2^8}$

s) $-\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$

m) $\sqrt{a^3}$

Exercice 1.24 Calculer sans calculatrice.

a) $16^{1/4}$

e) $(-5)^{-1/3}$

i) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-1/2}$

b) $(-125)^{1/3}$

f) $9^{-1/2}$

j) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1/3}$

c) $32^{1/5}$

g) $7^{-1/2}$

k) $-4^{0,5}$

d) $8^{-1/3}$

h) $12^{-1/2}$

l) $(-4)^{0,5}$

Exercice 1.25 Ecrire sous la forme 2^x .

a) 16

c) $\sqrt{8}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{8}$

d) $\sqrt[7]{32}$

f) $16\sqrt[3]{2}$

Exercice 1.26 Soit $a \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions sans calculatrice.



a) $5^{1/7} \cdot 5^{2/21}$

e) $\left(\frac{a}{64}\right)^{2/3}$

i) $a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$

b) $(5^{1/7})^{2/21}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$

j) $\frac{\sqrt{a}}{a}$

c) $3 \cdot 9^{3/4}$

g) $\sqrt[3]{1'000'000a^6}$

k) $(\sqrt[n]{a})^{3n}$

d) $\left(\frac{2}{3}a^{2/3}\right)^3$

h) $a\sqrt[3]{a}$

l) $\frac{\sqrt{a}}{a^{-1/5}}$

Exercice 1.27 Calculer.

a) $A = 8^{2/3} + 16^{1/2} + 27^{2/3} + 81^{1/4} - 125^{1/3} - 1'000^{2/3}$

b) $B = \frac{5a^{1/3}}{2 + \sqrt{5b}}$ avec $a = 729$ et $b = 125$

Exercice 1.28 Soit $a, c \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier les expressions.

a) $a^{3/2} \cdot a^{-4/3}$

b) $c^2 (a^{-1/2} \cdot c)^{-2}$

Exercice 1.29 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier. Répondre à l'aide de puissances, avec des exposants positifs.

a) $a^{3/4} \cdot a^{-1/2}$

e) $\frac{a^{-3}}{a^{-5}}$

i) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^5}$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$

f) $(-a^{-3})^2$

j) $a^4 \cdot a^{-3/2} \cdot a^0$

c) $(a^{-3}b^2)^5$

g) $a^8 \cdot a^{-5} \cdot a^2$

k) $a^{1/2} \cdot a^{1/3}$

d) $\left((\sqrt[5]{a})^2\right)^3$

h) $(-a^{-2})^3$

l) $\left(\frac{a^2}{b^{-3}}\right)^{-5}$



Exercice 1.30 Calculer sans calculatrice. Répondre à l'aide d'une racine si nécessaire.

a) $(5^2 - 64^{2/3})^{1/2}$

f) $3^7 \cdot (-3)^7 \cdot \frac{1}{9^5}$

k) $(2^0)^{-1/3}$

b) $4 \cdot 25^{3/2}$

g) $(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})$

l) $\sqrt{\frac{5^{1/3}}{36}}$

c) $(4 \cdot 25)^{3/2}$

h) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{10}$

m) $\sqrt{24} \cdot 6^{1/2}$

d) $\frac{3^6}{3^2}$

i) $\frac{4 + \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

n) $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$

e) $2^{-4} \cdot 2 \cdot 8^2$

j) $\sqrt{144^{-1}}$

Exercice 1.31 Calculer à l'aide de la calculatrice. Précision à trois décimales si nécessaire.

a) $1,003^{17/2}$

d) $\sqrt[3]{(-7)^4}$

g) $\frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

b) $-9^{2/5}$

e) $\sqrt{7,5^2 - 4^{-1}}$

h) $13'000(1 + 0,15\%)^{9/4}$

c) $\sqrt[5]{6'436'343}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{64^{1/4}}$

i) $\frac{5 - 2^{\frac{1}{3}}}{2\sqrt{5,8}}$

Résolution d'équations



Exercice 1.32 Résoudre dans $\mathbb{R}$ sans calculatrice.

a) $x^3 = 125$

c) $x^2 = 9$

e) $x^4 = 81$

b) $x^3 = -125$

d) $x^2 = -9$

f) $x^4 = -81$

Exercice 1.33 Résoudre dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la calculatrice. Précision à trois décimales si nécessaire.

a) $x^3 = 19$

d) $x^2 = -7$

g) $x^7 = 279'936$

b) $x^3 = -19$

e) $x^4 = 2,0736$

h) $x^6 = 6,192$

c) $x^2 = 7$

f) $x^4 = -2,0736$

i) $x^{13} = 100\%$



Exercice 1.34 Résoudre en valeur exacte dans $\mathbb{R}$ sans calculatrice.

a) $x^{-3} = 0,008$

b) $x^{-3} = -0,008$

c) $x^{-2} = \frac{25}{196}$

Exercice 1.35 Résoudre dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la calculatrice. Précision à trois décimales si nécessaire.

a) $x^{-3} = 0,296$

b) $x^{-9} = 0,1938$

c) $x^{-4} = -\frac{1}{625}$

Exercice 1.36 Résoudre dans $\mathbb{R}_+$. Précision à trois décimales si nécessaire.

a) $x^{5/2} = 100'000$

d) $x^{5/3} = 1,5485$

g) $x^{0,5} = 1,5$

b) $x^{-1,5} = \frac{1}{8}$

e) $x^{-3/2} = 0,125$

h) $x^{3,5} = 160'085,25$

c) $x^{3/4} = 64$

f) $x^{1,5} = 27$

i) $x^{-1,25} = 0,03125$

Exercice 1.37 Résoudre dans $\mathbb{R}_+$. Précision à trois décimales si nécessaire.

a) $8 \cdot x^3 = 1'000$

c) $-2 \cdot x^4 = -2,0736$

e) $500 \cdot x^{12} = 1'569$

b) $\frac{2}{5} \cdot x^3 = 3,2$

d) $0,5 \cdot x^6 = 13$

f) $100 \cdot x^{21,3} = 10'252,5$

Exercice 1.38 Résoudre dans $\mathbb{R}_+$. Précision à trois décimales si nécessaire.

a) $3 + 8 \cdot x^3 = 1'003$

d) $22,8 - 0,5 \cdot x^9 = 3,5783$

g) $(1+x)^5 = 1,1041$

b) $-7 + \frac{2}{5} \cdot x^3 = 10,2$

e) $-20 - 1,5 \cdot x^{2/5} = -26$

h) $(1+x)^{13/2} = 1,07158$

c) $100 + 100 \cdot x^4 = 208,24$

f) $5,8 - 34,5 \cdot x^{-3} = -24$

i) $8000 \cdot (1+x)^{7/4} = 8056$

6.2 Exercices - Intérêts composés

Exercice 2.1 Compléter le tableau sachant qu'il s'agit d'intérêts annuels composés.

	C_0 en CHF	i	n en années	C_n en CHF
a)	4'720	3,5%	12	
b)		3,5%	24	5'388,65
c)	790		72	9'404,43
d)		0,4%	10	15'486,77
e)	3'245		7	3'273,50
f)	6'480	2%	20	
g)	2'100		2	2'495,01
h)	2'100		4	2'651,20
i)		1%	7	25'195,18
j)	15'000	10%	4	
k)	480'000		8	534'356,71
l)		4,2%	20	227'695,46

Exercice 2.2 Un capital de CHF 5'000.– a été placé il y a 15 ans. Ce capital et les intérêts produits font aujourd'hui CHF 8'019,85. Quel était le taux annuel...

- a) ... si le placement était à intérêts composés ?
- b) ... si le placement était à intérêts simples ?

Exercice 2.3 Quelle serait la valeur acquise en 2000 ans par un capital de CHF 1.–, placé à intérêts composés au taux annuel de 3,5%.

Exercice 2.4 À quel taux faut-il placer un capital pour qu'il double en 12 ans ?

Exercice 2.5 Quelle est l'augmentation (exprimée en % du capital initial) due au placement :

- a) à 3% pendant 21 ans ?
- b) à 4% pendant 26 ans ?
- c) à 3,5% pendant 18 ans ?
- d) à 4,5% pendant 14 ans ?

Exercice 2.6 Quel est le placement le plus avantageux :

- a) 10 ans à 5% puis 10 ans à 3% ou 20 ans à 4% ?
- b) 10 ans à 4,5% puis 10 ans à 3,5% ou 20 ans à 4% ?
- c) 20 ans à 5% puis 20 ans à 3% ou 40 ans à 4% ?
- d) 40 ans à 5% puis 40 ans à 3% ou 80 ans à 4% ?

Exercice 2.7 Quel est le placement le plus avantageux...

- Placer pendant 10 ans la moitié de son argent à 3% et l'autre moitié à 5%.
- Placer le tout à 4% pendant le même temps ?

- a) ... si les intérêts sont simples ?
- b) ... si les intérêts sont composés ?

Taux d'intérêt équivalents

Exercice 2.8 Quel est le taux annuel équivalent à un taux d'intérêt semestriel de 10% ?

Exercice 2.9 Quel est le taux annuel équivalent à un taux d'intérêt trimestriel de 1% ?

Exercice 2.10 Si je double le taux mensuel, est-ce que le taux annuel équivalent double aussi ?

Exercice 2.11

- a) Quel est le taux mensuel équivalent à un taux d'intérêt annuel de 5% ?
- b) Quel est le taux semestriel équivalent à un taux d'intérêt annuel de 5% ?

Exercice 2.12 Quel est le taux mensuel équivalent à un taux d'intérêt trimestriel de 4% ?

6.3 Exercices - Logarithmes

Exercice 3.1 Résoudre les équations sans calculatrice.



a) $3^{x+1} = 81$

i) $3^{x-1} + 27 = 0$

b) $25^{x+3} = 625$

j) $\frac{11^{2x}}{121^x} = 1$

c) $13^{3x-6} = 1$

k) $5^{2x+4} - 125^x = 0$

d) $2^{5x-2} = 4^{8-x}$

l) $\frac{7^{4x+5}}{49^{x-9}} = 7$

e) $\frac{6^{4-x}}{3^{4-x}} = 1024$

m) $4^{3x} \cdot 16^{2x} = \sqrt{2}$

f) $\frac{9^{3+x}}{3^x} = 0$

n) $(5^{x-1})^x - 125^x = 0$

g) $(10^{x+5})^2 = 0,001$

o) $2^{3x-2} \cdot 5^{3x-2} = 10'000$

h) $(2^{x-1})^x - 4 = 0$

p) $6^{3x-2} - 6^{3x-4} = 0$

Exercice 3.2 Calculer sans calculatrice.



a) $\log_2(64) =$

d) $\log_7(1) =$

b) $\log_5(625) =$

e) $\log_9(3) =$

c) $\log_{11}(121) =$

f) $\log_2(0,5) =$

Exercice 3.3 Calculer sans calculatrice.



a) $\log(1'000'000) =$

e) $\log(\sqrt{10}) =$

b) $\log(0,01) =$

f) $\log(\sqrt[5]{1000}) =$

c) $\log(1) =$

g) $\log(10) =$

d) $\log\left(\frac{1}{1000}\right) =$

h) $\log\left(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right) =$

Exercice 3.4 Calculer sans calculatrice.



a) $\log_2(8) =$

d) $\log_{64}(4) =$

b) $\log_8(2) =$

e) $\log_4(8) =$

c) $\log_5(-5) =$

f) $\log_{625}(125) =$



Exercice 3.5 Calculer sans calculatrice.

a) $\log_2(40) + \log_2(3) - \log_2(15) =$

c) $3\log_{25}(40) - \log_{25}(64) - \log_{25}(8) =$

b) $\log(14) - \log(2000) - \log(70) =$

d) $4\log_3(10) - 2\log_3(8100) =$

Exercice 3.6 À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approximative.

a) $\log_2(40) \approx$

c) $\log(70) \approx$

b) $\log_{40}(2) \approx$

d) $\ln(3) \approx$

Exercice 3.7 Résoudre. Donner la réponse sous forme exacte.

a) $17^x + 1 = 10$

d) $5 \cdot 2^{3x+1} - 3 = 167$

b) $17^{x+1} = 10$

e) $5^{x+8} = 3 \cdot 5^{2x}$

c) $7 + 10^{3x-6} = 9$

f) $7^{3x} = \frac{7^{x+1}}{8}$

Exercice 3.8 Résoudre. Donner la réponse sous forme exacte, puis au centième près.

a) $5 \cdot (1+x)^3 = 1000$

f) $5 \cdot (1+0,2)^{x/3} = 1000$

b) $x \cdot (1+0,2)^3 = 1000$

g) $7 \cdot (1+x)^4 = 300$

c) $5 \cdot (1+0,2)^x = 1000$

h) $7 \cdot (1+0,5)^{4x} = 300$

d) $5 \cdot (1+0,2)^3 = x$

i) $7 \cdot (1+0,5)^{x/4} = 300$

e) $5 \cdot (1+0,2)^{3/x} = 1000$

j) $7 \cdot (1+0,5)^{4/x} = 300$

Exercice 3.9 Après combien d'années, un capital de 3000 Frs peut-il atteindre 5000 Frs au taux d'intérêt composé de 3% ?

Exercice 3.10 Au bout de combien d'années une somme placée à 6% triple-t-elle ?

Exercice 3.11 On place un capital de 10'000 Frs pendant 2 ans au taux d'intérêt composé annuel de 1,2%.

a) Combien de mois faut-il placer le même capital si on veut obtenir la même somme finale au taux d'intérêt composé mensuel de 0,1% ?

b) À quel taux d'intérêt composé mensuel faut-il placer le capital pour une durée de 2 ans si on veut obtenir la même somme finale ?

Exercice 3.12 Résoudre en valeur exacte.

a) $\log(2x+1)=5$

c) $3\log_{64}(x+1)=-1$

b) $2\log_{25}(x)-3=0$

d) $\log_7(2x)=0$

Exercice 3.13 Résoudre en valeur exacte.

a) $\log(x-4)=\log(10-x)$

c) $2\log(x-3)=\log(25-6x)$

b) $\log_2(x-4)=\log_2(2-x)$

d) $\log_2(x^2+3)=\log_2(4x)$

Exercice 3.14 Résoudre.

a) $\log(x-3)+\log(x)=1$

c) $\log_3(x+10)-\log_3(x)=1$

b) $\log_2(5-x)+\log_2(x+5)=4$

d) $\log_3(x-10)-\log_3(x)=1$

6.4 Exercices - Systèmes d'équations linéaires 3 x 3

Résolution d'un système d'équations linéaires 3 x 3

Exercice 4.1 Résoudre.

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 41 \\ 8x + 5y = 31 \\ 7y = 21 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - y + z = 29 \\ x + 3y + 30z = 6 \\ x - y + z = 17 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - y + z = 30 \\ x + 2z = -2y \end{cases}$$

Exercice 4.2 Résoudre.

a)
$$\begin{cases} 7x + 3y = -7 + 3z \\ 4x + z = 3 - 2y \\ -2x + 5y - 5z = y - 35 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + y + 4z = x - 6 \\ 2x + y = -17 + 3z \\ -4x + 7z = 11 - 2y \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y - z = 7 + 2x \\ 3x + 2y = 14 - z \\ y = 7 - 3z - 5x \end{cases}$$

Exercice 4.3 Résoudre.

a)
$$\begin{cases} 7x - 4y - 5z = 56 \\ 3y - 2z = 13 \\ 5x - 3y = 22 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x + 5y = 12 \\ 3y - 2z = 4 \\ 5x - 3z = 21 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4y + 3z = 0 \\ x + y = z - 9 \\ 5x = y - 7 \end{cases}$$

Exercice 4.4 Résoudre.

a)
$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ 4x + 3y + 3z = 7 \\ -2x + 4y + 6z = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 1 \\ 10x + y + 2z = 8 \\ -5x - 2y + 4z = 8 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3z + x + 2y = 3 \\ 5y + 4x + 6z = 17 \\ -3y - 3z = x - 4 \end{cases}$$

Exercice 4.5 Résoudre.

$$\text{a) } \begin{cases} x + \frac{2}{3}y - z = -5 \\ 2x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{2}z = -2 \\ 5x - y + \frac{3}{5}z = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 4y + z = 9 \\ -6x + 5y + \frac{3}{4}z = 4 \\ 9x - \frac{4}{5}y - z = -5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{1}{5}x + y - 2z = -4 - z \\ 4x - \frac{3}{5}y - \frac{1}{3}z = 9 \\ x + y = z \end{cases}$$

Interprétation graphique et systèmes particuliers

Exercice 4.6 Résoudre.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 4y - z = -5 \\ x + 5y - 4z = -9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 5x - y + 6z = 23 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + 4z = -6 \\ 2x + y - 3z = -17 \\ -3x - y + 10z = 30 \end{cases}$$

Exercice 4.7 Résoudre.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 4 - 6z \\ \frac{1}{2}x + y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 7 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 4y + 7z = 2 \\ 4x + 7z = 10 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x - \frac{1}{3}y - 5z = 0 \\ 2x + 6z = 5 + z \\ 21x - 15 = y \end{cases}$$

Problèmes

Exercice 4.8 Un fermier a noté les trois commandes suivantes, ainsi que les totaux correspondants :

- 5 hl de froment / 4 hl de seigle / 3 hl d'avoine / 1210 francs ;
- 3 hl de froment / 5 hl de seigle / 4 hl d'avoine / 1070 francs ;
- 1 hl de froment / 8 hl de seigle / 5 hl d'avoine / 1110 francs.

Quel était le prix par hectolitre de chaque sorte de céréales ?

Exercice 4.9 Pour une représentation théâtrale, il y a trois sortes de billets de couleurs différentes, correspondant à des catégories de places et à des prix différents.

On sait que :

- trois billets rouges et un bleu coûtent ensemble autant que trois jaunes ;
- deux rouges et trois bleus coûtent ensemble CHF 70.- ;
- deux bleus et deux jaunes coûtent ensemble CHF 65.-.

Quels sont les prix de ces billets ?

Exercice 4.10 Un téléphérique pratique les tarifs suivants :

montée : CHF 22,50
descente : CHF 15.–
aller-retour : CHF 30.–

Pendant une journée, on a encaissé CHF 19'650.– pour un total de 680 montées et 520 descentes, allers-retours inclus.

Combien de billets de chaque sorte ont-ils été vendus ?

Exercice 4.11 Un nombre est formé de trois chiffres dont la somme est 14.

En effaçant le chiffre des unités, j'obtiens le triple du chiffre des unités.

En effaçant le chiffre des dizaines, j'obtiens sept fois le chiffre des dizaines. Quel est ce nombre ?

Exercice 4.12 J'ai 60 frs dans mon porte-monnaie en pièces de 5 frs, de 2 frs et de 1 fr.

En enlevant la moitié des pièces de 5 frs, le quart des pièces de 2 frs et le huitième des pièces de 1 fr, il me reste 41 frs.

Combien ai-je de pièces de chaque sorte sachant que j'en ai en tout 28 ?

Exercice 4.13 Michel, Paul et Daniel comparent leurs âges :

- L'âge de Daniel est le triple de l'âge de Paul.
- Il y a 7 ans, l'âge de Michel était la moitié de celui de Daniel.
- Dans trois ans, l'âge de Daniel sera égal à la somme des âges de Michel et de Paul.

Quels sont leurs âges actuels ?

Exercice 4.14 Un capital de CHF 330'740.– est divisé en trois parts placées à 4%, 5% et 6%.

Après une année, on ajoute les intérêts à chaque part et on remarque qu'on obtient trois fois la même somme.

Quelles étaient les parts initiales ?

Exercice 4.15 Une population stable de 35'000 oiseaux vit répartie sur trois îles.

Chaque année, 10% de la population de l'île *A* migre vers l'île *B*, 20% de la population de l'île *B* migre vers l'île *C*, et 5% de la population de l'île *C* migre vers l'île *A*.

Déterminer le nombre d'oiseaux sur chaque île sachant que la population de chaque île ne varie pas d'une année à l'autre.

Exercice 4.16 Mon âge et celui de ma mère font ensemble 56 ans ; ma mère et ma grand-mère ont ensemble 110 ans ; enfin mon âge et celui de ma grand-mère font ensemble 86 ans.

Quel est l'âge de chacun(e) d'entre nous ?

Exercice 4.17 À Pâques, j'ai reçu en tout 800 g de chocolat.

Hier, j'ai remarqué que j'avais mangé $\frac{7}{10}$ de mon chocolat blanc, $\frac{4}{5}$ de mon chocolat brun et la moitié de mon chocolat noir.

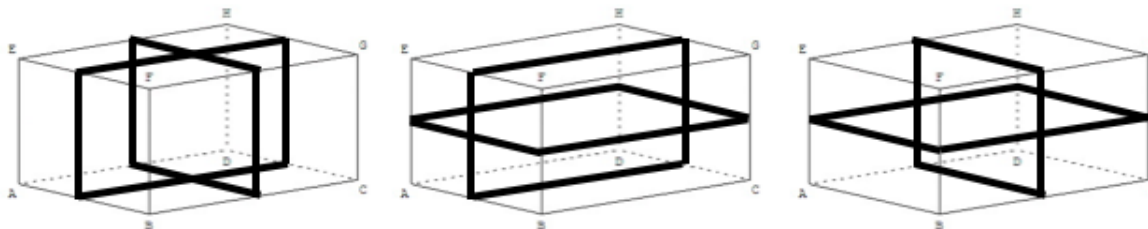
Il me reste alors autant de chocolat brun que des deux autres réunis. Pourtant, j'ai mangé 16 fois plus de chocolat brun que de noir !

Quelle quantité de chocolat de chaque sorte avais-je au début ?

Exercice 4.18 J'utilise tout le temps les mêmes paquets. Deux de leurs faces sont carrées. Par contre, je varie la manière d'attacher la ficelle autour.

Pour la première manière, j'ai eu besoin de 140 cm de ficelle. Pour la deuxième, il m'a fallu 160 cm et pour la troisième 140 cm.

Quelles sont les trois dimensions de mon paquet ?



Parabole passant par trois points donnés

Exercice 4.19 Lorsque c'est possible, déterminer l'équation de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ passant par les points A , B , et C .

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $A(2;3)$, $B(-1;6)$ et $C(0;1)$ | d) $A(5;3)$, $B(-2;3)$ et $C(3;-2)$ |
| b) $A(-1;-2)$, $B(1;4)$ et $C(-4;4)$ | e) $A(2;1)$, $B(-1;7)$ et $C(5;-5)$ |
| c) $A(2;0)$, $B(-1;-6)$ et $C(3;-2)$ | f) $A(3;-2)$, $B(1;4)$ et $C(-3;20)$ |

Exercice 4.20 Déterminer l'équation d'une parabole $y = ax^2 + bx + c$ dont les zéros sont 5 et -1 et l'ordonnée à l'origine 15. Faire l'exercice à l'aide d'un système 3×3 , puis le refaire par une autre méthode.

Exercice 4.21 Déterminer l'équation d'une parabole passant par $A(-4;2)$, $B(2;-4)$, et $C(2;1)$.

Exercice 4.22 Trouver l'équation de la parabole $y = ax^2 + bx + c$, de sommet S et qui passe par A .

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $S(2;3)$ et $A(4;7)$ | c) $S(1;2)$ et $A(2;5)$ | e) $S(1;2)$ et $A(-2;-1)$ |
| b) $S(-3;1)$ et $A(1;9)$ | d) $S(-3;-4)$ et $A(-2;6)$ | f) $S(-2;-3)$ et $A(-4;5)$ |

6.5 Exercices - Optimisation quadratique

Exercice 5.1 Sur son terrain, un fermier veut clôturer un enclos rectangulaire et le diviser en 2 rangées de 3 rectangles identiques, à l'aide à 1000 m de barrière. Quel est le plus grand enclos qu'il pourra obtenir ?

Exercice 5.2 Une compagnie désire fabriquer des gouttières à partir de feuilles d'aluminium de 27 cm de largeur en repliant les deux extrémités perpendiculairement à la base. Quelle largeur doit-on replier de chaque côté pour que la gouttière puisse contenir un maximum d'eau ?

Exercice 5.3 Déterminer les deux nombres dont la somme est 36 et qui ont un produit maximal.

Exercice 5.4 Quelle est la valeur minimale du produit de deux nombres si leur différence est égale à 12 ?

Exercice 5.5 La somme de deux nombres est 36.

On étudie la somme des carrés de ces deux nombres. A-t-elle un maximum ou un minimum ? Justifier puis calculer ce maximum ou ce minimum.

Exercice 5.6 Le propriétaire d'un champ estime que s'il plante 60 poiriers, le rendement moyen sera de 480 poires par arbre. Ce rendement diminuera de 5 poires par arbre pour chaque poirier additionnel planté dans le champ.

Combien le propriétaire devrait-il planter de poiriers pour que le rendement du verger soit maximal ?

Exercice 5.7 Si un ostréiculteur récolte des huîtres cette semaine, il pourrait en obtenir 120 paniers qu'il pourrait vendre CHF 240.– pièce. Pour chaque semaine d'attente, sa récolte augmenterait de 30 paniers, mais le prix de chaque panier diminuerait de CHF 40.

a) Dans combien de semaines, la récolte sera-t-elle la plus favorable financièrement ?

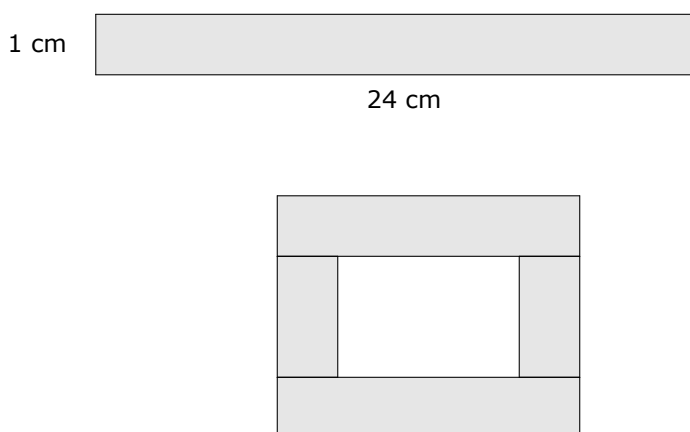
b) À ce moment-là, quel sera le montant que lui rapportera la récolte ?

Exercice 5.8 Une agence de voyages offre des voyages organisés au prix de CHF 60.– par personne pour les 30 premiers participants.

Pour les plus grands groupes, jusqu'à 90 participants, chaque personne bénéficie d'un rabais de CHF 0,50 pour tout participant en plus des 30 premiers. Par exemple, si 31 personnes participent, le prix par personne est de CHF 59,50 et donc le voyage coûte CHF 1844,50.

Pour quel nombre de participants l'agence gagnera-t-elle le plus ?

Exercice 5.9 Un photographe désire fabriquer un cadre pour une photo rectangulaire en coupant une planche de 24 cm de long et 1 cm de large en quatre morceaux.



Comment devra-t-il couper cette planche pour que l'aire intérieure du cadre soit maximale ?

Exercice 5.10 Une entreprise veut mettre en vente une nouvelle lampe. Pour ce genre de produit, l'expression de la fonction permettant de calculer la demande est $D(p) = 3000 - 25p$ où p est le prix d'une lampe. Les coûts totaux de production peuvent être calculés grâce à la fonction $C(x) = 15'000 + 20x$ où x est le nombre de lampes produites.

Quel prix faut-il choisir pour obtenir un bénéfice maximal ? Calculer ce bénéfice maximal.

Exercice 5.11 Au bowling SAROULE, il se joue quotidiennement 3'000 parties au prix de CHF 4.– la partie.

- a) En supposant que pour chaque diminution de 10 centimes du prix de la partie, il y aura 100 parties jouées de plus, trouver le prix permettant d'obtenir un revenu maximal. Quel sera ce revenu maximal ?
- b) Supposons que le bowling doit assumer les frais suivants : CHF 4'000.– pour les 3'000 premières parties qui se jouent, plus CHF 40.– par 100 parties au-delà des 3'000 premières. Quel prix devrait-on fixer pour obtenir un bénéfice maximal ? Quel sera ce bénéfice ?

Exercice 5.12 Une usine de montres constate que si le prix de vente de son modèle phare est fixé à 100.–, son revenu est de 20'000.– Frs, alors que si on triple le prix, le revenu est de 50'000.– Frs.

- a) Déterminer la fonction qui donne le revenu en fonction du prix $R(p)$.
- b) Quel prix de vente faut-il fixer pour que le revenu soit maximum ?
- c) Quel est le revenu maximum ?
- d) Donner la fonction qui détermine la demande en fonction du prix de vente, ainsi que le nombre de montres qu'il faut produire pour que le revenu soit maximal.

Exercice 5.13 Un cordonnier de luxe a constaté que s'il vend la paire de chaussures à 200.– son bénéfice mensuel est de 5'000.– Frs. S'il double le prix, son bénéfice atteint 20'000 Frs. Alors que si le prix est fixé à 650.– le bénéfice redescend à 10'625.– Frs.

- a) Calculer la fonction qui donne le bénéfice en fonction du prix de vente.
- b) Calculer le prix qu'il doit fixer pour maximiser son bénéfice et le bénéfice maximal.
- c) Calculer l'intervalle de rentabilité.
- d) Le coût variable de production d'une paire de chaussures est de 100.– Frs quel est le revenu maximal ?
- e) Combien de paires de chaussures faut-il produire mensuellement pour maximiser le bénéfice.
- f) Quels sont les coûts fixes mensuels ?

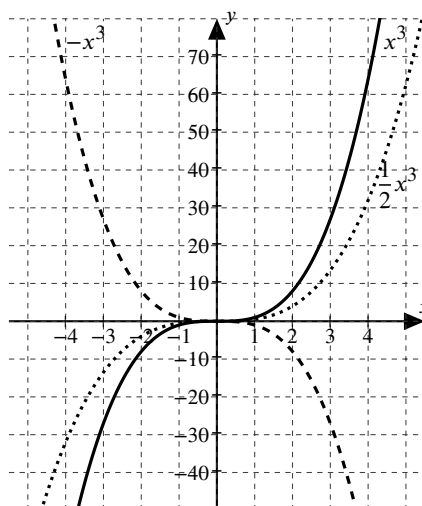
7 Solutions

7.1 Solutions - Puissances et racines

1.1	a) 81	f) $\frac{1}{10'000}$	k) $-\frac{1}{64}$	q) 100'000
	b) 64	g) 1	l) $\frac{1}{81}$	r) $\frac{100}{49}$
	c) 512	h) -125	m) 0,000 001	s) -490'000
	d) $\frac{1}{49}$	i) -1'000'000	n) 0,0016	t) -27'000'000'000
	e) $\frac{1}{125}$	j) $\frac{1}{225}$	o) 1,44	u) 160'000
1.2	a) $\frac{121}{169}$	d) $\frac{21}{19}$	g) 1	
	b) $\frac{16}{81}$	e) 121	h) $-\frac{17}{5}$	
	c) $-\frac{27}{1000}$	f) $-\frac{8}{125}$	i) 11	
1.3	a) a^8	e) $\frac{121}{a}$	h) $\frac{1}{2}$	k) $\frac{25a^2}{81}$
	b) a^{15}	f) $\frac{1}{a^{14}}$	i) $\frac{1}{32}$	l) $\frac{b^9}{5}$
	c) $\frac{100 \cdot b^{10}}{a^6}$	g) $\frac{8 \cdot 1a^4}{b^4}$	j) $\frac{5}{9ab^2}$	
	d) a^9			
1.4	a) 10'000'000	b) $\frac{1}{64}$	c) $\frac{1}{512}$	
1.5	a) $f(x) = x^n$ est en - - - - - ,	b) 4 ou 6		
	$g(x) = x^7$ en - - - - - et			
	$h(x) = x^3$ en ...	c) (-1;-1), (0;0) et (1;1)		

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^3	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64
$\frac{1}{2}x^3$	-32	-13,5	-4	-0,5	0	0,5	4	13,5	32
$-x^3$	64	27	8	1	0	-1	-8	-27	-64

1.6



1.7

a) $V(x) = x^3$
b) $V(z) = \pi \cdot 5^2 \cdot z$

c) $S(x) = 6x^2$
d) $I(i) = 5'000 \cdot i$

e) $C_1(i) = 5'000(1+i)$

1.8

a) $\mathcal{S} = \{\pm 2\}$
b) $\mathcal{S} = \{6\}$
c) $\mathcal{S} = \{2\}$

d) 16
e) -32
f) $\mathcal{S} = \{-5\}$

g) $\mathcal{S} = \emptyset$
h) $\mathcal{S} = \{-1\}$
i) $\mathcal{S} = \{\pm 4\}$

1.9

a) 5	e) 3	i) 0,2	m) 5	q) pas défini
b) 100	f) 2	j) 0,1	n) 0,3	r) -2
c) 10	g) 1	k) 0,5	o) 0	s) -0,1
d) 4	h) 200	l) 115	p) 1	t) $-\frac{1}{3}$

1.10 Idem exercice précédent.

1.11 Faux car $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

1.12

a) $x \in \mathbb{R}$	c) $x \in \mathbb{R}_-$	e) $x \in \mathbb{R}$	g) $x \in \mathbb{R}$
b) $x \in \mathbb{R}_+$	d) $x \in \mathbb{R}$	f) $x \in \mathbb{R}$	h) $x \geq 2$

1.13

a) $h(1'000'000) > f(1'000'000) > g(1'000'000)$
b) $f(x)$ est en - - - - - , $h(x)$ en - - - - - et $g(x)$ en ...
c) $(-1;-1)$, $(0;0)$ et $(1;1)$

1.14	a) Vrai	d) Vrai	g) Faux	j) Vrai	m) Vrai
	b) Faux	e) Vrai	h) Vrai	k) Faux	n) Vrai
	c) Faux	f) Faux	i) Faux	l) Vrai	o) Vrai
1.15	a) Faux $\sqrt{(-2)^2} = 2$	b) Vrai	c) Vrai	d) Vrai	
1.16	a) 2	c) 216	e) 8	g) 2	i) 45
	b) $\frac{1}{3}$	d) 5	f) 30	h) $13\sqrt{13}$	
1.17	a) $bc\sqrt{ac}$	b) $\frac{1}{3}$	c) $\frac{a^2c}{3b}$		
1.18	a) $2\sqrt{6}$	d) $10\sqrt[3]{3}$	g) $5\sqrt{5}$	j) $5\sqrt{10}$	
	b) $3\sqrt{6}$	e) 2	h) 5	k) $10\sqrt{10}$	
	c) $10\sqrt{2}$	f) $5\sqrt{2}$	i) $5\sqrt[3]{2}$	l) $3\sqrt[3]{2}$	
1.19	a) 21	e) $\sqrt{7} - 7\sqrt{5}$	i) 24	m) $4\sqrt{43} - 43$	o) $8 - \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{35} - 5\sqrt{7}} +$
	b) 30	f) $\sqrt{15}$	j) $-11\sqrt{5}$		
	c) $7\sqrt{3}$	g) $3\sqrt{7}$	k) $15\sqrt{5} - 6\sqrt{10}$		
	d) $2\sqrt{7}$	h) 12	l) $-2\sqrt{10}$	n) $8 - 2\sqrt{15}$	
1.20	a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$	d) 2	g) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$		
	b) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$	e) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$	h) $\frac{2\sqrt{13} - 13}{13}$		
	c) $3\sqrt{2}$	f) $\frac{\sqrt{5}}{25}$	i) $\frac{\sqrt{c} + \sqrt{ac}}{3c}$		
1.21	a) $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$	b) $16\sqrt[5]{16}$	c) $2\sqrt[5]{27}$		
1.22	a) $\sqrt[4]{7}$	d) $\sqrt[4]{125}$	g) $\sqrt[7]{a^5}$	j) $a^5\sqrt{a^2}$	
	b) $\sqrt[3]{25}$	e) $\frac{\sqrt{7}}{7}$	h) $\frac{\sqrt{a}}{a}$	k) $-a^3\sqrt{a}$	
	c) $\frac{\sqrt{11}}{11}$	f) $\frac{27}{8}$	i) $\sqrt[5]{a^3}$	l) non défini	
1.23	a) $7^{3/5}$	e) $2^{-3/4}$	i) $a^{4/5}$	m) $a^{3/2}$	q) $a^{-1/2}$
	b) $5^{1/3}$	f) $a^{-1/2}$	j) a^3	n) $13^{-1/8}$	r) $-a^{1/3}$
	c) $a^{9/2}$	g) $a^{7/5}$	k) $7^{3/5}$	o) non défini	$(\neq (-a)^{1/3})$
	d) $11^{1/5}$	h) a	l) -2^2	p) $-a^{1/2}$	s) $-6^{-1/5}$
1.24	a) 2	e) non défini	h) $\frac{\sqrt{3}}{6}$	j) $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt[3]{20}}{2}$	
	b) non défini	f) $\frac{1}{3}$		k) -2	
	c) 2	g) $\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$	i) $\frac{5}{4}$	l) non défini	
	d) $\frac{1}{2}$				

1.25 a) 2^4 b) 2^{-3} c) $2^{3/2}$ d) $2^{5/7}$ e) $2^{-1/2}$ f) $2^{13/3}$

1.26 a) $5^{5/21}$ d) $\frac{8}{27}a^2$ g) $100a^2$ j) $a^{-1/2}$
 b) $5^{2/147}$ e) $\frac{a^{2/3}}{16}$ h) $a^{4/3}$ k) $\sqrt{a^3} = a^{3/2}$
 c) $3^{5/2}$ f) $\sqrt[6]{a} = a^{1/6}$ i) $a^{7/3}$ l) $a^{7/10}$

1.27 a) $A = -85$ b) $B = \frac{5}{3}$

1.28 a) $a^{1/6} = \sqrt[6]{a}$ b) a

1.29 a) $a^{1/4}$ d) $a^{\frac{6}{5}}$ g) a^5 j) $a^{5/2}$
 b) $\frac{b^3}{a^3}$ e) a^2 h) $-\frac{1}{a^6}$ k) $a^{5/6}$
 c) $\frac{b^{10}}{a^{15}}$ f) $\frac{1}{a^6}$ i) $a^{7/3}$ l) $\frac{1}{a^{10}b^{15}}$

1.30 a) 3 d) 81 g) 6 j) $\frac{1}{12}$ m) 12
 b) 500 e) 8 h) $2\sqrt[3]{5}$ k) 1 n) $\frac{2}{25}$
 c) 1000 f) -81 i) $2\sqrt{2}+2$ l) $\frac{\sqrt[6]{5}}{6}$

1.31 a) 1,026 c) 23 e) 7,483 g) 0,647 i) 0,776
 b) -2,408 d) 13,391 f) 0,5 h) 13'043,916

1.32 a) $\mathcal{S} = \{5\}$ c) $\mathcal{S} = \{\pm 3\}$ e) $\mathcal{S} = \{\pm 3\}$
 b) $\mathcal{S} = \{-5\}$ d) $\mathcal{S} = \emptyset$ f) $\mathcal{S} = \emptyset$

1.33 a) $\mathcal{S} = \{2,668\}$ d) $\mathcal{S} = \emptyset$ g) $\mathcal{S} = \{6\}$
 b) $\mathcal{S} = \{-2,668\}$ e) $\mathcal{S} = \{\pm 1,2\}$ h) $\mathcal{S} = \{\pm 1,355\}$
 c) $\mathcal{S} = \{\pm 2,646\}$ f) $\mathcal{S} = \emptyset$ i) $\mathcal{S} = \{1\}$

1.34 a) $\mathcal{S} = \{5\}$ b) $\mathcal{S} = \{-5\}$ c) $\mathcal{S} = \{\pm \frac{14}{5}\}$

1.35 a) $\mathcal{S} = \{1,501\}$ b) $\mathcal{S} = \{1,200\}$ c) $\mathcal{S} = \emptyset$

1.36 a) $\mathcal{S} = \{100\}$ d) $\mathcal{S} = \{1,300\}$ g) $\mathcal{S} = \{2,25\}$
 b) $\mathcal{S} = \{4\}$ e) $\mathcal{S} = \{4\}$ h) $\mathcal{S} = \{30,687\}$
 c) $\mathcal{S} = \{256\}$ f) $\mathcal{S} = \{9\}$ i) $\mathcal{S} = \{16\}$

$$2.12 \quad i_{12} = \sqrt[3]{1+0,04} - 1 \approx 1,32\%$$

7.3 Solutions - Logarithmes

3.1	a) $\mathcal{S} = \{3\}$	e) $\mathcal{S} = \{-6\}$	j) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$	n) $\mathcal{S} = \{0;4\}$
	b) $\mathcal{S} = \{-1\}$	f) $\mathcal{S} = \emptyset$	k) $\mathcal{S} = \{4\}$	o) $\mathcal{S} = \{2\}$
	c) $\mathcal{S} = \{2\}$	g) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{13}{2}\right\}$	l) $\mathcal{S} = \{-11\}$	p) $\mathcal{S} = \emptyset$
	d) $\mathcal{S} = \left\{\frac{18}{7}\right\}$	h) $\mathcal{S} = \{-1;2\}$	m) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{28}\right\}$	

3.2	a) 6	b) 4	c) 2	d) 0	e) $\frac{1}{2}$	f) -1
-----	------	------	------	------	------------------	-------

3.3	a) 6	c) 0	e) $\frac{1}{2}$	g) 1
	b) -2	d) -3	f) $\frac{3}{5}$	h) $-\frac{2}{3}$

3.4	a) 3	b) $\frac{1}{3}$	c) -	d) $\frac{1}{3}$	e) $\frac{3}{2}$	f) $\frac{3}{4}$
-----	------	------------------	------	------------------	------------------	------------------

3.5	a) 3	b) -4	c) $\frac{3}{2}$	d) -8
-----	------	-------	------------------	-------

3.6	a) $\approx 5,32$	b) $\approx 0,19$	c) $\approx 1,85$	d) $\approx 1,10$
-----	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

3.7	a) $\mathcal{S} = \{\log_{17}(9)\}$	c) $\mathcal{S} = \left\{\frac{\log(2)+6}{3}\right\}$	e) $\mathcal{S} = \{8 - \log_5(3)\}$
	b) $\mathcal{S} = \{\log_{17}(10) - 1\}$	d) $\mathcal{S} = \left\{\frac{\log_2(34) - 1}{3}\right\}$	f) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1 - \log_7(8)}{2}\right\}$

3.8	a) $\mathcal{S} = \{\sqrt[3]{200} - 1\} = \{\sim 4,85\}$	g) $\mathcal{S} = \left\{\sqrt[4]{\frac{300}{7}} - 1\right\} = \{\sim 1,56\}$
	b) $\mathcal{S} = \left\{\frac{15'625}{27}\right\} = \{\sim 578,70\}$	h) $\mathcal{S} = \left\{\frac{\log_{1,5}(\frac{300}{7})}{4}\right\} = \{\sim 2,32\}$
	c) $\mathcal{S} = \{\log_{1,2}(200)\} = \{\sim 29,06\}$	i) $\mathcal{S} = \left\{4\log_{1,5}(\frac{300}{7})\right\} = \{\sim 37,07\}$
	d) $\mathcal{S} = \left\{\frac{216}{25}\right\} = \{8,64\}$	j) $\mathcal{S} = \left\{\frac{4}{\log_{1,5}(\frac{300}{7})}\right\} = \{\sim 0,43\}$
	e) $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{\log_{1,2}(200)}\right\} = \{\sim 0,10\}$	
	f) $\mathcal{S} = \{\log_{1,2}(8'000'000)\} = \{\sim 87,18\}$	

$$3.9 \quad \sim 17,28 \text{ ans}$$

3.10 La somme a triplé après 19 ans.

3.11 a) ~ 23 mois et 26 jours ($\sim 23,87$ mois)

b) $i_{12} = \sqrt[24]{1,024144} - 1 \approx 0,995\%$

3.12 a) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{99'999}{2} \right\}$

b) $\mathcal{S} = \{125\}$

c) $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{4} \right\}$

d) $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

3.13 a) $\mathcal{S} = \{7\}$

c) $\mathcal{S} = \{4\}$ (-4 doit être éliminé)

b) $\mathcal{S} = \emptyset$ (3 doit être éliminé)

d) $\mathcal{S} = \{1; 3\}$

3.14 a) $\mathcal{S} = \{5\}$ (2 doit être éliminé)

c) $\mathcal{S} = \{5\}$

b) $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$

d) $\mathcal{S} = \emptyset$ (-5 doit être éliminé)

7.4 Solutions - Systèmes d'équations linéaires 3 x 3

4.1 a) $\mathcal{S} = \{(2; 3; 14)\}$

b) $\mathcal{S} = \{(6; -10; 1)\}$

c) $\mathcal{S} = \{(20; -10; 0)\}$

4.2 a) $\mathcal{S} = \{(2; -4; 3)\}$

b) $\mathcal{S} = \{(-4; -6; 1)\}$

c) $\mathcal{S} = \{(0; 7; 0)\}$

4.3 a) $\mathcal{S} = \{(5; 1; -5)\}$

b) $\mathcal{S} = \{(3; 0; -2)\}$

c) $\mathcal{S} = \{(-2; -3; 4)\}$

4.4 a) $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{2}; 2; -\frac{1}{3} \right) \right\}$

b) $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{4}{5}; -3; \frac{3}{2} \right) \right\}$

c) $\mathcal{S} = \left\{ \left(5; 1; -\frac{4}{3} \right) \right\}$

4.5 a) $\mathcal{S} = \{(1; 6; 10)\}$

b) $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{3}; 0; 8 \right) \right\}$

c) $\mathcal{S} = \{(5; 10; 15)\}$

4.6 a) $\mathcal{S} = \emptyset$

b) indéterminé

c) $\mathcal{S} = \emptyset$

4.7 a) indéterminé

b) $\mathcal{S} = \emptyset$

c) indéterminé

4.8 Le prix par hectolitre était de 140 francs pour le froment, 90 francs pour le seigle et 50 francs pour l'avoine.

4.9 rouges : CHF 12,50, bleus : CHF 15.– et jaunes : CHF 17,50

4.10 220 montées, 60 descentes, 460 aller-retour

4.11 Le nombre est 248.

4.12 4 pièces de 5 francs, 16 pièces de 2 francs, 8 pièces de 1 fr.

4.13 Michel a 23 ans, Paul a 13 ans, Daniel a 39 ans.

4.14 CHF 111'300.-, CHF 110'240.-, CHF 109'200.-,

4.15 Il y a 10'000 oiseaux sur l'île A, 5'000 sur l'île B, 20'000 sur l'île C.

4.16 J'ai 16 ans, ma mère 40 ans et ma grand-mère 70 ans.

4.17 Il y avait 250 g de chocolat blanc, 500 g de brun et 50 g de noir.

4.18 Le paquet mesure 25 cm x 15 cm x 15 cm.

4.19

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$	c) $y = -x^2 + 3x - 2$	e) $y = -2x + 5$, c'est une droite
b) $y = x^2 + 3x$	d) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$	f) $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{15}{2}$

4.20 $y = -3x^2 + 12x + 15$ $y = -3(x-5)(x+1)$

4.21 Il n'est pas possible d'obtenir une parabole $y = ax^2 + bx + c$ qui passe par B et par C car ces deux points ont la même 1ère coordonnée. Par contre, $x = -y^2 - 3y + 6$ est aussi une parabole (avec un axe de symétrie horizontal au lieu de vertical) et elle passe par ces 3 points.

4.22

a) $y = x^2 - 4x + 7$	c) $y = 3x^2 - 6x + 5$	e) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$
b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{11}{2}$	d) $y = 10x^2 + 60x + 86$	f) $y = 2x^2 + 8x + 5$

7.5 Solutions - Optimisation quadratique

5.1 $A(y) = 250y - \frac{3}{4}y^2$ $y = \frac{500}{3}$ $x = 125$
Le champ mesure 125 m sur environ 166,7 m.

5.2 $A(x) = 27x - 2x^2$ $x = \frac{27}{4}$ 6,75 cm de chaque côté.

5.3 $P(x) = 36x - x^2$ Les nombres sont 18 et 18.

5.4 $P(x) = 12x + x^2$ Les nombres sont -6 et 6 et le produit -36 .

5.5 $S(x) = x^2 + (36 - x)^2 = 2x^2 - 72x + 1296$ minimum = 648

5.6 $R(x) = x[480 - 5(x - 60)]$ Il faut planter 78 poiriers.
Ou si x est le nb de poiriers en plus des 60 : $R(x) = (60 + x)(480 - 5x)$

$$R(x) = (120 + 30x)(240 - 40x) = 28'800 + 2400x - 1200x^2$$

5.7 a) La récolte la plus favorable sera dans une semaine. b) Le revenu sera de CHF 30'000.—.

5.8 Si $30 \leq x \leq 90$ $R(x) = (75 - 0,5x)x$ Pour 75 participants.

5.9 $A(x) = (x - 2)(12 - x)$ 2 morceaux de 7 cm de long et 2 autres de 5 cm de long.

5.10 $B(p) = 3000p - 25p^2 - (15'000 + 20(3000 - 25p)) = -25p^2 + 3500p - 75'000$
Il faut choisir un prix de CHF 70.— et le bénéfice sera de CHF 47'500.—.

a) $R(p) = p(7000 - 1000p)$ Il faut choisir un prix de CHF 3,50. Le revenu sera de 12'250.—
5.11 b) $B(p) = 7000p - 1000p^2 - (2800 + 0,4(7000 - 1000p)) = -1000p^2 + 7400p - 5600$
Il faut choisir un prix de CHF 3,70. Le bénéfice sera de CHF 8090.—.

a) $R(p) = -\frac{1}{6}p^2 + \frac{650}{3}p$
b) Le revenu est maximum pour un prix de vente de 650.— Frs.
5.12 c) Le revenu maximum est de 70'417.—.
d) $D(p) = -\frac{1}{6}p + \frac{650}{3}$
Il faut produire 108 montres (et les vendre à 650.— Frs) pour maximiser le revenu.

- a) $B(p) = -\frac{1}{4}p^2 + 225p - 30'000$
- b) Le bénéfice maximal est de 20'625.– Frs. pour un prix de vente de 450.– Frs.
- c) Intervalle de rentabilité [162,80; 737,20]
- d) $C(p) = m \cdot p + 30'000$, car $R(0) = 0 \implies B(0) = C(0)$
 $C(x) = 100x + b$ et $D(p) = -\frac{1}{4}p + h \implies C(p) = C(D(p)) = -25p + 100h + b$
 $\implies m = -25$ et $100h + b = 30'000$
 On a donc $C(p) = -25p + 30'000$ et $R(p) = B(p) + C(p) = -\frac{1}{4}p^2 + 200p = p(-\frac{1}{4}p + 200) = p \cdot D(p)$.
 Le revenu maximal est de 40'000.– Frs, atteint pour un prix de 400.– Frs.
- e) $D(p) = -\frac{1}{4}p + 200$ Il faut produire 75 paires de chaussures.
- f) Les coût fixes sont de 10'000.– Frs.

Références

- [1] S. Amaudruz : Cours et exercices. Gymnase de Bugon.
- [2] H. Bovet : Diplôme 1D. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2008.
- [3] C.-A. Chevalley : Calculs pour l'économie. DFJC Vaud, 2009.
- [4] J.-P. Favre : Mathématiques pour la Matu pro. Promath Editions, 2019.
- [5] M.-A. Jaquemet et N. Lakehal : Cours et exercices. Gymnase de Beaulieu.
- [6] J.-P. Javet : Cours et exercices. Gymnase de Morges.
- [7] J.-P. Javet : Mathématiques 2EC. <http://www.gymomath.ch>, 2020.
- [8] O. Kruger et A. Schenkel : Cours et exercices. Gymnase de Beaulieu et du Bugon.
- [9] K. Studer et P. Frommenwiler : Mathématiques pour la maturité. Algèbre et analyse de données. Cornelsen Schweiz, 2014.

Nous tenons à remercier notre collègue Emmanuelle Vlcek pour son travail de relecture et pour ses commentaires constructifs qui ont permis d'améliorer cette brochure.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch
 sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 22 mai 2023