2E

Mathématiques et Analyses mathématiques semestre 3

Sarah Delmonico
Cédric Delmonico

Gymnases du Bugnon et d'Yverdon

2026-2027

Table des matières

Partie I - Mathématiques

1 Droites et fonctions affines **2**
1.1 Rappels . . . 2
1.2 Applications économiques - relations prix-quantité . . . 4
1.3 Applications économiques - Intérêts simples . . . 5
1.4 Intersections de droites . . . 7
1.5 Applications : Résolution de problèmes . . . 10
1.6 Résolution graphique de systèmes d'équations linéaires 2 x 2 . . . 11
1.7 Application économique : analyse de rentabilité . . . 16
1.8 Application économique : loi de l'offre et de la demande . . . 19
2 Fonctions quadratiques **21**
2.1 Définition . . . 21
2.2 Graphe et points caractéristiques . . . 22
2.3 Intersections . . . 26
2.4 Application économique : formation de prix en situation de monopole . . . 27

Partie II - Analyses mathématiques

3 Factorisation **33**
3.1 Rappel - Factorisation du degré 2 . . . 33
3.2 Produits remarquables du 3^{e} degré . . . 35
3.3 Changement de variable . . . 36
3.4 Méthode du groupement . . . 38
3.5 Division Euclidienne . . . 39
3.6 Utilisation de la division euclidienne pour factoriser . . . 41
4 Fractions rationnelles **45**
4.1 Généralités . . . 45
4.2 Simplification . . . 47
4.3 Opérations de base . . . 48
4.4 Résolution d'équations rationnelles . . . 52

Partie III - Exercices et solutions

5 Exercices **54**
5.1 Exercices - Droites et fonctions affines . . . 54
5.2 Exercices - Fonctions quadratiques . . . 66
5.3 Exercices - Factorisation . . . 72
5.4 Exercices - Fractions rationnelles . . . 77
6 Solutions **80**
6.1 Solutions - Droites et fonctions affines . . . 80
6.2 Solutions - Fonctions quadratiques . . . 87
6.3 Solutions - Factorisation . . . 90
6.4 Solutions - Fractions rationnelles . . . 92

1 Droites et fonctions affines

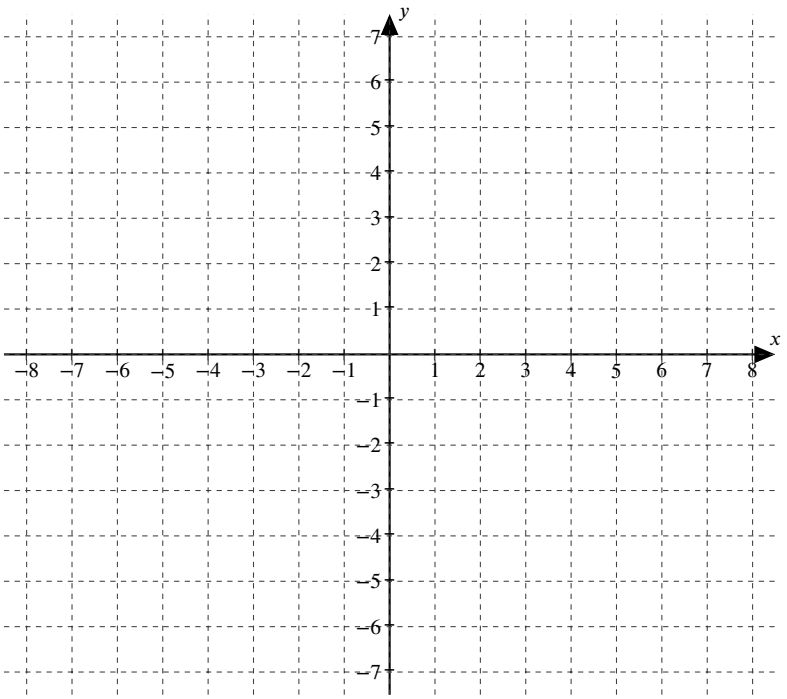
1.1 Rappels

L'expression algébrique d'une **fonction affine** f est du type $f(x) = mx + h$, où m et h sont des nombres réels.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite, d'équation $y = mx + h$.

m est la **pente** de la droite et h son **ordonnée à l'origine**.

Exemple : Représenter graphiquement la fonction définie par $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$.



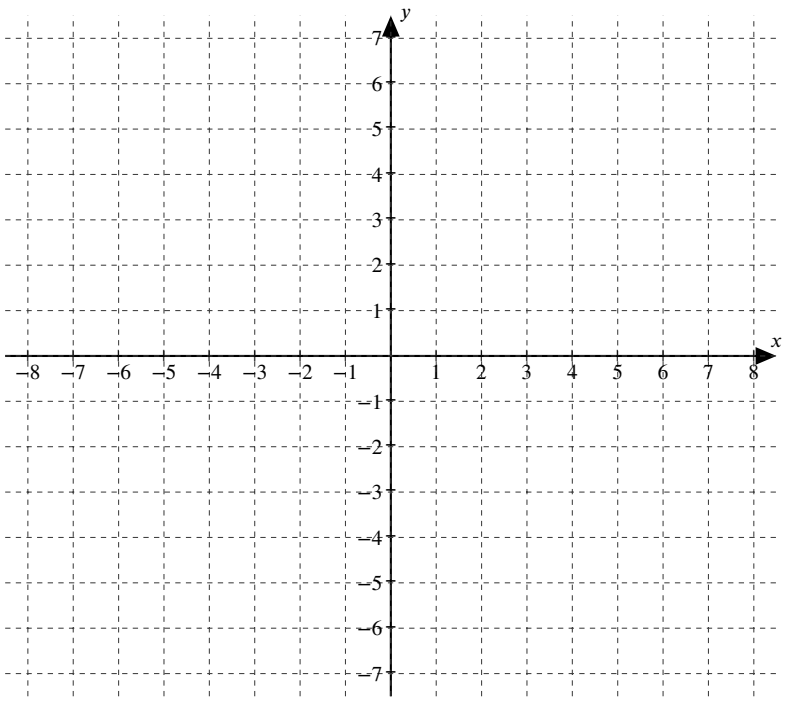
Est-ce que cette droite passe par le point $(-36\,;20)$?

- Lorsque la pente du graphe est positive, la fonction est **croissante**.
- Lorsque la pente du graphe est négative, la fonction est **décroissante**.
- Lorsque la pente du graphe est nulle, la fonction est **constante**.
- Lorsque l'ordonnée à l'origine est nulle, la fonction est **linéaire**.

Exemple :

a) Compléter ce tableau et représenter graphiquement ces fonctions.

Expression	Pente	Ordonnée à l'origine
$f(x) = x - 3$		
$g(x) = -x - 3$		
$h(x) = 2$		
$i(x) = 0{,}5x$		



b) Déterminer l'expression d'une fonction affine j telle que $j(-10) = 25$ et $j(10) = -35$.

ex. 1.1 à 1.10

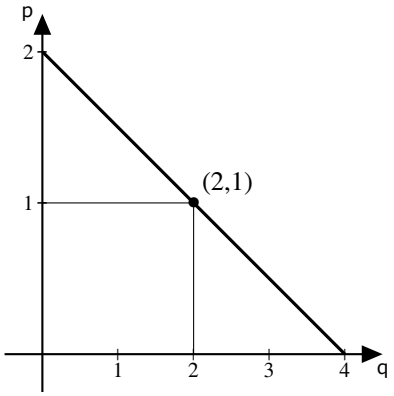
1.2 Applications économiques - relations prix-quantité

En économie, on observe que le prix d'un bien est lié à la quantité de celui-ci sur le marché. Par exemple, si la récolte de fraises a été bonnes, elles seront moins chères que si la récolte a été peu abondante.

Réciproquement, la quantité vendue dépend souvent du prix de vente. En général, plus le prix est élevé, moins il y a d'acheteurs intéressés.

On va modéliser le rapport entre le prix et la quantité par des fonctions.

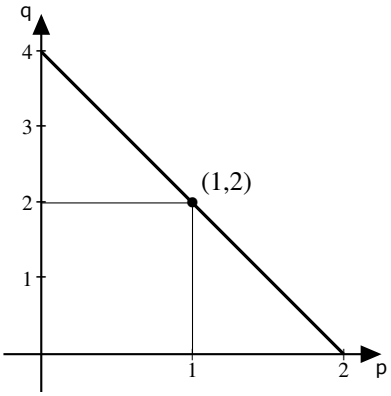
Le prix en fonction de la quantité :



$p(q) = \ldots \cdot q + \ldots$

S'il y a 2 t de fraises sur le marché,
on les vendra à 1.- les 100 g.

La quantité en fonction du prix :



$q(p) = \ldots \cdot p + \ldots$

Si le prix des fraises est de 1.- les 100 g,
on arrivera à en vendre 2 t.

Si nous connaissons l'expression algébrique d'une des deux fonctions, il est souvent possible de calculer l'expression algébrique de la deuxième en calculant sa **réciproque**[1].

Exemple :

On connait le prix en fonction de la quantité :

$$p(q) = -\frac{1}{2}q + 2$$

On connait la quantité en fonction du prix :

$$q(p) = -2p + 4$$

Remarque : Dans la réalité, les fonctions prix-quantité ou quantité-prix ne sont pas affines ou quadratiques. Dans le cadre de ce cours, nous travaillerons dans des situations idéales et simplifiées, en ne considérant que des fonctions du 1er degré et du 2e degré.

ex. 1.11

1. parfois appelée inverse

1.3 Applications économiques - Intérêts simples

Lorsqu'on dépose de l'argent sur un compte épargne, le montant placé nous rapporte un peu d'argent ; c'est ce qu'on appelle l'**intérêt**.

Inversement, Lorsqu'on emprunte de l'argent à un institut financier, on doit rembourser plus que le montant emprunté car on doit payer l'intérêt.

Le taux d'intérêt est généralement annuel et est exprimé en pour-cent.

En économie, pour calculer la durée d'un placement en jours, on utilise la **méthode commerciale**, appelée aussi **Base 30 / 360**[2], qui se résume par :

- tous les mois comptent 30 jours ;
- une année commerciale compte 360 jours.

Exemples :

a) Mon oncle millionaire dépose le 1er janvier un capital de CHF $2'500'000.–$ sur un compte d'épargne qui rapporte un intérêt de $0{,}7\%$. Quel montant aura-t-il sur son compte après une année ?

b) S'il décide de retirer son argent le 5 août de la 1re année, quel est le montant de l'intérêt ?

c) Je lui emprunte CHF $35'000.–$. À la fin de la 1re année, je lui dois CHF $37'800.–$. Quel est le taux d'intérêt annuel du prêt ?

d) Le magasin « TVPlus » propose une offre spéciale valable le 10 juin pour l'achat d'un nouvel écran TV. Il y a deux options de paiement : payer $1'799.–$ le jour de l'achat, ou payer $1'949.–$ à la fin de l'année. Quel est le taux d'intérêt annuel proposé par le magasin ?

e) Combien de jours faut-il placer un capital de CHF $15'000.–$ à $0{,}2\%$ pour qu'il rapporte $10.–$?

ex. 1.12 à 1.15

2. D'autres méthodes existent comme par exemple la méthode **Base Exact / Exact** qui utilise le nombre exact des jours calendaires. En Suisse, on utilise généralement la **méthode allemande** qui considère que tous les mois se terminent le 30.

Notations : Dans les problèmes d'intérêts simples, on utilise généralement les notations suivantes :

n : durée du prêt (en années)
C_0 : capital initial
C_n : capital après le temps n
i : taux d'intérêt
I : montant d'intérêt
t : pourcentage du taux d'intérêt

Attention : Les taux d'intérêt (i) sont souvent exprimés en pour-cent. Pour les calculs financiers, il est plus simple de les exprimer sous forme décimale. Ainsi $1{,}25\%$ s'écrira $0{,}0125$.

Dans cet exemple, $i = 1{,}25\% = 0{,}0125$, alors que $t = 1{,}25 = 100 \cdot i$.

Les problèmes d'intérêts simples peuvent généralement se résoudre avec des raisonnements de proportionnalité. Avec les notations précédentes, on peut néanmoins poser les formules suivantes :

$$\boxed{\text{intérêt} = \text{capital} \cdot \text{taux} \cdot \text{temps}} \qquad \boxed{I = C_0 \cdot i \cdot n}$$

Pour trouver la valeur finale du capital, on ajoute l'intérêt à celui-ci :

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 + I \\ &= C_0 + C_0 \cdot i \cdot n \\ &= C_0(1 + i \cdot n) \end{aligned}$$

$$\boxed{C_n = C_0(1 + i \cdot n)}$$

Le temps n est souvent une fraction d'année : $\dfrac{\text{nb jours}}{360}$ ou $\dfrac{\text{nb mois}}{12}$.

Exemples :

a) On place CHF $5'000.-$ sur un compte à 3%. Quel sera le capital sur ce compte après 4 mois ?

b) On a placé CHF $2'500.-$ sur un compte à 5%. Quelle est la durée de ce placement en mois si le capital final se monte à CHF $2'531{,}25$?

Remarque : Lorsque le placement dure plus d'une année ($n > 1$), la nature du problème change et les formules ci-dessus ne sont plus valables. On parle alors d'intérêts composés.

Exemple : On place CHF $5'000.-$ sur un compte avec un taux annuel de 3%. Quel sera le capital sur ce compte après 2 ans ?

$C_1 = 5000 + 5000 \cdot 0{,}03 = 5000 + 150 = 5150$ $\qquad$ $C_2 = 5150 + 5150 \cdot 0{,}03 = 5150 + 154{,}5 = 5304{,}5$

On remarque que l'intérêt de la 2e année $(154{,}50)$ est supérieur à celui de la 1re $(150.-)$. En effet, le capital initial de la 2e année est de $5'150.-$.

ex. 1.16 à 1.19

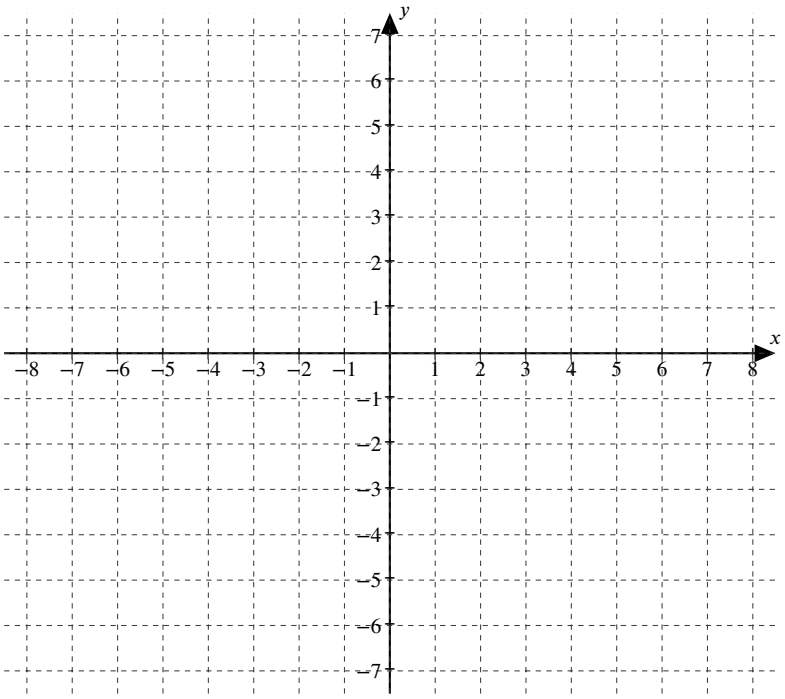
1.4 Intersections de droites

Exemple :

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-6	-3	0	3	6
$\frac{1}{3}x-5$					
$-x+3$					

b) Représenter graphiquement $f(x)=\frac{1}{3}x-5$ et $g(x)=-x+3$.



c) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites ?

d) Comment trouver ces coordonnées dans le tableau de valeurs ?

e) Comment trouver ces coordonnées algébriquement ?

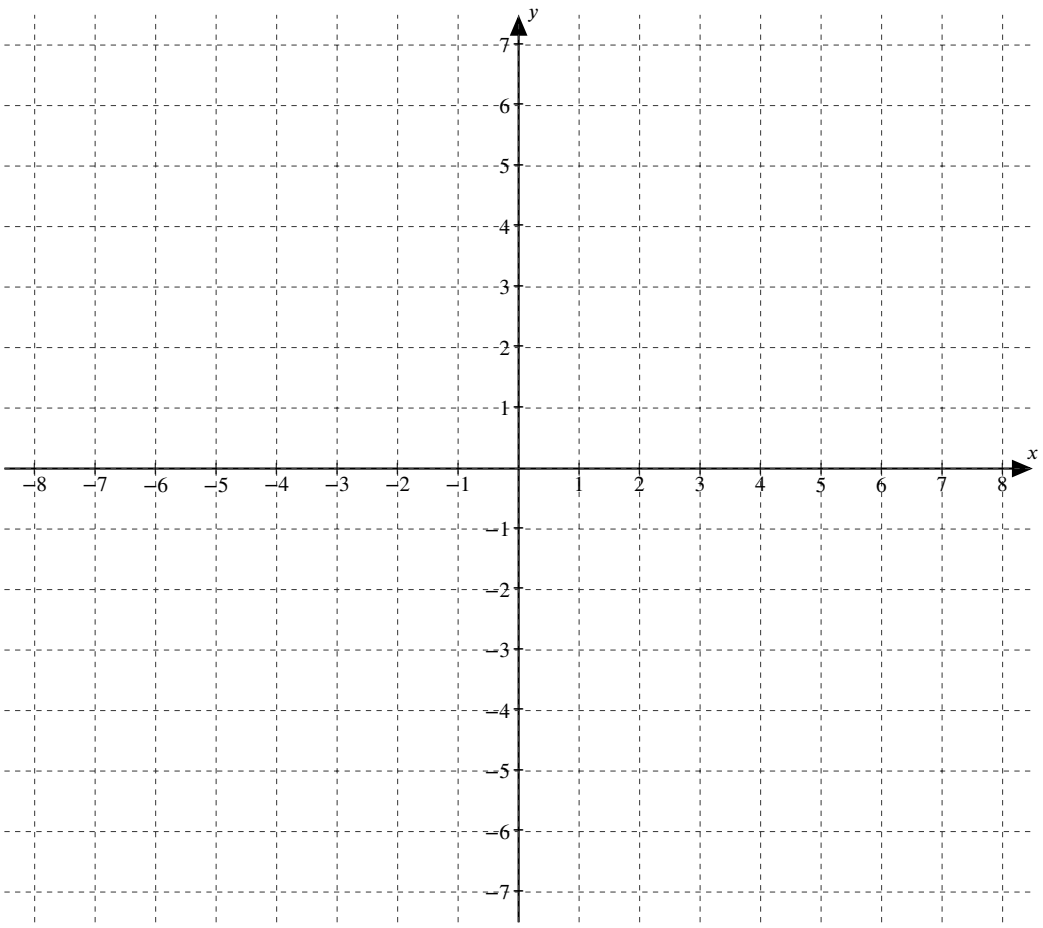
Soit les droites d et d', données par les équations $y = mx + h$ et $y = m'x + h'$.

Si $m \neq m'$, ces deux droites ont un unique point d'intersection.

La $1^{\text{ère}}$ coordonnée de ce point est la solution de l'équation $mx + h = m'x + h'$.

On trouve, ensuite, la $2^{\text{ème}}$ coordonnée en remplaçant dans l'équation d'une des droites, à choix.

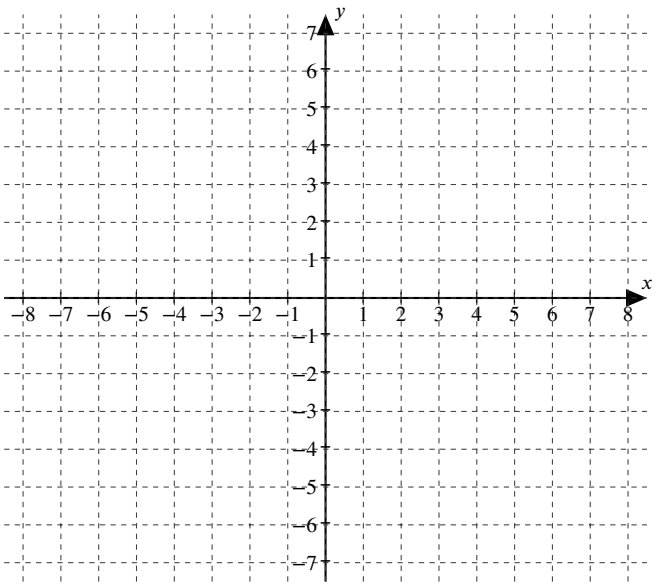
Exemple : Représenter graphiquement les droites $y = -\frac{4}{5}x - 3$ et $y = x + 3$ et déterminer algébriquement les coordonnées exactes du point d'intersection de ces deux droites.



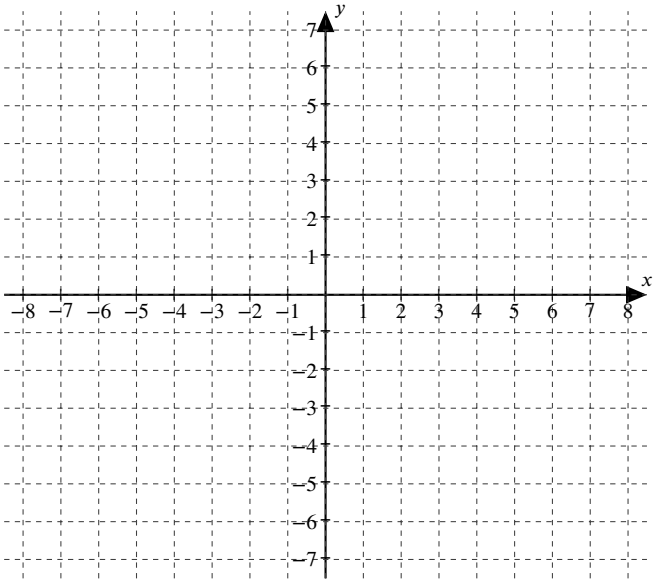
Que se passe-t-il si $m = m'$?

Exemples :

a) Représenter graphiquement les droites $y = -0{,}5x - 3$ et $y = -0{,}5x + 2$.
Résoudre l'équation $-0{,}5x - 3 = -0{,}5x + 2$.



b) Résoudre algébriquement l'équation $x = 3 + \dfrac{2x - 6}{2}$.
Représenter les graphes de $f(x) = x$ et $g(x) = 3 + \dfrac{2x - 6}{2}$.



ex. 1.20 à 1.21

1.5 Applications : Résolution de problèmes

Exemple : Pour mon assurance maladie, j'ai le choix entre deux franchises :

(A) Une franchise de CHF $2000.-$ avec des mensualités de CHF $400.-$.

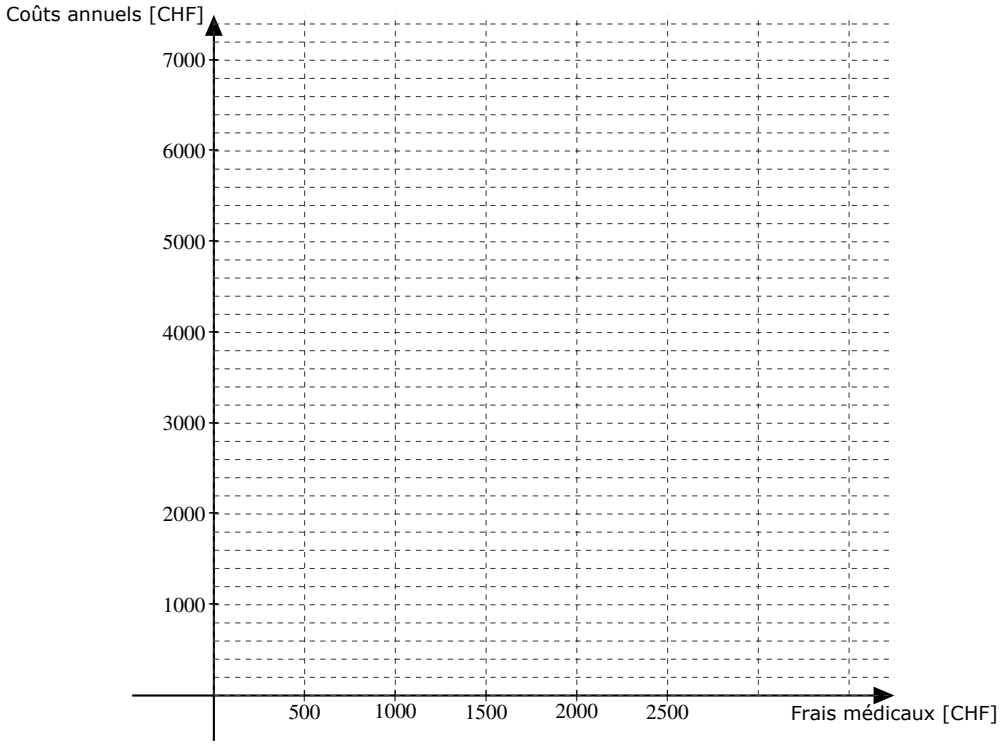
(B) Une franchise de CHF $0.-$ avec des mensualités de CHF $500.-$.

Dans les deux cas, 10% des frais médicaux qui dépassent la franchise sont à ma charge.

a) Compléter le tableau ci-dessous. Les valeurs sont en CHF.

frais médicaux de l'année	0	500	1000	1500	2000	2500	3000
total payé en 1 an avec A							
total payé en 1 an avec B							

b) Représenter graphiquement cette situation.



c) À partir de quel montant de frais médicaux annuels la proposition B est-elle la plus avantageuse ?

ex. 1.22 à 1.23

1.6 Résolution graphique de systèmes d'équations linéaires 2 x 2

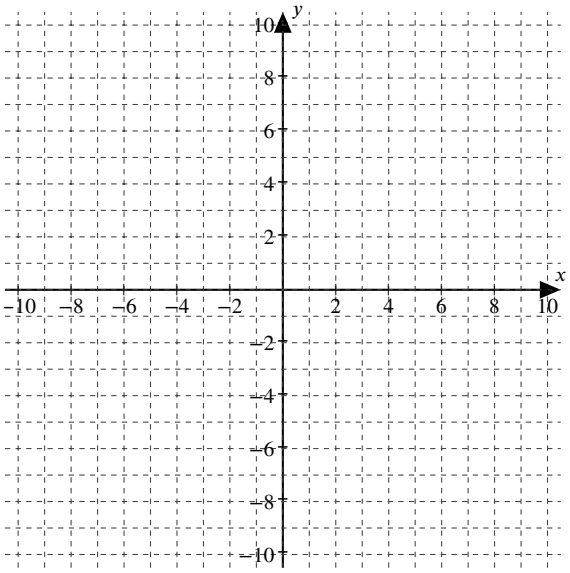
Soit $P(x\,;y)$ un point.
x est **l'abscisse** du point P et y est son **ordonnée**.

Considérons l'équation $\boxed{ax+by=c}$, où a,b,c sont des nombres réels et x,y sont des variables.
Les points $(x\,;y)$ qui satisfont à cette équation forment une droite.

Exemples :

a) Trouver quatre points qui satisfont à l'équation $x-2y=10$.

b) Représenter les points obtenus et vérifier qu'ils sont alignés.



c) Trouver quatre points qui satisfont à l'équation $y=3$. Représenter ci-dessus la droite obtenue.
Que peut-on en dire ?

d) Trouver quatre points qui satisfont à l'équation $x=-6$. Représenter ci-dessus la droite obtenue.
Que peut-on en dire ?

e) Quelle est l'équation de l'axe Ox ?

f) Quelle est l'équation de l'axe Oy ?

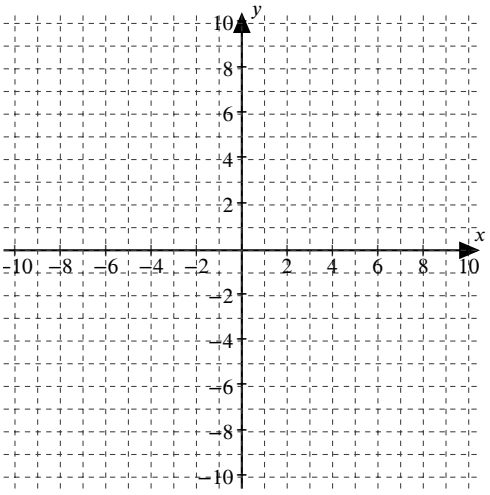
Les **intersections de la droite avec les axes** Ox **et** Oy peuvent permettre, entre autres, de la représenter ou choisir la graduation. il est donc utile de savoir les calculer.

Exemples :

a) Déterminer l'intersection de la droite $2x + 3y = 12$ avec l'axe Ox.

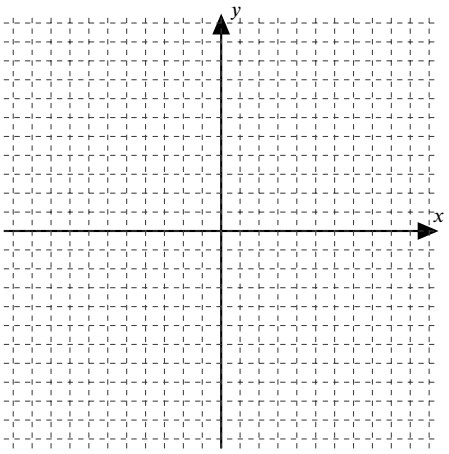
b) Déterminer l'intersection de la droite $2x + 3y = 12$ avec l'axe Oy.

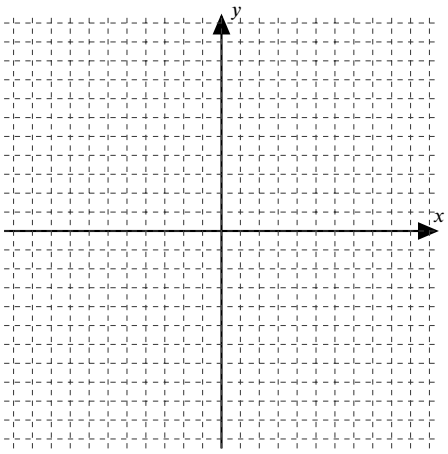
c) Représenter la droite $2x + 3y = 12$ grâce aux deux points trouvés précédemment.



d) Déterminer les intersections de la droite $5x - 2y = 100$ avec les axes.

e) Choisir une graduation pour représenter la droite $5x - 2y = 100$ de manière à voir ses intersections avec les axes. Faire deux propositions différentes.



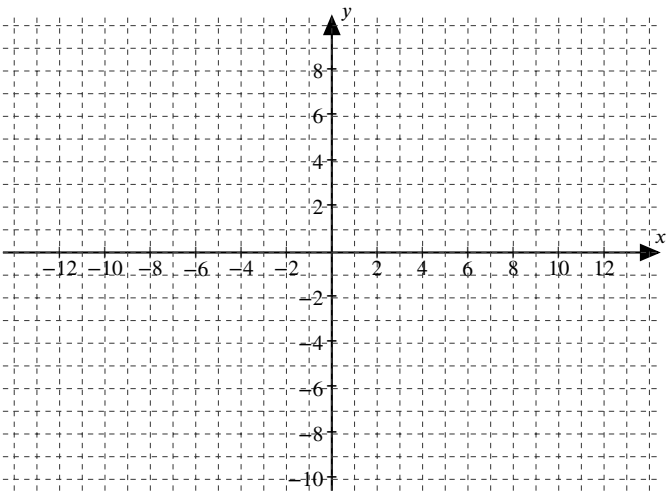


ex. 1.24 à 1.25

Les équations des droites non verticales peuvent s'écrire sous la forme $y = mx + h$ où m est la **pente** de la droite et h son **ordonnée à l'origine**.

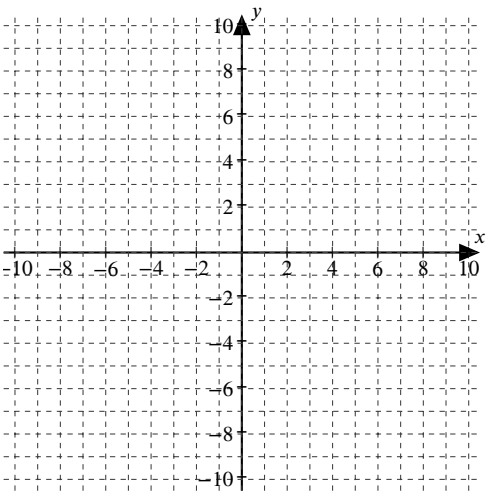
Exemples :

a) Représenter la droite $x + 3y = 12$ en déterminant ses intersections avec les axes.



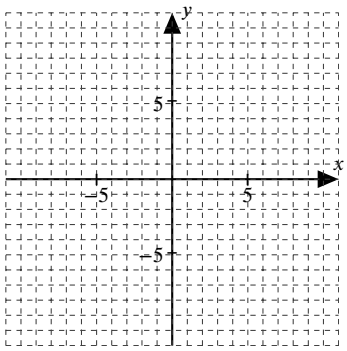
b) Transformer algébriquement l'équation $x + 3y = 12$ sous la forme $y = mx + h$. Quelle est sa pente ? Quelle est son ordonnée à l'origine ? Vérifier sur le graphique.

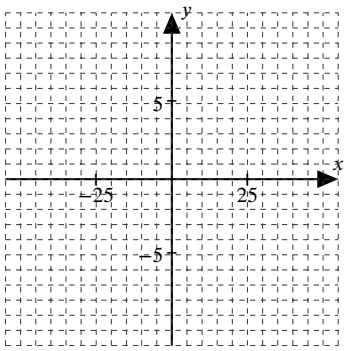
c) Déterminer algébriquement la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite $4x - 3y = 24$, puis les utiliser pour la représenter.

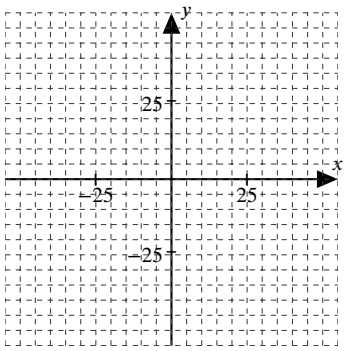


ex. 1.26 à 1.28

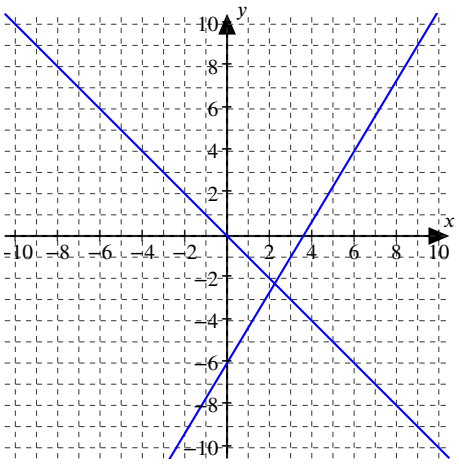
d) Représenter $y = -\frac{2}{5}x + 10$ sur les trois graphiques ci-dessous.

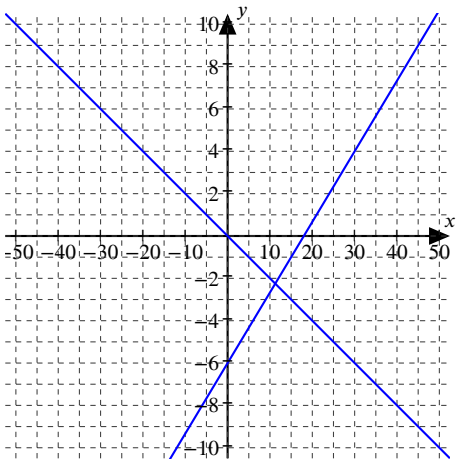






e) Donner une équation pour chaque droite représentée ci-dessous





ex. 1.29 à 1.30

Pour trouver les coordonnées exactes du **point d'intersection de deux droites**, on doit résoudre un système d'équation.

Exemples :

a) Résoudre ce système par **combinaison linéaire**.

$$\begin{cases} x + 2y &= 6 \\ 2x - 7y &= 34 \end{cases}$$

b) Résoudre ce système par **substitution**.

$$\begin{cases} x + 2y &= 6 \\ 2x - 7y &= 34 \end{cases}$$

ex. 1.31 à 1.32

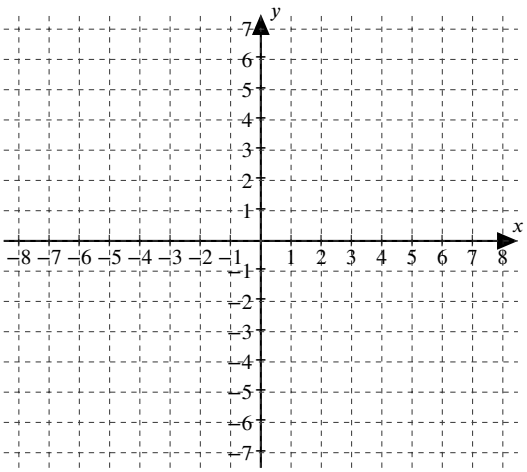
À chaque équation d'un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues correspond une droite.

Lorsque le système est **déterminé**, il a une unique solution, elle donne les coordonnées du point d'intersection de ces 2 droites.

Exemple :

Résoudre graphiquement et algébriquement le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$



Lorsque le système est **impossible**,

il n'a pas de solution, les 2 droites sont parallèles.

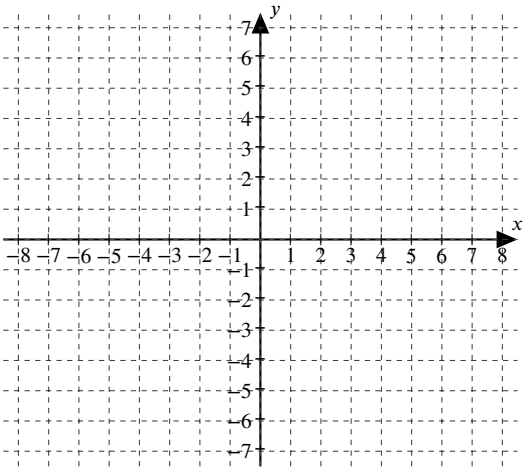
Lorsque le système est **indéterminé**,

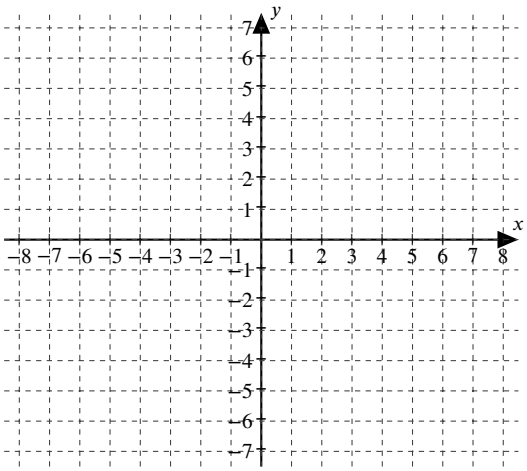
les 2 droites sont confondues et tout point de cette droite est une solution du système.

Exemples : Résoudre graphiquement et algébriquement.

$$\begin{cases} y = \frac{3}{7}x - 2 \\ 3x = 7y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y - 1 = 0 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$





ex. 1.33 à 1.35

1.7 Application économique : analyse de rentabilité

Fabriquer un produit a un coût, composé souvent de frais variables, qui dépendent de la quantité produite, et de charges fixes. On notera le **coût de production** $C(x)$, où x peut être, par exemple, le nombre de produits fabriqués ou le nombre de jours de travail.

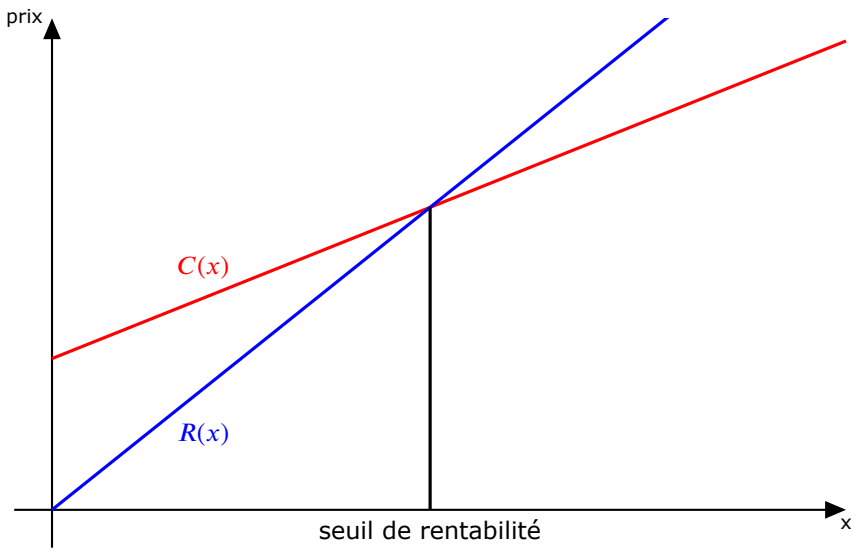
Vendre un produit rapporte de l'argent, que l'on appelle le **chiffre d'affaires** ou **revenu**. Ce chiffre d'affaires dépend de la quantité vendue. On le notera $R(x)$. On suppose ici que le prix de vente est fixe.

Pour qu'un produit devienne *rentable*, il faut que le coût de production soit inférieur au chiffre d'affaires.

Le **seuil de rentabilité** (appelé aussi *point mort*) est le seuil à partir duquel le produit devient rentable. En dessous, on fait un *déficit*, en dessus, on fait un *bénéfice*.

Pour calculer le seuil de rentabilité, on est amené à résoudre l'équation :

$$\boxed{C(x) = R(x)}$$



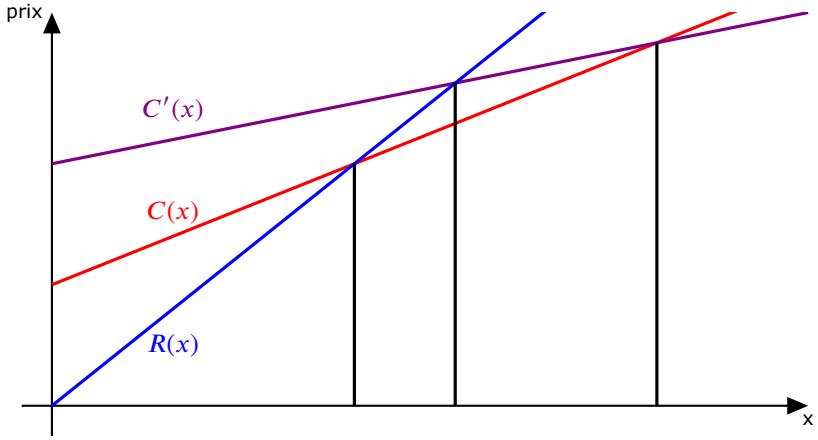
Exemple : Je loue un emplacement au marché à CHF $250.-$ par jour pour y vendre des colliers. Ils me coûtent CHF $15.-$ pièce à fabriquer et je les revends à CHF $50.-$.

Déterminer le nombre de colliers que je dois vendre en un jour pour atteindre le seuil de rentabilité.

Il arrive parfois qu'on ait le choix entre deux manières de produire, qui ont des coûts différents, $C(x)$ et $C'(x)$. Il faut alors les comparer pour analyser laquelle est la plus rentable.

On est alors amené à résoudre l'équation :

$$\boxed{C(x) = C'(x)}$$



Exemple : Un vendeur de roses a des coûts fixes de CHF $20.-$ par jour. Il achète ses fleurs chez « Biofleurs » à CHF $2.-$ pièce et les revend à CHF $6.-$.

Un autre fournisseur « Florabella » lui propose des roses à CHF $1.-$ pièce, mais fait payer la livraison journalière CHF $40.-$.

a) Représenter graphiquement les fonctions $C(x)$, $C'(x)$ et $R(x)$ pour cette situation.

b) Déterminer, graphiquement et algébriquement, le nombre de roses qu'il faut vendre pour atteindre le seuil de rentabilité dans les 2 cas, ainsi que celui à partir duquel « Florabella » devient plus rentable que « Biofleurs ».

c) Analyser la rentabilité de ces 2 propositions en indiquant le fournisseur le plus avantageux en fonction du nombre de roses.

nb de roses	« Biofleurs »	« Florabella »
de 0 à …		

ex. 1.36 à 1.40

1.8 Application économique : loi de l'offre et de la demande

La **loi de l'offre et la demande** est un modèle destiné à expliquer la formation des prix d'un produit, de la main-d'œuvre ou d'un bien lors des tractations entre vendeurs et acheteurs, dans un marché en situation de **concurrence parfaite** (ou *situation de monopole*).

L'offre, $O(p)$, est la quantité du produit qui sera proposée à la vente par l'ensemble des vendeurs, en fonction du prix p de ce produit.

La **demande**, $D(p)$, est la quantité du produit que l'ensemble des acheteurs voudront acquérir s'il coûte le prix p.

La loi de l'offre et la demande ne s'applique que si l'on part des hypothèses suivantes :

1) L'offre et la demande ne dépendent que de p, le prix du produit.

2) Plus le prix est élevé, plus le nombre de personnes intéressées à vendre est grand. $O(p)$ est donc une fonction croissante.

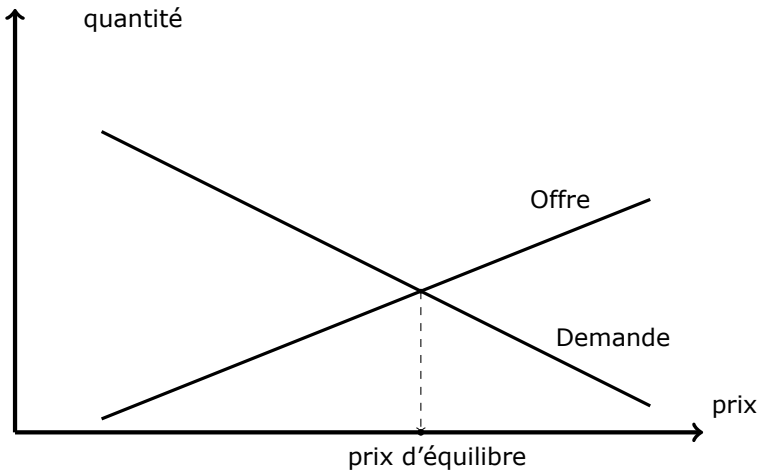
3) Au contraire, plus le prix est élevé, moins il y a d'acheteurs intéressés. $D(p)$ est donc une fonction décroissante.

4) Si la demande est plus grande que l'offre, le prix va augmenter. Si l'offre est plus grande que la demande, le prix va baisser. Le prix va donc fluctuer jusqu'à atteindre le prix d'équilibre.

Le **prix d'équilibre** est la solution de l'équation :

$$\boxed{D(p) = O(p)}$$

Nous nous limiterons aux cas où ces deux fonctions sont affines.



Exemple :

Sur un marché, on a mesuré l'offre et la demande d'un produit en fonction du prix de ce dernier :

Prix (en milliers de frs)	Quantité demandée (en tonnes)	Quantité offerte (en tonnes)
1,5	8	20
1	16	10

On suppose que l'offre et la demande sont des fonctions affines du prix.

a) Représenter graphiquement ces fonctions.

b) Déterminer algébriquement le prix d'équilibre et la quantité échangée à l'équilibre.

ex. 1.41 à 1.45

2 Fonctions quadratiques

2.1 Définition

Une **fonction quadratique** est une fonction polynomiale du $2^{\text{ème}}$ degré.

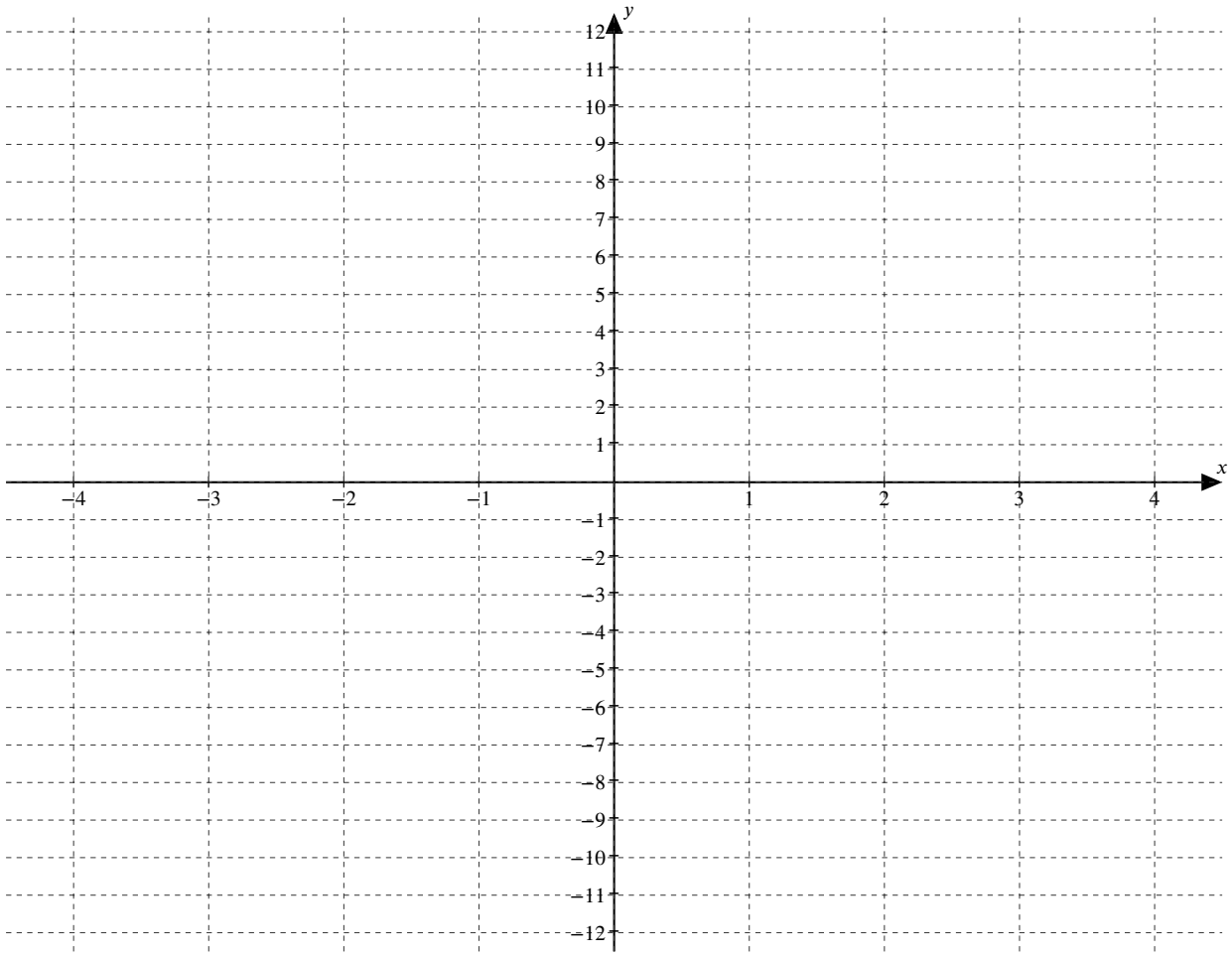
Son expression peut se ramener à une expression du type :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels avec } a \neq 0.$$

Exemples :

Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions f et g.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2 + 3x$									
$g(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 2$									



ex. 2.1 à 2.3

2.2 Graphe et points caractéristiques

Le graphe de la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une **parabole**.

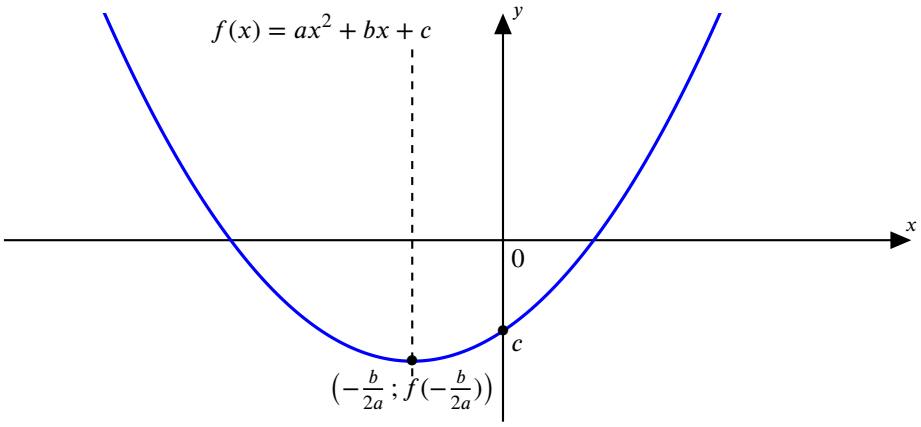
Son **ordonnée à l'origine** est le coefficient c.

La parabole a un **sommet**, noté S, et un **axe de symétrie vertical** qui passe par ce sommet.

La première coordonnée du sommet peut se calculer grâce aux coefficients de l'expression de la fonction :

$$\boxed{x_S = -\frac{b}{2a}}$$

Pour trouver la deuxième coordonnée, il suffit de remplacer x par la valeur de x_S dans l'expression de la fonction.

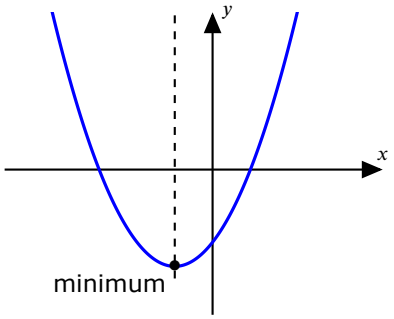


Exemple : Déterminer l'ordonnée à l'origine et calculer les coordonnées du sommet S de la parabole d'équation $y = x^2 + 3x$, puis vérifier sur le graphe du paragraphe 2.1.

Si $\boxed{a > 0}$:

La parabole « sourit », elle est **convexe**.

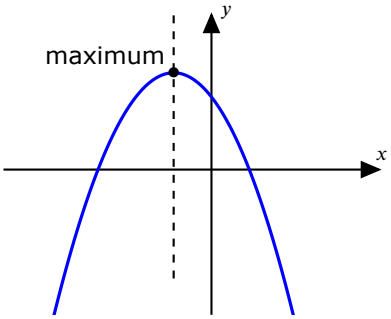
Le sommet est alors un **minimum**.



Si $\boxed{a < 0}$:

la parabole « est triste », elle est **concave**.

Le sommet est alors un **maximum**.



Exemple : Soit $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$.

a) Calculer les coordonnées de son sommet. Indiquer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

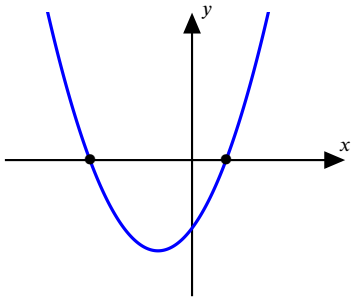
b) Déterminer son ordonnée à l'origine.

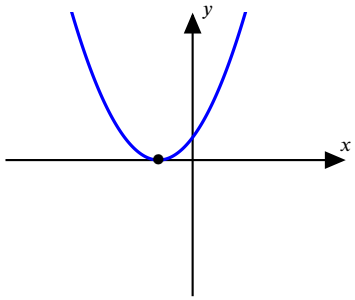
c) Vérifier sur le graphe du paragraphe 2.1.

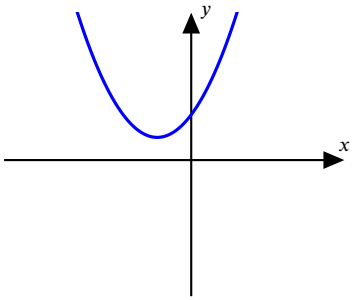
Une parabole peut couper l'axe Ox en 0, 1 ou 2 points, qui correspondent aux **zéros** de la fonction.

On peut les trouver en résolvant l'équation $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$.

Si $\Delta > 0$:	Si $\Delta = 0$:	Si $\Delta < 0$:
L'équation a 2 solutions.	L'équation a 1 solution.	L'équation n'a pas de solution.
La fonction a 2 zéros.	La fonction a 1 zéro.	La fonction n'a pas de zéro.
La parabole coupe l'axe Ox en 2 points.	La parabole est tangente à l'axe Ox.	La parabole ne coupe pas l'axe Ox.







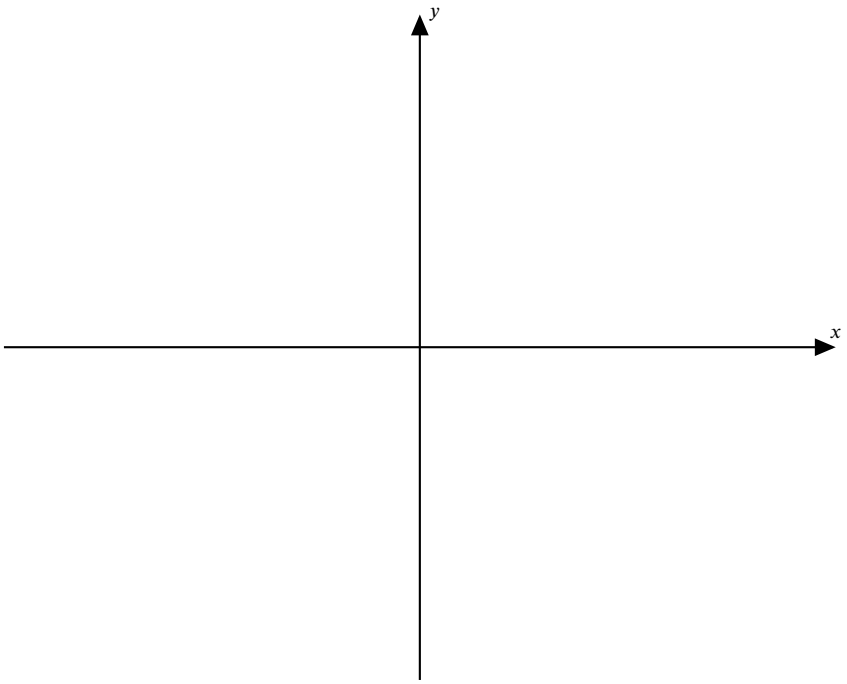
Exemple : Soit $f(x) = -4x^2 + 4x + 15$ et $g(x) = x^2 - 2x + 5$.

a) Calculer les coordonnées de chaque sommet. Indiquer s'il s'agit de maximum ou de minimum.

b) Déterminer l'ordonnée à l'origine de chacune de ces fonctions.

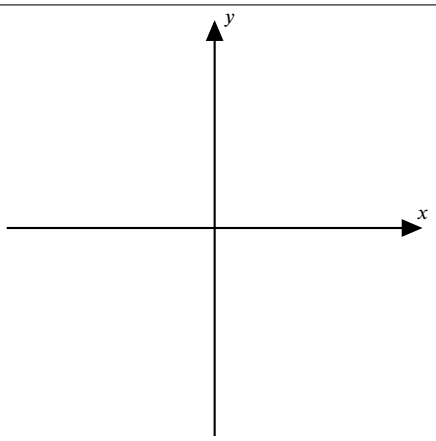
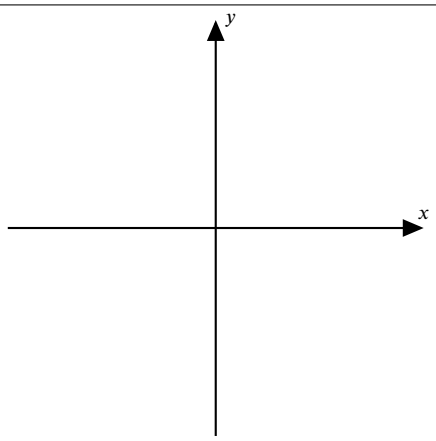
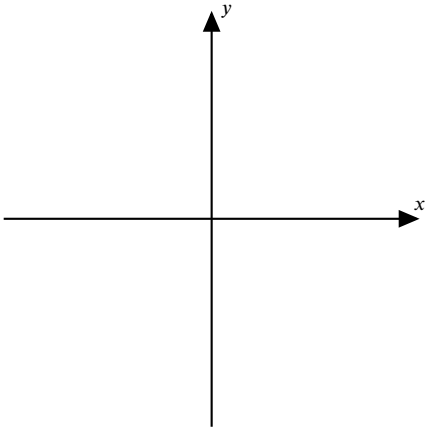
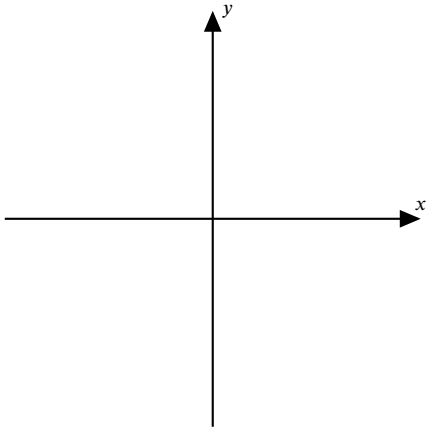
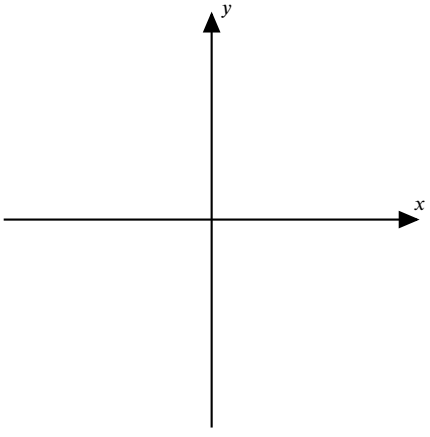
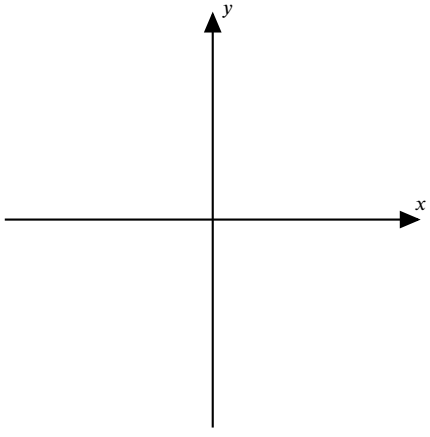
c) Calculer les éventuels zéros de f et de g.

d) Esquisser le graphe de chaque fonction en indiquant tous les points particuliers.



Résumé

Dans chaque case, esquisser le graphe.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

ex. 2.4

2.3 Intersections

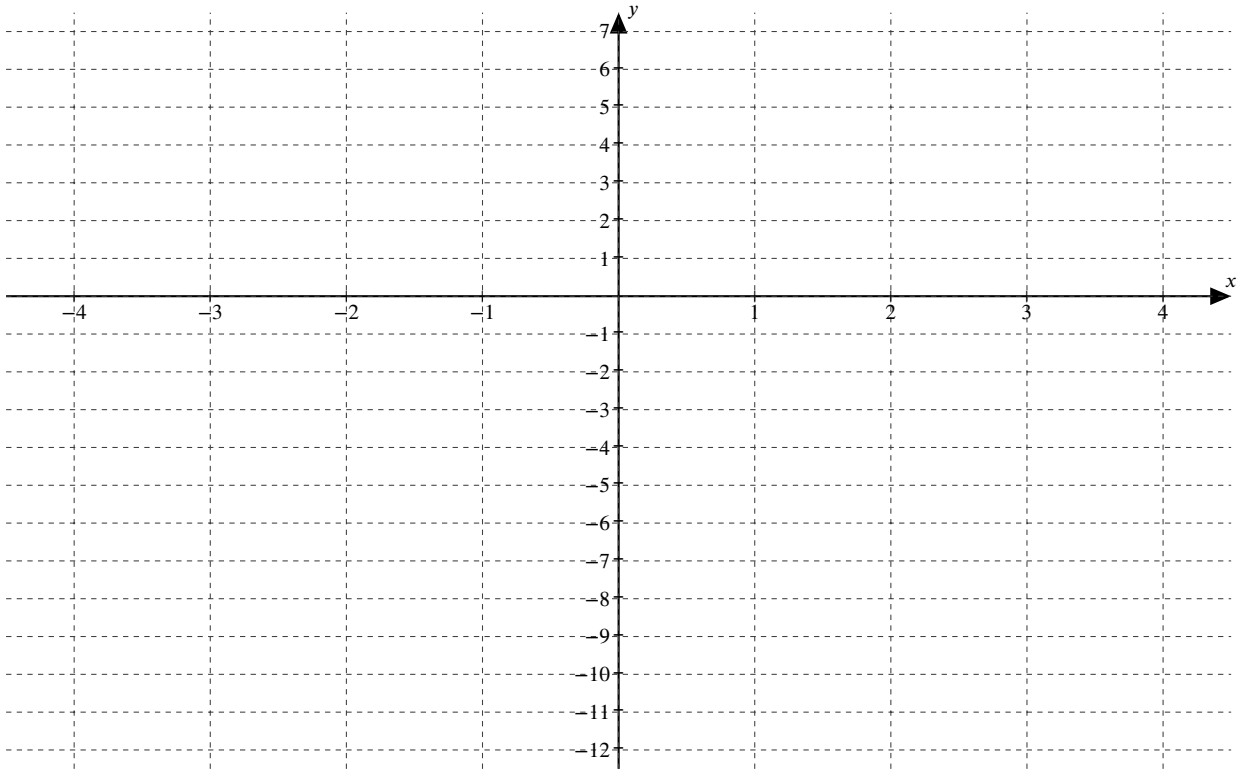
Pour trouver la première coordonnée des éventuels points d'intersection du graphe de f et du graphe de g, il faut résoudre l'équation :

$$\boxed{f(x) = g(x)}$$

Pour trouver la deuxième, on calcule l'image des valeurs obtenues.

Exemple : Soit $f(x) = -x^2 + 5$ et $g(x) = -\frac{3}{2}x - 5$.

Calculer les coordonnées exactes des points d'intersections du graphe de f et du graphe de g, puis représenter graphiquement ces fonctions.



ex. 2.5 à 2.6

2.4 Application économique : formation de prix en situation de monopole

Une entreprise est en **situation de monopole** pour un produit lorsqu'elle est la seule à vendre ce produit et peut donc en choisir le prix librement, sans recourir à la loi de l'offre et la demande.

Nous partons des hypothèses suivantes :

1) La **demande** dépend uniquement du **prix de vente** p, choisi par le vendeur. Plus celui-ci est élevé, moins il y a d'acheteurs intéressés. $D(p)$ est donc une fonction décroissante. Nous nous limiterons aux cas où elle est affine.

2) Les **coûts de production** $C(x)$ sont une fonction affine croissante de la quantité produite x.

3) Le vendeur produit et vend exactement la quantité demandée, donc $x = D(p)$.

4) Le vendeur choisit le prix p de manière à maximiser son bénéfice $B(p)$.

Exemple : La compagnie TOAST fabrique des grille-pains.

Les résultats d'une étude sur la demande montrent que si les grille-pains coûtent CHF $10.-$, elle en vendra 7200, tandis qu'en fixant le prix à CHF $20.-$, elle n'en écoulera que 4200.

Les coûts de production s'élèvent à CHF $14'400.-$ de frais fixes et CHF $8.-$ par grille-pain produit.

a) Déterminer l'expression de la fonction $D(p)$.

b) A partir de quel prix la demande est-elle nulle ?

c) Compléter ce tableau pour un prix de CHF $30.-$ par grille-pain.

prix d'un grille-pain en CHF	30
nombre de grille-pains produits et vendus	
revenu en CHF	
coûts de production en CHF	
bénéfice en CHF	

d) Compléter ce tableau pour un prix de p CHF par grille-pain.

prix d'un grille-pain en CHF	p
nombre de grille-pains produits et vendus en fonction de p	
revenu en CHF en fonction de p	
coûts de production en CHF en fonction de p	
bénéfice en CHF en fonction de p	

e) Quel prix faut-il choisir pour avoir le **revenu le plus élevé possible** ?

Compléter le tableau pour ce prix.

prix d'un grille-pain en CHF	
nombre de grille-pains produits et vendus	
revenu en CHF	
coûts de production en CHF	
bénéfice en CHF	

f) Quel prix faut-il choisir pour avoir le **bénéfice le plus élevé possible** ?

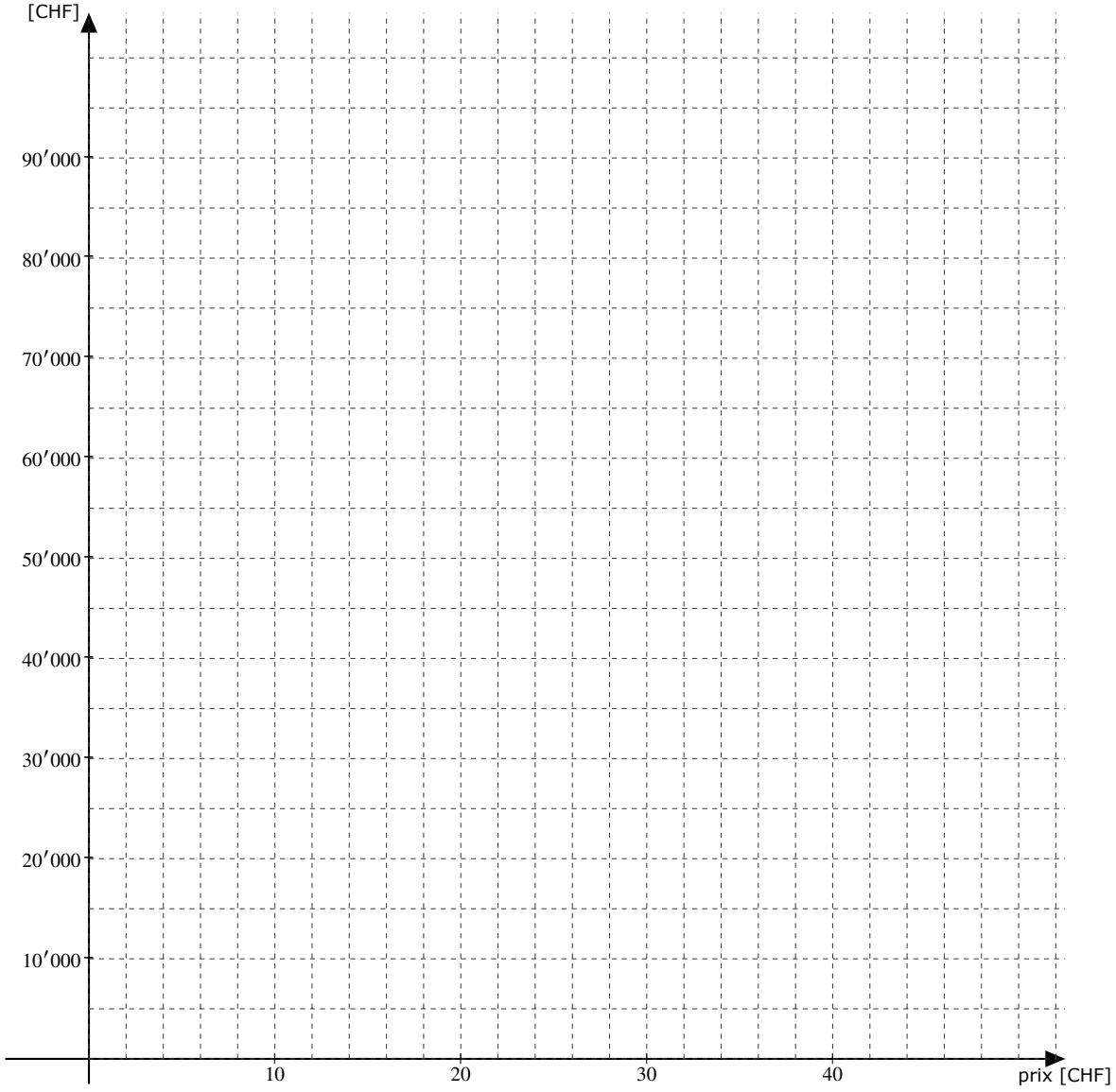
Compléter le tableau pour ce prix.

prix d'un grille-pain en CHF	
nombre de grille-pains produits et vendus	
revenu en CHF	
coûts de production en CHF	
bénéfice en CHF	

g) Comparer les questions précédentes. Que va choisir le vendeur ?

h) Pour quels prix le bénéfice est-il nul ? Calculer $C(p)$ et $R(p)$ pour ces prix.

i) Représenter les graphes des fonctions $C(p)$, $R(p)$ et $B(p)$ sur le graphique ci-dessous, en utilisant les valeurs calculées dans les questions précédentes.



j) Mettre en évidence **l'intervalle de rentabilité** sur le graphique.

Résumé

Cet exemple nous permet de mettre évidence les éléments suivants :

- Le **revenu** pour un prix p se calcule de la manière suivante :

$$\boxed{R(p) = p \cdot D(p)}$$

C'est une fonction quadratique concave, qui a donc un maximum.

- Les **coûts de production** $C(x)$ dépendent de la quantité produite x, qui elle-même dépend du prix choisi car $x = D(p)$.

On peut donc exprimer les coûts de production en fonction du prix, en effectuant la substitution $x = D(p)$ dans $C(x)$. On obtient alors $C(p)$, qui est une fonction affine décroissante.

Attention, les coûts ne peuvent pas descendre plus bas que les charges fixes. Lorsqu'on atteint p tel que $D(p) = 0$, la fonction des coûts « se change » en fonction constante.

- Le **bénéfice** $B(p)$ se calcule de la manière suivante :

$$\boxed{B(p) = R(p) - C(p)}$$

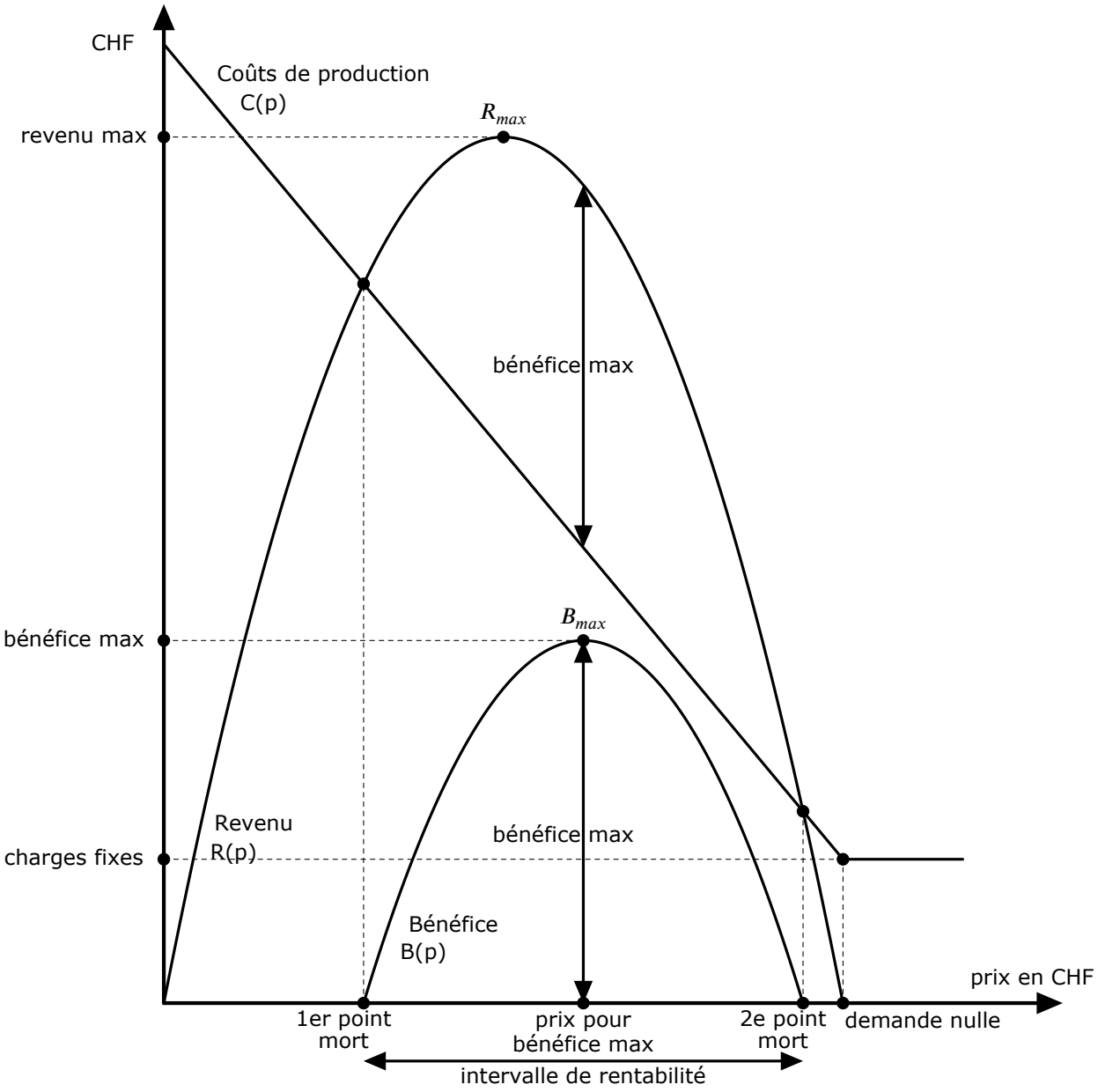
C'est une fonction quadratique concave, qui a donc un maximum.

- Le vendeur cherche à **maximiser son bénéfice** et non son revenu. C'est donc le maximum de $B(p)$ qui l'intéresse.

- L'équation $\boxed{C(p) = R(p)}$ est une équation du seconde degré, qui permet de déterminer les premières coordonnées des deux points d'intersection des graphes de $C(p)$ et de $R(p)$, quand ils existent. L'équation $\boxed{B(p) = 0}$ permet aussi de les trouver.

L'intervalle situé entre ces deux valeurs est appelé **intervalle de rentabilité**. Les prix choisis dans cet intervalle permettent à l'entreprise de faire du bénéfice.

Situation graphique



- Prix de vente : p
- Nombre de produits vendus = demande = $D(p)$
- Coût de production = charges fixes + charges variables $\cdot$ $D(p)$ si $D(p) \geqslant 0$
- Revenu : $R(p) = p \cdot D(p)$
- Bénéfice : $B(p) = R(p) - C(p)$
- Seuils de rentabilité : résoudre $C(p) = R(p)$ ou $B(p) = 0$

ex. 2.7 à 2.15

3 Factorisation

3.1 Rappel - Factorisation du degré 2

Factoriser un polynôme, c'est le transformer en un produit de deux ou plusieurs polynômes, appelés **facteurs** :

$$10x^2 + 70x + 100 \quad \Rightarrow \quad 10(x+2)(x+5)$$

Lorsque l'on veut factoriser un polynôme, on commence par essayer la **mise en évidence** :

$$-88x^5 - 33x^3 \quad \Longleftrightarrow \quad -11x^3(8x^2+3)$$

La parenthèse obtenue doit, lorsque c'est possible, être encore factorisée.

Pour les **polynômes de degré 2**, les différentes méthodes sont :

- Repérer un **identité remarquable** :

$$\boxed{\begin{array}{l} A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2 \\ A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2 \\ A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) \end{array}}$$

- Décomposer un **trinôme unitaire de degré 2** :

$$\boxed{x^2 + (a+b)x + a \cdot b = (x+a)(x+b)}$$

- Utiliser la **formule du discriminant** :

  Si $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$ alors $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)}$

  où $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

  Si $\Delta < 0$, le polynôme n'est pas factorisable.

Exemples : Factoriser par la méthode la plus efficace.

a) $x^3 - 7x^2 + 10x$

b) $-28x^6 + 63x^4$

c) $3x^2 - 10x + \frac{25}{3}$

d) $x^4 + 8x^3 + 20x^2$

e) $3x^2 - x - 2$

f) $100x^2 - 130x - 30$

ex. 3.1 à 3.4

3.2 Produits remarquables du 3e degré

Tout comme pour le 2e degré, il existe des **produits remarquables** pour le 3e degré :

$$\boxed{\begin{aligned} A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 &= (A+B)^3 \\ A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 &= (A-B)^3 \\ A^3 + B^3 &= (A+B)\left(A^2 - AB + B^2\right) \\ A^3 - B^3 &= (A-B)\left(A^2 + AB + B^2\right) \end{aligned}}$$

On peut les utiliser "dans les deux sens", pour factoriser ou pour effectuer et réduire :

Exemples :

a) Effectuer et réduire $(2x+1)^3$

b) Effectuer et réduire $(3x-2)^3$

c) Factoriser $x^3 - 64$

d) Factoriser $1000x^3 + 27$

e) Factoriser $8x^3 - 35x^2 + 54x - 27$

ex. 3.6 à 3.8

3.3 Changement de variable

Effectuer, réduire et comparer :

a) $(x^2+5)(x^2+2)$

b) $(y+5)(y+2)$

Dans certains cas, le polynôme à factoriser ressemble à un polynôme que l'on sait factoriser mais ses puissances ont été doublées.

Exemple : x^4-8x^2+12

Pour le factoriser, on effectue un **changement de variable** : On pose que $y=x^2$ et donc que $y^2=x^4$.

Exemple : Factoriser x^4-18x^2+81.

ex. 3.9 à 3.11

Effectuer, réduire et comparer :

a) $(2x^3+1)(x^3-5)$

b) $(2y+1)(y-5)$

Un changement de variable peut donc aussi s'utiliser si les puissances ont été multipliées par un autre entier que 2.

Exemples :

a) x^6-9x^3+8

b) $8x^6-63x^3-8$

ex. 3.12

3.4 Méthode du groupement

La **méthode du groupement** est une mise en évidence un peu plus complexe que celles effectuées jusque-là. Nous l'utiliserons avec des polynômes à 4 termes.

Effectuer les multiplications ci-dessous et observer les résultats obtenus :

a) $(3x^2 + 7)(2x + 11) =$

b) $(x^2 - 5)(2x + 11) =$

Exemples : Factoriser les polynômes ci-dessous :

a) $11x^3 - 3x^2 - 44x + 12$

b) $x^4 + 7x^3 + 8x + 56$

Exemple : Résoudre $2x^4 + 3x^3 + 2000x + 3000 = 0$

ex. 3.13 à 3.15

3.5 Division Euclidienne

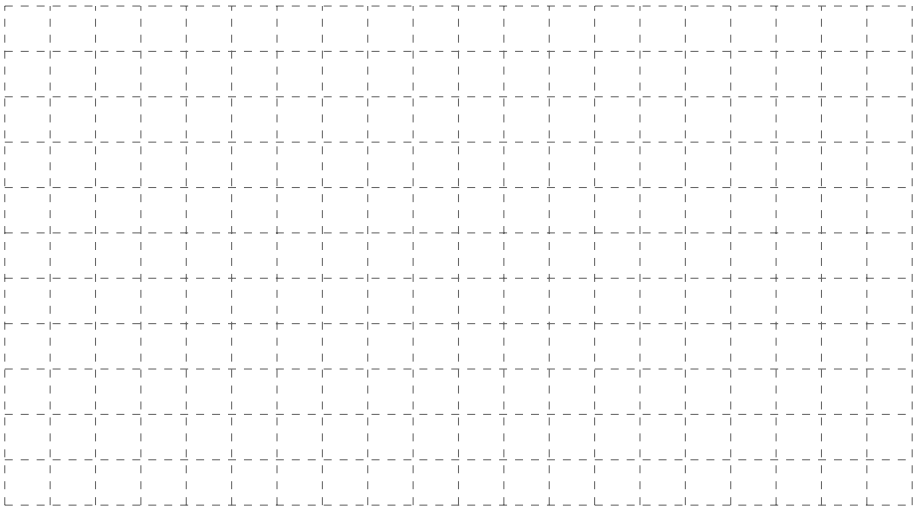
Pour factoriser, il faut parfois diviser.

Exemple : Écrire 5999 sous forme d'une multiplication, sachant qu'il est divisible par 7.

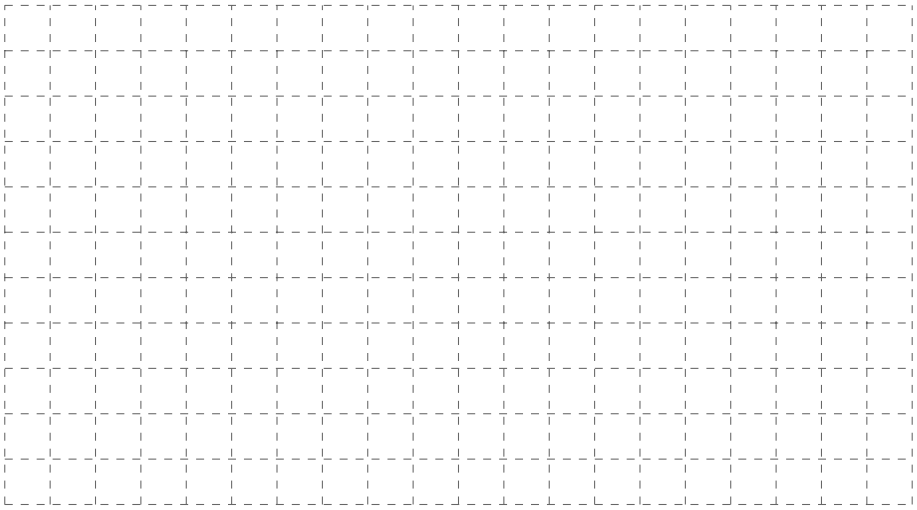
Pour les polynômes, nous allons procéder de la même manière et pour cela il nous faut apprendre à diviser des polynômes. La méthode est très similaire à la division en colonne pour les nombres.

Effectuer $9737 : 5$ en colonne, avec reste et expliquer les étapes de la méthode.

Écrire l'égalité fondamentale.



Nous allons maintenant diviser $6x^3 - 32x^2 + 3x + 24$ par $x - 5$.



Égalité fondamentale :

Placer les mots **dividende**, **diviseur**, **quotient** et **reste** aux bons endroits dans ces deux divisions.

ex. 3.16

Exemples : Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x) = 6x^6 - 7x^4 + 8x - 40$ et $G(x) = 2x^2 - 5$

b) $F(x) = 4x^3 - 28x + 24$ et $G(x) = x^2 + 2x - 3$

ex. 3.17 à 3.19

3.6 Utilisation de la division euclidienne pour factoriser

En observant le dernier exemple de la page précédente, on peut remarquer que l'écriture de l'égalité fondamentale est une manière de factoriser lorsque le reste est nul.

Exemple : $F(x) = 4x^3 - 28x + 24 =$

Lorsque le résultat de la division de $F(x)$ par $G(x)$ est égal à zéro, on dit que $F(x)$ est **divisible** par $G(x)$. $G(x)$ est alors un **diviseur** de $F(x)$.

Exemple : $F(x) = 4x^3 - 28x + 24$ est divisible par $G(x) = x^2 + 2x - 3$.
$G(x) = x^2 + 2x - 3$ est un diviseur de $F(x) = 4x^3 - 28x + 24$.

Mais comment peut-on trouver un diviseur pour un polynôme $F(x)$ donné ?

Observons un exemple de polynôme factorisé :

Exemple : $F(x) = (x - 10)(2x + 1)(x + 3)$

a) Réduire $F(x)$.

b) Comparer le terme de degré zéro avec la forme factorisée de $F(x)$. Que pouvez-vous en dire ? Pouvez-vous l'expliquer ?

c) Calculer $F(10)$ à l'aide du polynôme factorisé, puis du polynôme réduit. Que pouvez-vous en dire ? Pouvez-vous l'expliquer ?

Critère de divisibilité par $x-a$:

Soit un polynôme $F(x)$ et un nombre réel a.

$F(x)$ est divisible par $x-a$ si et seulement si $F(a)=0$

Preuve :

Si $F(x)$ est divisible par $x-a$ ⇒ Le reste de la division de $F(x)$ par $x-a$ est nul.
⇒ $F(x)=(x-a)Q(x)$ pour $Q(x)$ le quotient de la division de $F(x)$ par $x-a$
⇒ $F(a)=(a-a)Q(a)=0$

Si $F(a)=0$
On appelle $Q(x)$ le quotient de la division de $F(x)$ par $x-a$ et R le reste de cette division.
(R est de degré 0 car on a divisé par un polynôme de degré 1. C'est donc un nombre.)
On a l'égalité fondamentale : $F(x)=(x-a)Q(x)+R$
$F(a)=(a-a)Q(a)+R=R$ et $F(a)=0$ ⇒ $R=0$ ⇒ $F(x)$ est divisible par $x-a$

#

Exemple :

a) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessous, les polynômes divisibles par $x-10$.

$A(x)=x^3+7x^2+6x-8$ $C(x)=2x^3-7x^2-200x+400$

$B(x)=x^{300}-5x^{23}+3x+1$ $D(x)=x^3-9x^2-16x+60$

b) Pour celui ou ceux qui sont divisibles par $x-10$, effectuer la division, écrire l'égalité fondamentale et finir la factorisation.

ex. 3.20 à 3.23

Factorisation de $F(x)$ grâce à la division :

1) Tester les diviseurs positifs et négatifs du terme de degré 0 de $F(x)$ jusqu'à avoir trouvé un nombre a tel que $F(a) = 0$.

2) Effectuer la division de $F(x)$ par $x - a$. Son reste doit être nul.

3) Écrire l'égalité fondamentale de cette division. La première étape de factorisation est faite.

4) Si cela est possible, continuer la factorisation à l'aide de la même méthode ou d'une autre méthode connue.

Exemples : Factoriser.

a) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

b) $6x^4 - 19x^3 + 13x^2 + 4x - 4$

ex. 3.24

Exemples : Résoudre par factorisation.

a) $6x^4 + 43x^3 + 6x^2 - 7x = 0$

b) $x^3 + 7x^2 + 11x = -5$

ex. 3.25 à 3.27

4 Fractions rationnelles

4.1 Généralités

On appelle **fraction rationnelle** une fraction dont le dénominateur et le numérateur sont des polynômes.

Exemples : $\frac{x-3}{x+2}$ $\frac{3}{x^2-4}$ $\frac{3x}{(x+1)^2}$

On appelle **fonction rationnelle** une fonction dont l'expression peut se ramener à une fraction rationnelle.

Exemples : $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$ $g(x)=\frac{3}{x^2-4}$ $h(x)=\frac{3x}{(x+1)^2}$

a) Compléter les tableaux de valeurs pour ces trois fonctions :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)=\frac{x-3}{x+2}$									

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)=\frac{3}{x^2-4}$									

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$h(x)=\frac{3x}{(x+1)^2}$									

b) Quelles sont les valeurs de x qui posent problème pour ces fonctions ? Les comparer avec l'expression de la fonction.

On appelle **ensemble de définition** d'une fonction l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe. On le note D_f ou ED_f.

Pour une fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$, les problèmes viennent des divisions par zéro. On a donc :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \mid D(x) = 0\}$$

Nous appellerons **valeurs interdites** les zéros du dénominateur $D(x)$.

Exemples : Déterminer les ensembles de définition de :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 7x}$

b) $g(x) = \dfrac{8x + 1}{x^3 + 4x^2 - 3x - 12}$

ex. 4.1

4.2 Simplification

Rappel : Simplifier les fractions ci-dessous :

a) $\frac{130}{39}$ b) $\frac{68}{85}$

Pour simplifier une fraction, il faut donc commencer par factoriser le numérateur et le dénominateur.

Exemples : Simplifier les fractions ci-dessous :

a) $\frac{x^3 - 4x}{x^5 - 8x^2}$

b) $\frac{6 - x}{x^2 - 7x + 6}$

Observations : Compléter les tableaux de valeurs ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x) = \frac{x-3}{x+2}$							

Comparer les tableaux de valeurs ci-dessus.

Mise en garde : L'ensemble de définition doit être déterminé avant de simplifier la fraction.

ex. 4.2 à 4.3

4.3 Opérations de base

Rappel : Multiplier les fractions ci-dessous :

a) $\frac{7}{55} \cdot \frac{33}{39}$

b) $21 \cdot \frac{31}{35}$

Pour **multiplier** des fractions, il faut :

- multiplier les numérateurs entre eux (sans effectuer les calculs) ;
- multiplier les dénominateurs entre eux (sans effectuer les calculs) ;
- factoriser les numérateurs et les dénominateurs pour simplifier.

Exemples : Effectuer les multiplications ci-dessous (réponse sous forme factorisée) :

a) $\frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{x^2-x-6}{x+5}$

b) $\frac{x^4-16}{x^2+2x} \cdot \frac{x^3}{x^2-4x+4}$

ex. 4.4

Rappel : Diviser les fractions ci-dessous :

a) $\frac{22}{49} : \frac{33}{35}$

b) $\frac{77}{30} : \frac{14}{12}$

Pour **diviser** des fractions, il faut :

- transformer la division en une multiplication par l'inverse de la 2e fraction ;
- multiplier en simplifiant si possible.

Exemples : Effectuer les divisions ci-dessous :

a) $\frac{x}{x+2} : \frac{x^2+2x}{x+5}$

b) $35 : \frac{5x+15}{x-10}$

ex. 4.5

Rappel : Additionner les fractions ci-dessous :

a) $\frac{18}{35}+\frac{11}{14}$

b) $4+\frac{9}{11}$

Pour **additionner** des fractions, il faut :

- factoriser le dénominateur ;
- déterminer le plus petit multiple commun des dénominateurs ;
- amplifier les deux fractions pour avoir le dénominateur choisi ;
- additionner les numérateurs obtenus ;
- vérifier si l'on peut simplifier la fraction finale.

Exemples : Effectuer les additions ci-dessous :

a) $\frac{x-3}{x^2+3x+2}+\frac{6}{x^2+4x+4}$

b) $\frac{x+6}{x+1}+\frac{x}{x^2+x}+2$

ex. 4.6

On procède de manière similaire pour les **soustractions**.

Exemples : Effectuer les soustractions ci-dessous :

a) $\dfrac{x-1}{x^2-6x+9} - \dfrac{2}{x^2-9}$

b) $2 - \dfrac{2x^2-32}{x^2-x-12}$

c) $\dfrac{1}{(x-10)^2} - \dfrac{1}{(x-10)^3}$

ex. 4.7 à 4.9

4.4 Résolution d'équations rationnelles

On appelle **équation rationnelle** une équation qui peut se ramener à $\frac{N(x)}{D(x)} = 0$ où $N(x)$ et $D(x)$ sont deux polynômes réduits. Nous appellerons *forme canonique* cette forme de l'équation.

Exemples : Écrire les équations ci-dessous sous forme canonique.

a) $\frac{x+3}{x-2} = 3$

b) $\frac{7x-1}{x^2+4x} = \frac{5}{x}$

Observations : Compléter le tableau de valeur de cette fonction :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2-x}$							

Quelles sont les solutions des équations $\frac{x^2+3x}{x^2-x} = 0$ et $x^2+3x = 0$?

Mise en garde : Une valeur interdite de l'équation de départ ne peut pas être une solution. Il faut donc chercher l'ensemble de définition avant de résoudre l'équation.

Pour **résoudre une équation rationnelle**, il faut :

- trouver son ensemble de définition,
- la mettre sous forme canonique,
- trouver les zéros du numérateur,
- vérifier que ce ne sont pas des valeurs interdites.

Exemples : Résoudre

a) $\dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{8x+10}{3x^2+6x}$

b) $\dfrac{x}{x+3} = \dfrac{-4x-9}{x^2+5x+6}$

ex. 4.10 à 4.15

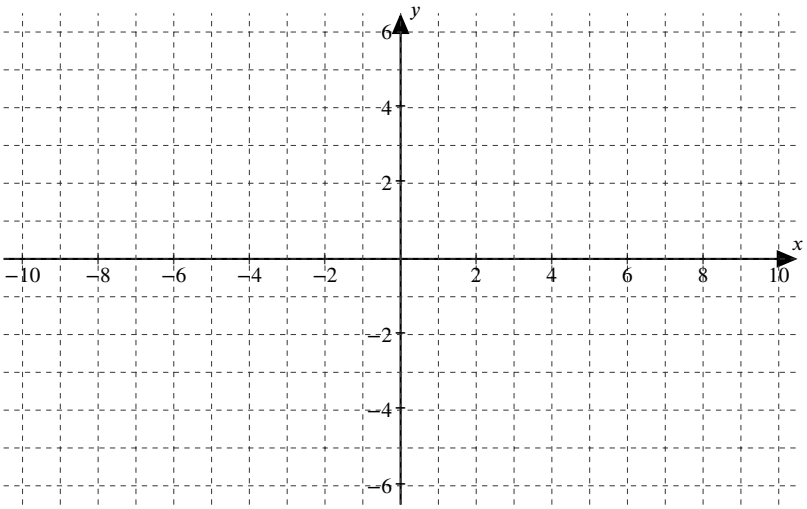
5 Exercices

5.1 Exercices - Droites et fonctions affines

Rappels

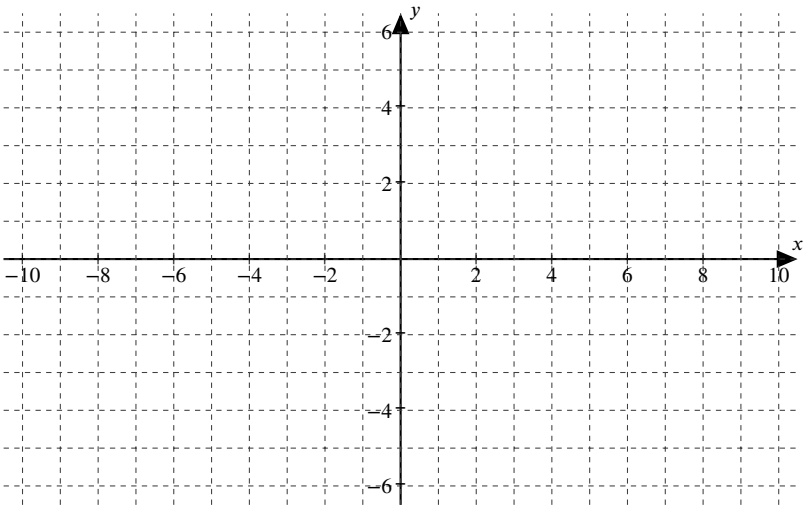
Exercice 1.1 Sans faire de calcul, tracer le graphe de ces fonctions affines.

a) $a(x) = 3x + 2$
b) $b(x) = -3x + 2$
c) $c(x) = -x + 2$
d) $d(x) = -x + 5$
e) $e(x) = x$
f) $f(x) = -x$



Exercice 1.2 Représenter le graphe de ces fonctions affines.

a) $a(x) = \frac{2}{3}x - 4$
b) $b(x) = -\frac{3}{4}x$
c) $c(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$
d) $d(x) = \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}$
e) $e(x) = -\frac{5}{9}x + 4$
f) $f(x) = 4$



Exercice 1.3 Déterminer, dans chaque cas, l'équation de la droite décrite.

a) de pente $m = -3$ et qui passe par le point $A(7\ ;\ 28)$

b) de pente $m = \frac{5}{3}$ et qui passe par le point $A\left(-4\ ;\ \frac{9}{2}\right)$

c) qui passe par les points $A(5\ ;\ 7)$ et $B(9\ ;\ 15)$

d) d'ordonnée à l'origine $h = 23$ et qui passe par le point $A(-3\ ;\ 11)$

Exercice 1.4 Au temps $t = 0$, le fond d'un sablier est vide et le haut du sablier contient 30 g de sable.

a) Exprimer la masse de sable dans le bas du sablier en fonction du temps, sachant qu'il s'écoule à raison de 7 grammes par minute.

b) Au bout de combien de temps y aura-t-il 18 grammes de sable dans le bas du sablier ?

Exercice 1.5 Une baignoire contient 165 litres d'eau. On enlève le bouchon et elle se vide avec un débit de 30 litres par minute.

a) Exprimer la quantité d'eau restant dans la baignoire en fonction du temps.

b) Après combien de temps la baignoire sera-t-elle vide ?

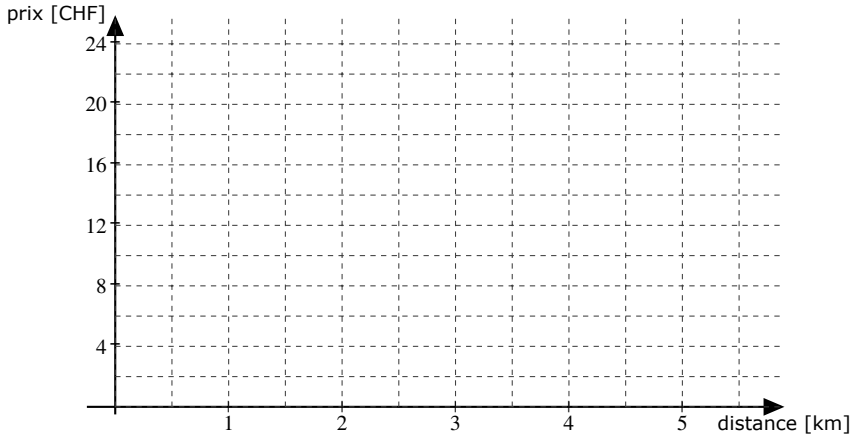
Exercice 1.6 Le tarif d'une course en taxi se compose d'une taxe forfaitaire de prise en charge et d'une taxe par kilomètre parcouru. Une compagnie de taxi propose trois tarifs différents :

Tarif bleu : prise en charge : 2 francs
taxe kilométrique : 6 francs

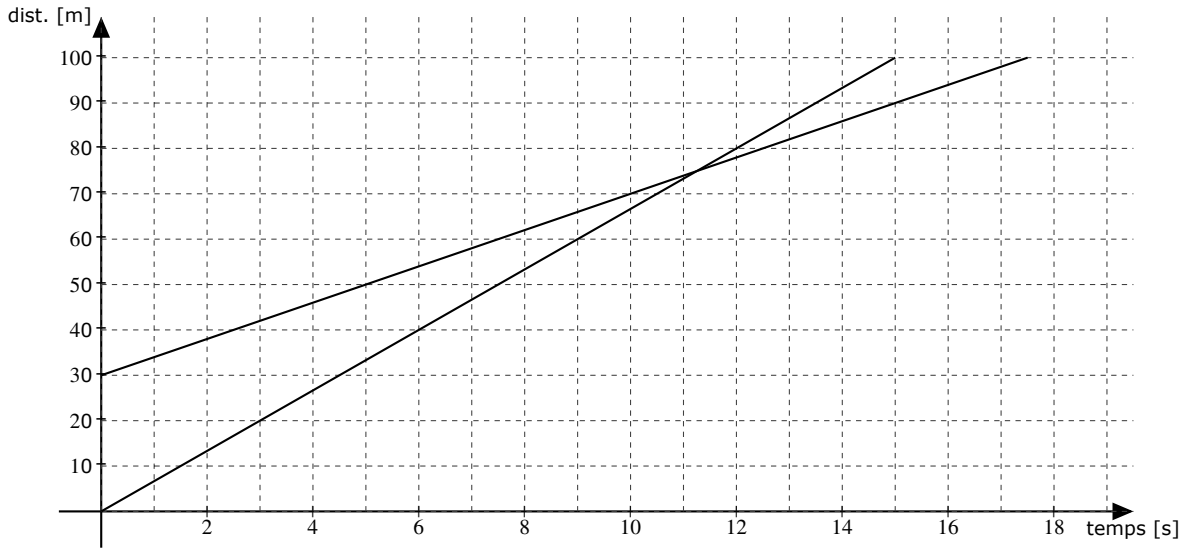
Tarif rouge : prise en charge : 3 francs
taxe kilométrique : 5 francs

Tarif vert : prise en charge : 6 francs
taxe kilométrique : 4 francs

Pour les trois tarifs, exprimer le coût d'une course en fonction de la distance et déterminer graphiquement le tarif le plus avantageux, en fonction de la distance à parcourir.



Exercice 1.7 Un père défie son fils au 100 mètres en lui laissant un peu d'avance. Les graphes indiquant la distance parcourue (en mètres) par les deux personnes en fonction du temps (en secondes) sont donnés ci-dessous.



a) Combien de mètres d'avance le père a-t-il laissés à son fils ?

b) Qui a gagné ? Avec combien de secondes d'avance ?

c) Quelle distance les sépare lorsque le vainqueur franchit la ligne d'arrivée ?

d) Quelles sont les vitesses des deux coureurs ?

e) Le père et le fils ont-ils été côte à côte ? Si oui, à quelle distance de la ligne de départ ?

f) Donner l'expression des deux fonctions affines.

Exercice 1.8 Une barre métallique mesure 45 cm à une température de $15°$C et $45{,}2$ cm à une température de $51°$C. En admettant que l'allongement de la barre soit proportionnel à l'élévation de la température, on demande :

a) l'expression de la fonction qui calcule la longueur de la barre en fonction de la température ;

b) la longueur de la barre à une température de $60°$C ;

c) la température à laquelle la barre mesure $44{,}7$ cm.

Exercice 1.9 Une usine vend actuellement sa production annuelle de 23 tonnes de papier recyclé pour un prix unitaire de $6.-$ francs le bloc de feuilles. Une étude indique qu'elle vendrait 7 tonnes de moins pour chaque franc ajouté au prix unitaire.

a) Exprimer la quantité vendue en fonction du prix unitaire.

b) Quelle quantité serait vendue pour un prix unitaire de $4{,}35$ francs le bloc de feuilles ?

c) Quel devrait être le prix unitaire pour que la quantité vendue soit de 29 tonnes ?

Exercice 1.10 Un réparateur informatique demande un montant forfaitaire de 30 francs pour le déplacement. J'ai payé en tout 390 francs pour une réparation qui a pris 4 heures et demie. Le tarif horaire est fixe.

a) Déterminer le montant à payer en fonction de la durée de l'intervention.

b) Représenter graphiquement cette situation.

Applications économiques - rapport prix-quantité

Exercice 1.11 Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer sa réciproque.

a) $p(q) = -4q + 12$

b) $q(p) = \frac{2}{3}p - 6$

c) $q(p) = 3p + \frac{5}{2}$

d) $p(q) = -\frac{2}{7}q - \frac{5}{14}$

Applications économiques - Intérêts simples

Exercice 1.12 Placé durant 3 mois, un capital de CHF $1'600.-$ a produit un intérêt de CHF $36.-$.
Quel est le taux d'intérêt annuel du placement ?

Exercice 1.13 On a emprunté CHF $6'000.-$ à $4{,}5\%$ le 1er avril. Ne souhaitant pas payer plus de CHF $100.-$ d'intérêt, à quelle date doit-on rembourser le prêt ?

Exercice 1.14 Une personne fait un placement de CHF $3'000.-$ à 3%. Quelque temps plus tard, elle retire son capital avec intérêts. Le banquier qui tient compte également de CHF $30.-$ de frais lui remet une somme identique à ce qu'elle avait déposé initialement.

Calculer la durée du placement.

Exercice 1.15 On a acheté une machine dont on a payé 30% à la livraison et le solde doit être payé dans les 3 mois avec un intérêt de retard de $210.-$ frs.

Quel est le taux d'intérêt simple pratiqué si le montant versé à la livraison est de $2'400.-$ frs ?

Exercice 1.16 Deux montants placés à $2{,}5\%$ pendant 8 mois ont rapporté en tout $350.-$ frs.

Quels sont ces deux montants si leurs intérêts diffèrent de $50.-$ frs ?

Exercice 1.17 En remboursement d'un emprunt d'une année, on a réglé CHF $2'700.-$. Ce versement comprend :

- l'intérêt au taux de 5% sur la somme empruntée ;
- $\frac{2}{5}$ de la somme empruntée.

Quel est le montant emprunté ?

Exercice 1.18 Un capital placé à 4% se monte aujourd'hui à $3'080.-$. S'il avait été placé à 5%, il se monterait à $3'100.-$.

Calculer la durée de ce placement ainsi que le capital de départ.

Exercice 1.19 Quel capital a-t-on placé le 9 février si en fin d'année le compte montre un solde de CHF $30'663.-$, après déduction de l'impôt anticipé de 35% et de CHF $50.-$ de frais de gestion du compte ? Taux : 4%.

Intersections de droites

Exercice 1.20 Déterminer algébriquement les coordonnées des éventuels points d'intersection des graphes des fonctions f et g.

a) $f(x) = 5x + 2$ et $g(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 2x - \frac{1}{2}$

c) $f(x) = x + 6$ et $g(x) = 3\left(2 + \frac{1}{3}x\right)$

d) $f(x) = -x + 2$ et $g(x) = x - 3$

e) $f(x) = \frac{5 + 3x}{3}$ et $g(x) = x + 4$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ et $g(x) = 5 - x$

Exercice 1.21 Déterminer algébriquement les coordonnées des éventuels points d'intersection des graphes des fonctions f et g.

a) $f(x) = \frac{1}{2}(8 + 2x)$ et $g(x) = x + 4$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ et $g(x) = -2x + 9$

c) $f(x) = -3x + \frac{7}{2}$ et $g(x) = \frac{5}{3} - \frac{21}{7}x$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{2}{5}$ et $g(x) = \frac{4x - 15}{20}$

Applications : Résolution de problèmes

Exercice 1.22 Un vendeur est payé CHF $300.-$ pour sa journée de travail et touche en plus 10% du montant de ses ventes.

a) Exprimer le salaire journalier en fonction du montant des ventes.

b) Quel montant de vente doit-il atteindre pour que sa journée lui rapporte CHF $450.-$ de salaire ?

c) Pour stimuler son envie de vendre, son employeur lui propose de ne plus recevoir les CHF $300.-$ mais de toucher le quart du montant de ses ventes.

Exprimer le salaire journalier en fonction du montant des ventes.

d) À partir de quel montant de ventes la deuxième proposition devient-elle plus avantageuse ?

e) Le patron a-t-il raison de penser que cela va stimuler son envie de vendre ?

Exercice 1.23 Pour un travail écrit comptant 12 points, la note 1 correspond à 0 point et la note 6 à 12 points. *(On considère les notes non arrondies.)*

a) Trouver la fonction affine qui donne la note non arrondie en fonction du nombre de points. Esquisser le graphique de cette fonction.

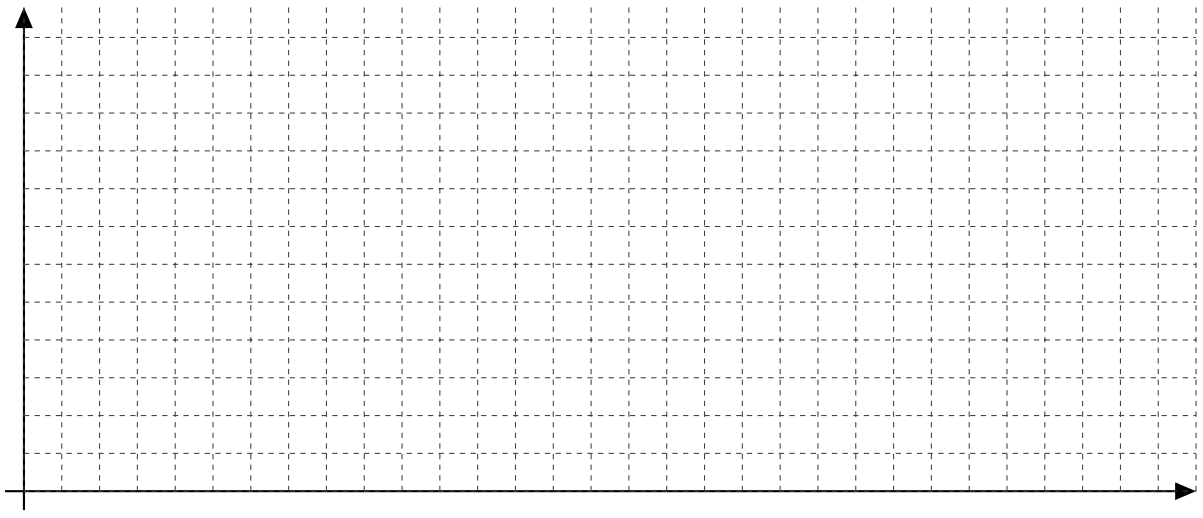
b) Comme les notes sont mauvaises, le maître A décide de changer l'échelle. Il donne la note 6 à partir de 10 points (0 point donne la note 1 et 10 points et plus la note 6).

Compléter l'esquisse. Quels sont les élèves les plus avantagés ?

c) Le maître B, lui, décide d'attribuer la note 2 à 0 point (0 point donne la note 2 et 12 points la note 6).

Esquisser la nouvelle fonction. Quels sont les élèves les plus avantagés ?

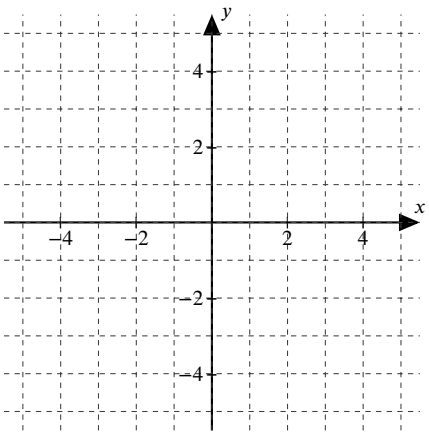
d) Pour quels résultats est-on plus avantagé par le maître A que par le maître B ?



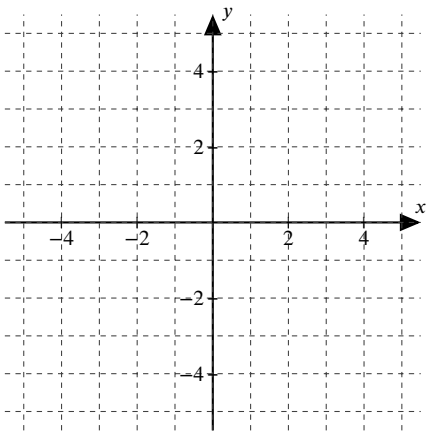
Systèmes d'équations linéaires 2 x 2

Exercice 1.24 Représenter la droite en déterminant ses intersections avec les axes.

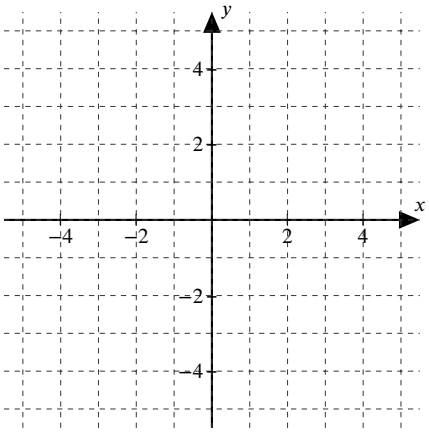
a) $x + y = -4$



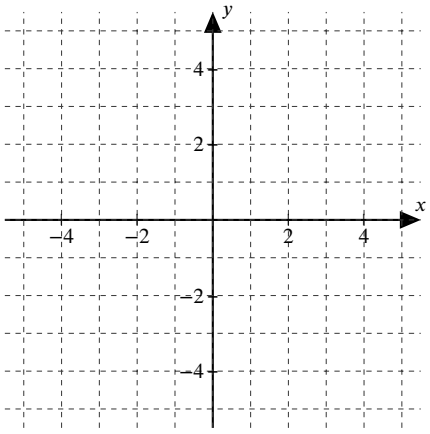
c) $4x - y = -4$



b) $3x - 5y = 15$

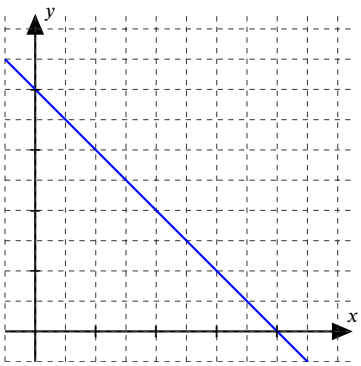


d) $2x + 3y = 6$

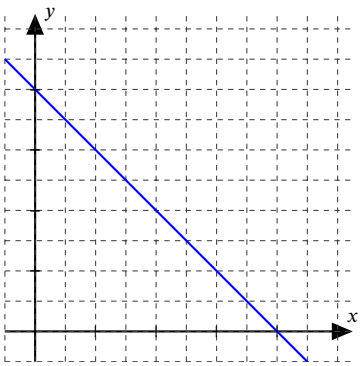


Exercice 1.25 Compléter la graduation des axes pour que la droite corresponde à l'équation.

a) $2x + 10y = 40$



b) $2x + y = 120$



Exercice 1.26 Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine des droites ci-dessous.

a) $y = -5x + 2$

b) $y = x - 3$

c) $4x + y = 20$

d) $3x + 4y = 20$

e) $7x - 5y = 13$

f) $y = 9$

g) $y = 9x$

h) $x = 9$

i) $x = 9y$

Exercice 1.27 Utiliser la pente et l'ordonnée à l'origine pour représenter graphiquement ces fonctions.

a) $f(x) = -x + 2$

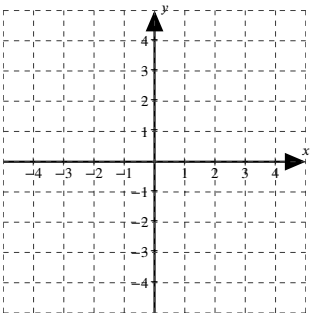
b) $f(x) = 3x - 1$

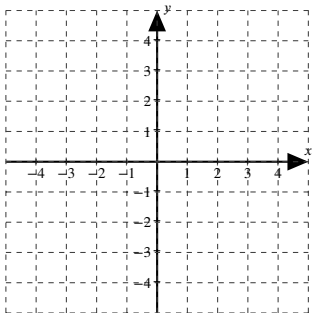
c) $f(x) = -3x + 2$

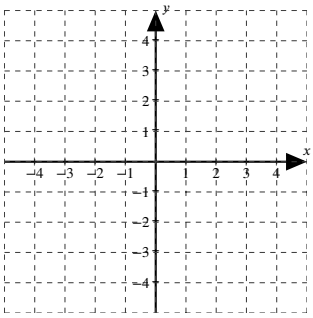
d) $f(x) = -\frac{3}{4}x + 3$

e) $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$

f) $f(x) = -\frac{5}{6}x + 4$





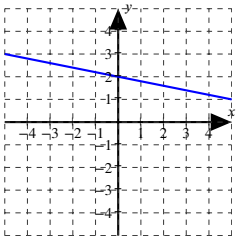


Exercice 1.28

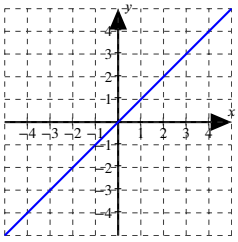
A) Donner l'équation de la droite sous la forme $y = mx + h$.

B) Donner l'équation de la droite sous la forme $ax + by = c$ avec a positif.

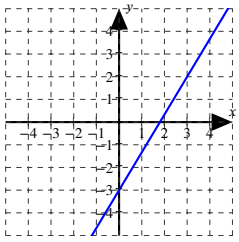
a)



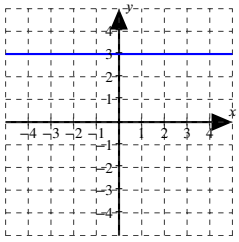
b)



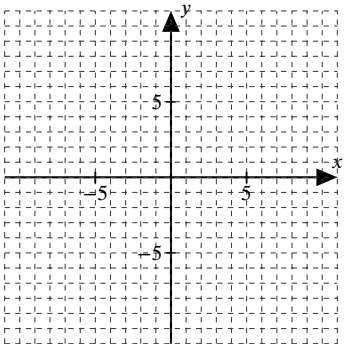
c)

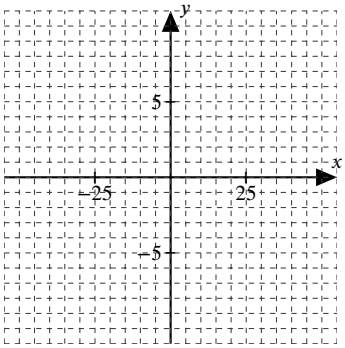


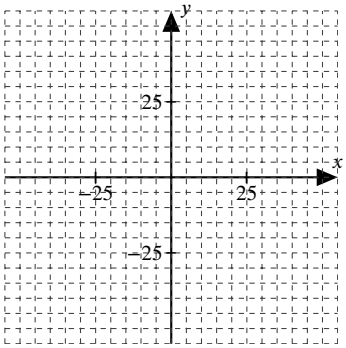
d)



Exercice 1.29 Représenter $y = \frac{3}{5}x - 5$ sur les trois graphiques ci-dessous.





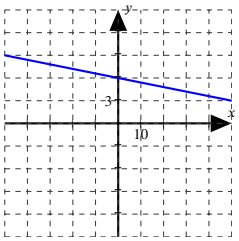


Exercice 1.30

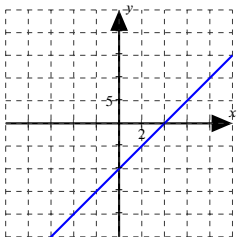
A) Donner l'équation de la droite sous la forme $y = mx + h$.

B) Donner l'équation de la droite sous la forme $ax + by = c$ avec a positif.

a)



b)



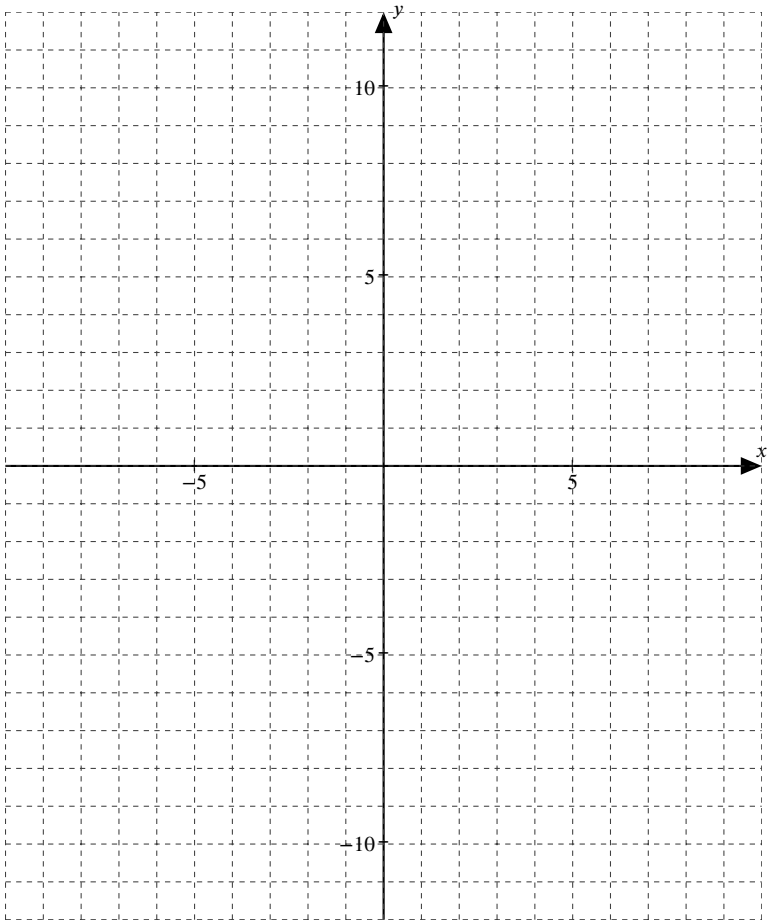
Exercice 1.31 Résoudre les systèmes d'équations suivants par combinaison linéaire :

a) $\begin{cases} -4x + 5y = 32 \\ 2x - 3y = -22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x + 10y = -12 \\ 2x + 3y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 6y = 4 \\ 14x + 7y = 8 \end{cases}$

Exercice 1.32 Résoudre les systèmes d'équations suivants par substitution :

a) $\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 13x - 3y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 21x + 7y = 5 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$

Exercice 1.33 Représenter les droites $5x+2y = 10$ et $2x+3y = 12$, puis déterminer les coordonnées exactes de leur point d'intersection.



Exercice 1.34 Par chaque système d'équations ci-dessous, esquisser la situation graphique correspondante puis indiquer à quel type de système il correspond (déterminé, indéterminé, ou impossible).

a) $\begin{cases} 2y = 1 - x \\ 4y = 4x - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = 5x - 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 15x - 3y = 14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ y = 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ x = 2 \end{cases}$

Exercice 1.35 Résoudre algébriquement les systèmes d'équations de l'exercice précédent par la méthode des combinaisons linéaires.

Application économique : analyse de rentabilité

Exercice 1.36 Une troupe de théâtre a obtenu une subvention de $50'000$ francs pour monter une pièce. Chaque représentation rapporte $10'000$ francs. Les frais fixes (décors, costumes, répétitions, etc.) s'élèvent à $150'000$ francs et les frais variables (salaires des comédiens, location de la salle...) à $8'000$ francs par représentation.

a) Déterminer les expressions qui donnent le revenu $R(x)$, les coûts $C(x)$ et le bénéfice $B(x)$ en fonction du nombre de représentations x.

b) Interpréter le point d'intersection des droites représentant les fonctions $R(x)$ et $C(x)$.

c) La troupe rentre-t-elle dans ses frais si elle donne 25 représentations ?

d) Calculer le nombre de représentations nécessaires pour atteindre le seuil de rentabilité.

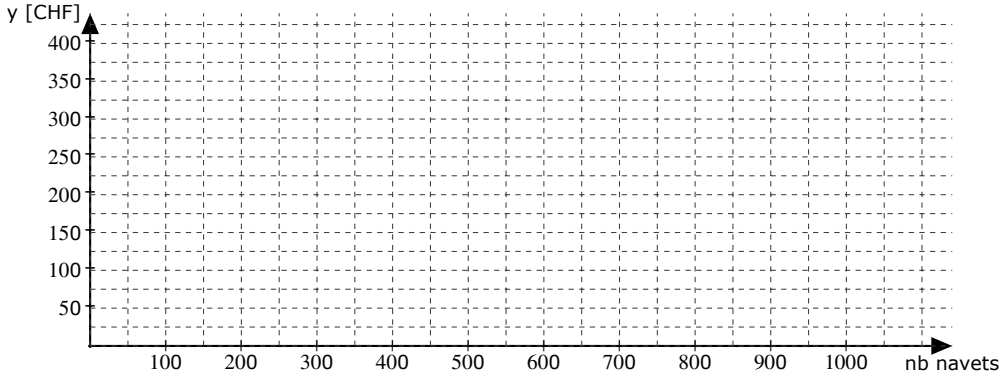
Exercice 1.37 Un producteur maraîcher sait qu'il peut vendre toute sa production de navets en les vendant 40 centimes chacun. Il estime qu'il a des frais fixes de 100 francs par jour et que la production de chaque navet lui coûte 20 centimes.

a) Calculer le nombre de navets à produire et vendre pour atteindre son seuil de rentabilité.

Un vendeur de machinerie lourde propose au producteur l'achat d'une machine qui réduira les coûts de production à 10 centimes par navet. Par contre, cela augmentera ses frais fixes à 180 francs par jour.

b) Analyser la rentabilité pour aider le producteur à prendre une décision.

c) Illustrer graphiquement cette situation .



Exercice 1.38 Une entreprise vend ses yoyos à 50 francs pièce. Sachant que l'entreprise assume des coûts fixes de $50'000$ francs et que le coût unitaire de production d'un yoyo est de 30 francs, déterminer :

a) le nombre de yoyos à vendre pour atteindre le seuil de rentabilité ;

b) le chiffre d'affaires au seuil de rentabilité.

Exercice 1.39 Un marchand achète d'un grossiste des bas au prix de 2 francs par paire. Les frais fixes de fonctionnement de son magasin sont de 148 francs par jour.

À quel prix doit-il vendre chaque paire de bas pour que le seuil de rentabilité soit atteint en vendant 37 paires par jour ?

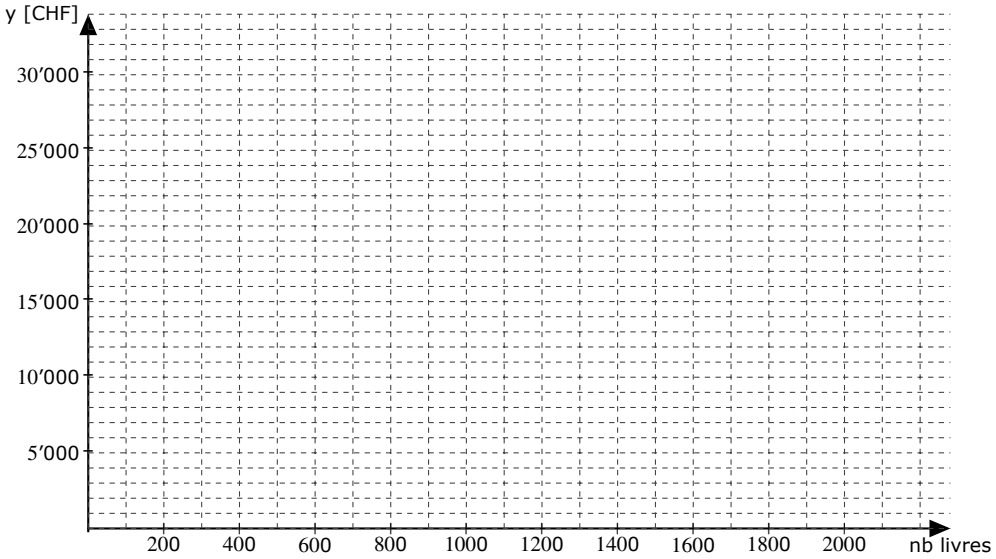
Exercice 1.40 Un éditeur décide de publier un ouvrage de mathématiques. Les coûts qu'il doit assumer sont formés de frais fixes (composition, montage ...) s'élevant à $11'000.-$ francs et de frais variables (impression, droits d'auteur ...) s'élevant à $9.-$ francs par volume.

a) S'il vend ses livres $20.-$ francs l'exemplaire, calculer le nombre de livres qu'il doit publier pour atteindre son seuil de rentabilité.

Un nouveau procédé de composition permet d'abaisser les frais fixes à $9'500.-$ francs. Par contre, dans ce cas, l'impression augmente les coûts variables à $10.-$ francs par livre.

b) Analyser la rentabilité.

c) Illustrer graphiquement cette situation .



Application économique : loi de l'offre et la demande

Exercice 1.41 L'offre d'un produit est modélisée par la fonction $O(p) = 3p - 15$ et la demande pour ce même produit est modélisée par la fonction $D(p) = 245 - 2p$ où p est le prix exprimé en CHF.

a) Déterminer le prix et la quantité d'équilibre.

b) Si le prix est fixé à CHF $40.-$, combien de produits seront vendus ?

c) Si le prix est fixé à CHF $60.-$, combien de produits seront vendus ?

Exercice 1.42 Le marché des salades bio d'un village est modélisé par les fonctions suivantes :

$$\text{offre : } O(p) = 80p - 120 \qquad \text{demande : } D(p) = 120 - 40p.$$

Ces fonctions donnent une estimation du nombre de salades proposées et demandées en une journée, en fonction de leur prix en francs.

a) Esquisser les graphes des fonctions $O(p)$ et $D(p)$ et interpréter les points particuliers.

b) Si le prix d'une salade bio est de $2{,}50$ francs, combien de salades sont-elles proposées sur les étals d'un marché et combien s'en vend-il ?

c) Si le prix d'une salade bio augmente de 50 centimes, combien de salades seront proposées en plus ? Combien de salades seront achetées en moins ?

d) Déterminer le prix d'équilibre et la quantitié de salades proposées et vendues à ce prix.

Exercice 1.43 Une étude récente suggère que sur le marché des machines à laver de qualité moyenne, les quantités (en nombre de machines) proposées et demandées par année dans une grande ville de Suisse se modélisent par les fonctions d'offre $O(p) = 1{,}2p - 270$ et de demande $D(p) = 1800 - 2{,}25p$, où p est le prix unitaire en francs.

a) Déterminer le prix et la quantité d'équilibre.

b) Si le prix d'une machine à laver augmente de $40.-$ francs par rapport au prix d'équilibre, combien de machines resteraient invendues ?

c) Si le prix d'une machine à laver diminue de $40.-$ francs par rapport au prix d'équilibre, combien d'acheteurs n'auraient pas trouvé de machine à laver ?

Exercice 1.44 Dans la petite ville d'Abers, le marché des chaussures de sport est actuellement déséquilibré. En effet, il est proposé tous les jours 50 paires de chaussures à $100.-$ francs alors qu'il ne s'en vend que 35 paires pour ce prix. De plus, on estime que pour chaque franc retiré du prix actuel, l'ensemble des vendeurs proposeraient 5 paires de chaussures en moins, et les clients en achèteraient 2 de plus.

a) Déterminer les fonctions d'offre et de demande, que l'on supposera des fonctions affines du prix.

b) En supposant que le marché est bien modélisé par la loi de l'offre et de la demande, déterminer le prix d'équilibre et la quantité échangée à l'équilibre.

Exercice 1.45 Le tableau suivant renseigne sur l'offre et la demande de tomates :

Prix (en frs/kg)	Quantité offerte (en tonnes)	Quantité demandée (en tonnes)
1,50	40	63
3	55	45

On suppose que l'offre et la demande sont des fonctions affines du prix.

a) Représenter graphiquement ces fonctions.

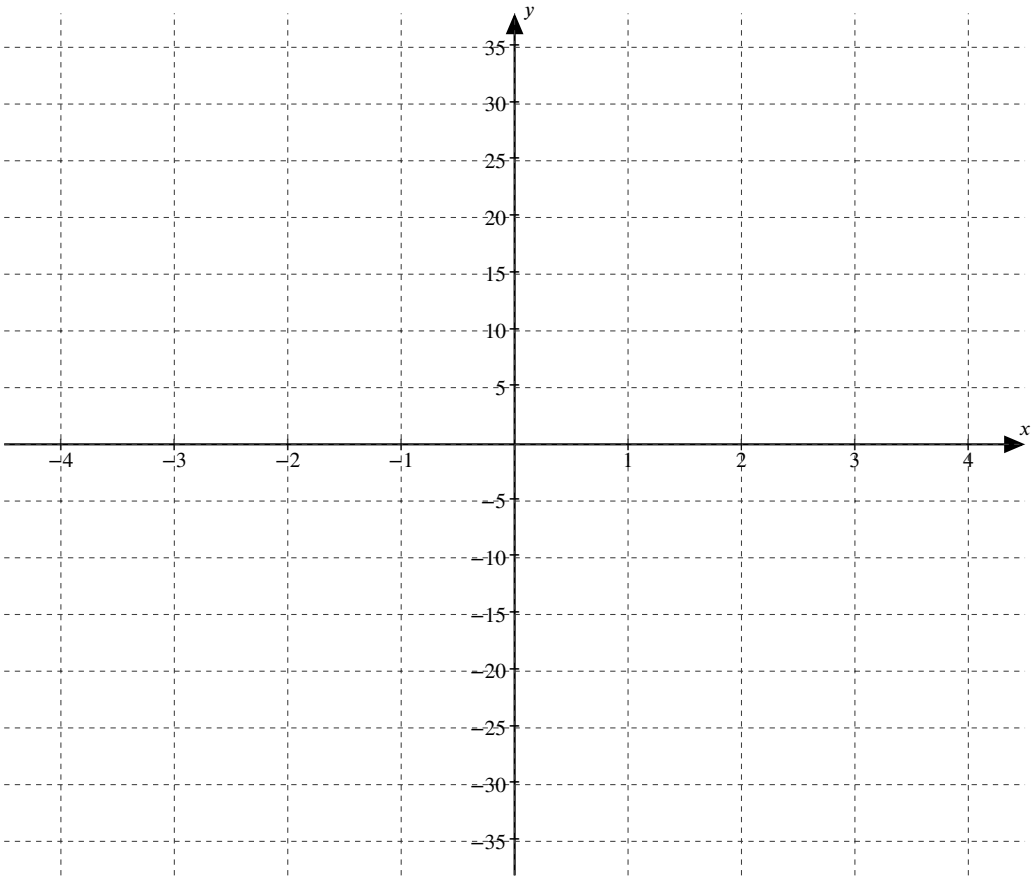
b) Déterminer algébriquement le prix d'équilibre et la quantité échangée à l'équilibre.

5.2 Exercices - Fonctions quadratiques

Définition

Exercice 2.1 Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

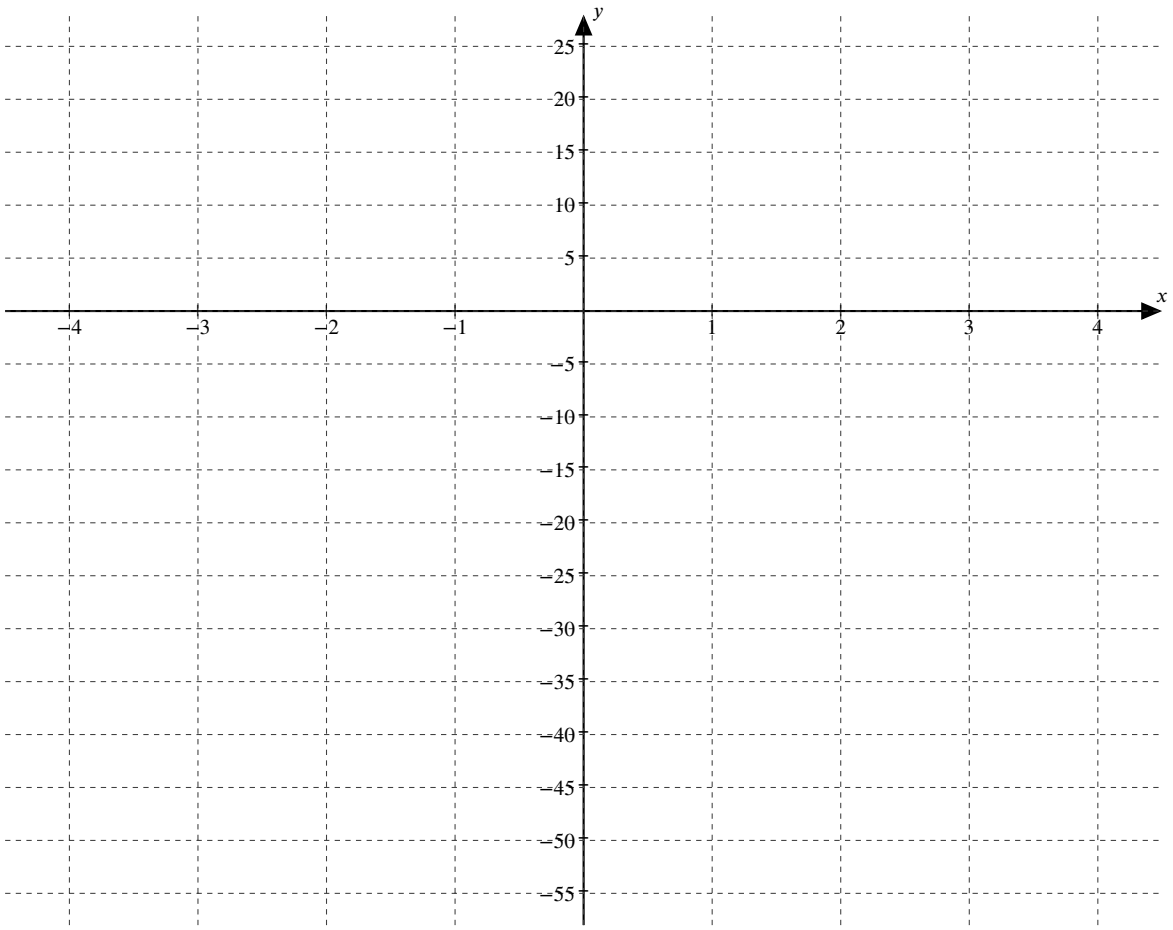
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2$									
$g(x) = 2x^2$									
$h(x) = -x^2$									
$i(x) = -\frac{1}{2}x^2$									



Que peut-on observer de particulier ?

Exercice 2.2 Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = -2x^2$									
$g(x) = -2x^2 - 10$									
$h(x) = -2x^2 + 20$									



Que peut-on observer de particulier ?

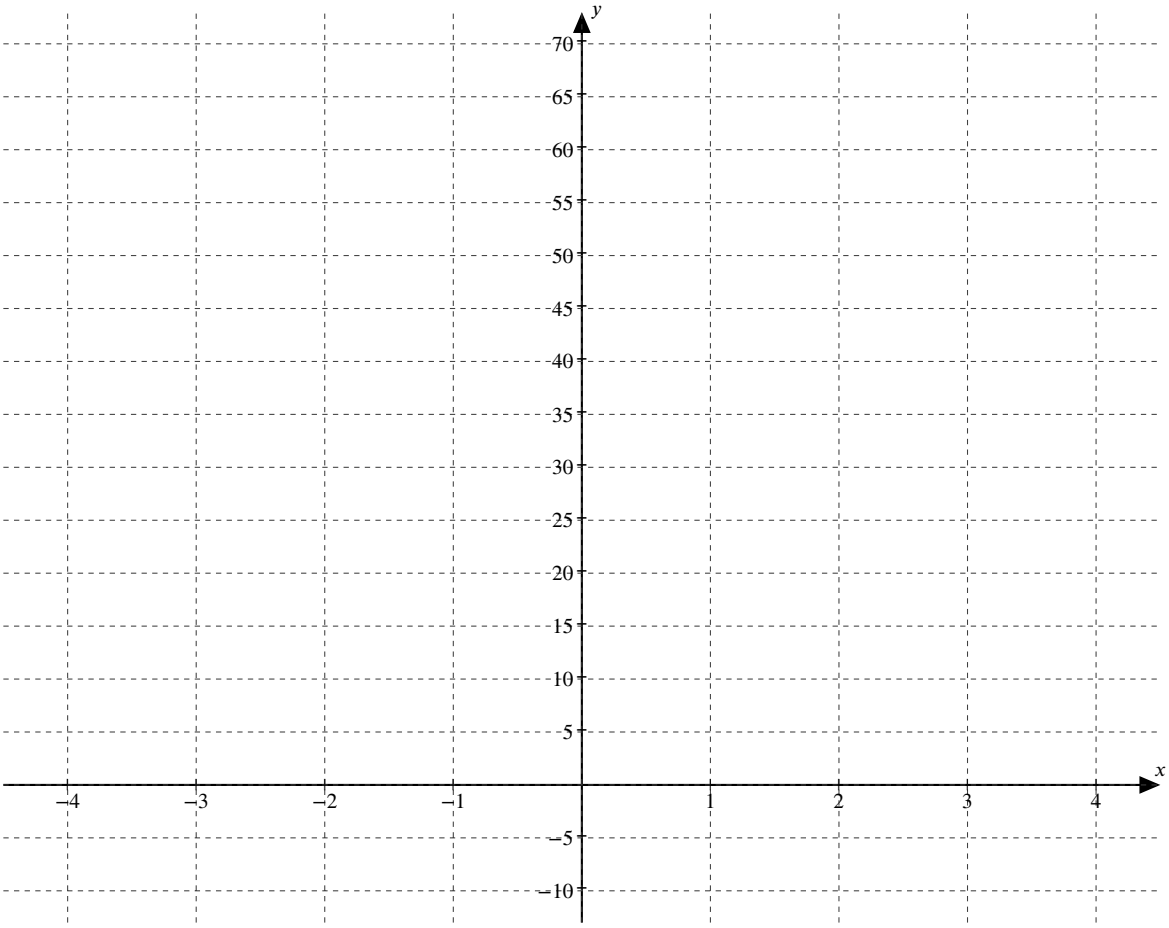
Exercice 2.3 Soit $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 3x^2 - 6x$ et $h(x) = 2x^2 + 8x$.

a) Déterminer algébriquement les zéros de ces fonctions.

b) Quels sont les zéros d'une fonction du type $ax^2 + bx$.

c) Compléter ce tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2 + 3x$									
$g(x) = 3x^2 - 6x$									
$h(x) = 2x^2 + 8x$									



d) Quelles sont les coordonnées des sommets de ces paraboles ?

e) Comparer la première coordonnée du sommet de chaque parabole avec les zéros de cette même parabole.

f) En déduire la première coordonnée du sommet de la parabole $y = ax^2 + bx$.

g) En déduire la première coordonnée du sommet de la parabole $y = ax^2 + bx + c$.

Graphe et points caractéristiques

Exercice 2.4 Pour les fonctions quadratiques ci-dessous, calculer les coordonnées des points caractéristiques (intersections avec les axes, sommet), déterminer l'orientation de son graphe, puis tracer son esquisse.

a) $f(x) = x^2 + 8x + 12$

b) $f(x) = x^2 - 4x$

c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 9$

d) $f(x) = -2x^2 + 8x - 13$

e) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$

f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$

Intersections

Exercice 2.5 Déterminer les points d'intersection des graphes de f et g.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et $g(x) = -4x + 10$.

b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$ et $g(x) = 3x + 5$.

c) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ et $g(x) = x - 4$.

Exercice 2.6 Déterminer les points d'intersection des graphes de f et g.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = 3x^2 - 12x + 18$.

b) $f(x) = -x^2 + 13x - 48$ et $g(x) = x^2 - 11x + 24$.

c) $f(x) = -x^2 + x$ et $g(x) = 2x^2 + 6$.

Application économique : formation de prix en situation de monopole

Exercice 2.7 Un fabricant de meubles sait qu'il y a une forte demande pour un certain type de fauteuil. Cette demande s'exprime par $D(p) = 9'000 - 20p$ où p est le prix de vente. Le fabricant a également calculé qu'il y a $16'000$ francs de frais fixes et 80 francs de frais variables par fauteuil pour la fabrication.

Quel prix le fabricant doit-il fixer pour ses fauteuils s'il désire :

a) un revenu maximal ? Quel sera le revenu maximal ?

b) atteindre le seuil de rentabilité inférieur ?

c) atteindre le seuil de rentabilité supérieur ?

d) un bénéfice maximal ? Quel sera le bénéfice maximal ?

Esquisser toutes ces grandeurs (coûts, revenus, bénéfices) sur un graphique.

Exercice 2.8 Un fabricant de téléphone sait que la demande pour son nouveau modèle qu'il veut commercialiser est donné par $D(p) = 23'000 - 200p$.

Sachant que les coûts fixes de fabrication s'élèvent à $38'000$ francs et que les coûts unitaires sont de 5 francs, déterminer l'intervalle de rentabilité et le prix permettant d'obtenir un bénéfice maximal.

Exercice 2.9 Un quincaillier a 300 tondeuses à gazon à vendre pour la saison. Il sait qu'au prix de 400 francs chacune, il les vendra toutes. Il sait aussi que pour chaque augmentation de 4 francs, il perdra 2 ventes.
Quel prix devrait-il les vendre pour avoir un revenu maximal ?

Exercice 2.10 Un fabricant d'appareils électroniques veut mettre sur le marché une nouvelle calculatrice. Une étude de marché lui indique que la demande s'exprime par $D(p) = 1'200 - 8p$ où p est le prix de vente de cette calculatrice.

Le fabricant évalue ces coûts de production à $9'600$ francs de frais fixes et 16 francs de frais variables pour chaque calculatrice fabriquée.

Quel prix le fabricant doit-il fixer pour ses calculatrices s'il désire :

a) un revenu maximal ? Quel sera le revenu maximal ?

b) atteindre le seuil de rentabilité inférieur ?

c) atteindre le seuil de rentabilité supérieur ?

d) un bénéfice maximal ? Quel sera le bénéfice maximal ?

Esquisser toutes ces grandeurs (coûts, revenus, bénéfices) sur un graphique.

Exercice 2.11 Un fabricant de réveils veut mettre sur le marché un nouveau modèle. Une étude de marché lui indique que la demande s'exprime par $D(p) = 1'100 - 25p$ où est le prix de vente de ce nouveau réveil.

Le fabricant évalue ses coûts de production à $3'000$ francs de frais fixes et 10 francs de frais variables pour chaque réveil fabriqué.

Déterminer :

a) le seuil de rentabilité inférieur,

b) le seul de rentabilité supérieur,

c) le prix qui permet d'obtenir un bénéfice maximal,

d) le bénéfice maximal.

Exercice 2.12 Un fabricant de montres veut mettre un nouveau modèle tout public. Il sait que si il fixe le prix à 91 francs il n'aura aucun client et que chaque fois qu'il diminue le prix de 5 francs il y aura 150 ventes de plus.

Le fabricant évalue ses coûts de production à $2'550$ francs de frais fixes et 5 francs de frais variables pour chaque montre fabriquée.

Déterminer :

a) le seuil de rentabilité inférieur,

b) le seuil de rentabilité supérieur,

c) le prix qui permet d'obtenir un bénéfice maximal,

d) le bénéfice maximal.

Exercice 2.13 Un fabricant de raquettes de tennis sait que s'il vend son modèle « MEGASLICE » à 100 francs il vendra $5'000$ raquettes et que s'il les vend 150 francs il en vendra $2'500$.

Sachant que les coûts fixes de fabrication s'élèvent à $4'500$ francs et que les coûts unitaires sont de 10 francs, déterminer l'intervalle de rentabilité et le prix permettant d'obtenir un bénéfice maximal.

Exercice 2.14 Un auteur de livres mathématiques de gestion souhaite vendre son ouvrage. Une étude de marché lui indique que la demande s'exprime par $D(p) = 1'200 - 15\,p$ où p est le prix de vente du livre.

Sachant que la production de 200 livres revient à $10'900$ francs et que la production de 50 livres revient à $9'700$ francs, déterminer à quel prix de vente il doit fixer son ouvrage s'il désire :

a) un revenu maximal ? Quel sera alors ce revenu ?

b) atteindre le seuil de rentabilité inférieur ?

c) atteindre le seuil de rentabilité supérieur ?

d) un bénéfice maximal ? Quel sera alors ce bénéfice ?

Exercice 2.15 Une étude de marché a permis d'établir la relation suivante entre le prix p d'une calculatrice et la quantité x de calculatrices vendues : $x = 3'920 - 28\,p$.

Sachant que la production de 50 calculatrices revient à $13'372$ francs et que la fabrication de chaque machine supplémentaire coûte 30 francs :

a) Déterminer le revenu R en fonction du prix de vente p des calculatrices.

b) Déterminer le coût de production C en fonction du prix de vente p des calculatrices.

c) Déterminer le profit maximal.

5.3 Exercices - Factorisation

Exercice 3.1 Factoriser.

a) $x^7 - 49x^5$

b) $5y^2 + 80 - 50y$

c) $\frac{1}{8}x^4 - x^3 + 2x^2$

d) $196x^2 + 28x + 1$

e) $-6m^2 + 7m - m^3$

f) $x^9y^2 - 3x^7y^2$

g) $\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - 2$

h) $-3c^2 - 45$

Exercice 3.2 Factoriser.

a) $20x^2 + 10x - 210$

b) $25y^2 + 16 - 50y$

c) $6x^3 - 17x^2 + 5x$

d) $10x^5 - 23x^4 + 12x^3$

e) $9x^2 + 30x + 25$

f) $100a^2 + 9a + 1$

Exercice 3.3 Factoriser.

a) $11x^4 + 11x^3 - 66x^2$

b) $36x^2 - 21x + 3$

c) $35x^2y + 25xy + 10y$

d) $2x^7 - 288x^5$

e) $-49c^2 - 42c - 9$

f) $3x^4y^4 - x^3y^4 - 10x^2y^4$

Exercice 3.4 Factoriser.

a) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 5x$

b) $\frac{1}{2}x^2 - 5x + 12$

c) $7x^2 - 225$

d) $2x^2 - 23x - 12$

e) $36x^6 + 81x^7 + 4x^5$

f) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + 3$

Exercice 3.5 Effectuer et réduire.

a) $(x - 5)^2$

b) $(3x + 7y)^2$

c) $a(5a + 4)(5a - 4)$

d) $3(x - 10)(x + 5)$

e) $4y^2(y - 10)(y - 5)$

f) $(10x + 3)(10x - 3) - (11x - 4)^2$

g) $(x + 6)(x + 1) - 3(x - 4)(x + 4)$

h) $t(t + 10)(t - 3) + \frac{1}{3}(t + 3)^2$

i) $(t + 3)(t + 10)(t - 3)$

j) $(t + 10)^3$

Produits remarquables du 3e degré

Exercice 3.6 Utiliser les produits remarquables pour effectuer et réduire.

a) $(x+4)^3$

b) $(2x-5)^3$

c) $(10c-1)^3$

d) $(3x+\frac{1}{3})^3$

e) $(x-2)^3$

f) $(x^2-2)^3$

g) $(x^3+1)^3$

h) $(x^{10}y^4+1)^3$

Exercice 3.7 Factoriser.

a) x^3+125

b) x^3-125

c) $8V^3+T^3$

d) $27x^3-8$

e) x^3+3x^2+3x+1

f) $q^3-30q^2+300q-1000$

Exercice 3.8 Factoriser.

a) x^6-1

b) x^4+8x

c) x^6+2x^3+1

d) $8n^3+24n^2+24n+8$

e) $8x^6+7x^3-1$

f) $x^6+9x^5+27x^4+27x^3$

Changement de variable

Exercice 3.9 Factoriser.

a) x^4-11x^2+28

b) $2x^4+23x^2+11$

c) $81x^4-72x^2+16$

d) z^4-8z^2-9

e) x^4+8x^2-9

f) x^4-625

Exercice 3.10 Factoriser.

a) $a^6-21a^4-100a^2$

b) $5x^4-55x^2+90$

c) $-7x^7+x^5+6x^3$

d) x^4-81

e) $32x^5y+400x^3y+1250xy$

f) $\frac{1}{7}x^8+\frac{10}{7}x^6+3x^4$

Exercice 3.11 Effectuer, réduire et observer.

a) $(5x+4)^2$

b) $\left(5x^2+4\right)^2$

c) $\left(5x^3+4\right)^2$

d) $(z-15)(z+15)$

e) $\left(z^2-15\right)\left(z^2+15\right)$

f) $\left(z^{10}-15\right)\left(z^{10}+15\right)$

g) $(x-3)(x+22)$

h) $\left(x^3-3\right)\left(x^3+22\right)$

Exercice 3.12 Factoriser.

a) x^6-7x^3-8

b) x^6+9x^3+8

c) x^6-1

d) x^6-625x^2

e) x^6+2x^3+1

f) $8n^6+24n^4+24n^2+8$

g) $8x^6+7x^3-1$

h) $x^6+9x^5+27x^4+27x^3$

Méthode du groupement

Exercice 3.13 Factoriser.

a) $x^3+5x^2+3x+15$

b) $x^3+6x^2-4x-24$

c) $5z^3-8z^2-5z+8$

d) x^4+8x^3+x+8

e) x^4+x^3+8x+8

f) $2w^4+3w^3-250w-375$

Exercice 3.14 Factoriser.

a) $6x^4-10x^3+66x^2-110x$

b) $-8x^7-64x^6-27x^4-216x^3$

c) $\frac{1}{11}x^3+\frac{2}{11}x^2-11x-22$

d) $120y^5-80y^4-30y^3+20y^2$

e) $10x^4-65x^3+10x-65$

f) $10x^4+65x^3-10x-65$

Exercice 3.15 Résoudre.

a) $x^3+15x^2+75x+125=0$

b) $a^4-a^2-12=0$

c) $x^3-2x^2+5x-10=0$

d) $1000x^3+x^2-27=x^2$

e) $x^4+5x^3=x+5$

f) $6x^4-23x^3=4x^2$

Division Euclidienne

Exercice 3.16 Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x) = 3x^4 - 8x^3 + 10x + 5$ $G(x) = x - 2$

b) $F(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$ $G(x) = x - 5$

c) $F(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 8$ $G(x) = x + 2$

d) $F(x) = x^4 - 8x^2 - 7$ $G(x) = x - 3$

Exercice 3.17 Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x) = -2x^3 + 7x^2 - 8x - 1$ $G(x) = 2x - 3$

b) $F(x) = -16x^3 - 32x^2 - 7x + 10$ $G(x) = 4x + 5$

c) $F(x) = 9x^3 - 34x - 26$ $G(x) = 3x - 7$

d) $F(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$ $G(x) = 2x - 4$

Exercice 3.18 Diviser $F(x)$ par $G(x)$ et écrire l'égalité fondamentale.

a) $F(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ $G(x) = x^2 + 2x - 1$

b) $F(x) = 5x^4 + 3x^3 - 1$ $G(x) = x^2 - 1$

c) $F(x) = 6x^5 + 5x^4 - 25x^3 + 31x^2 - 12x + 5$ $G(x) = 2x^2 - 3x + 2$

d) $F(x) = 3x^4 - 7x^3 - 18x^2 + 28x + 24$ $G(x) = 3x^2 + 8x + 4$

Exercice 3.19 Déterminer un polynôme $F(x)$ qui donne un quotient de $Q(x) = x^2 + 7$ et un reste de $R(x) = x + 1$ lorsqu'on le divise par $D(x) = x^2 - 3$. Y a-t-il plusieurs possibilités ?

Utilisation de la division euclidienne pour factoriser

Exercice 3.20 Trouver un polynôme $F(x)$ du $3^{\text{ème}}$ degré, qui soit divisible par $x - 3$ et par $x^2 + 3x - 2$. Y a-t-il plusieurs possibilités ?

Exercice 3.21

a) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessous, les polynômes divisibles par $x + 2$.

i) $A(x) = x^3 + 7x^2 + 6x - 8$
ii) $B(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 7$
iii) $C(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 6$
iv) $D(x) = 3x^3 + 5x^2 + x + 6$
v) $E(x) = 10x^3 + x^2 + x + 4$
vi) $F(x) = 10x^4 + 23x^3 + 6x^2 - 3x - 6$
vii) $G(x) = x^{2000} - 3x^{1999} + 40x^{1997} + 347$
viii) $H(x) = x^6 + 4x^5 - 2x^4 + 8x^3 + 11$

b) Pour ceux qui sont divisibles par $x + 2$, effectuer la division et écrire l'égalité fondamentale.

Exercice 3.22

a) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessous, les polynômes divisibles par $x+1$.

i) $A(x) = x^2 - 1$
ii) $B(x) = x^3 - 1$
iii) $C(x) = x^4 - 1$
iv) $D(x) = x^5 - 1$
v) $E(x) = x^6 - 1$
vi) $F(x) = x^7 - 1$

b) Sans effectuer de division, trouver, parmi les propositions ci-dessus, les polynômes divisibles par $x-1$.

Exercice 3.23 Donner la liste de tous les zéros entiers des polynômes suivants :

a) $2x^3 - x^2 - 8x + 4$
b) $3x^3 + 10x^2 + x - 6$

Exercice 3.24 Factoriser.

a) $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$
b) $x^3 + 10x^2 + 17x - 28$
c) $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$
d) $x^4 + 7x^3 + 16x^2 + 28x + 48$

Exercice 3.25 Résoudre.

a) $x^4 - 6x^3 - 22x^2 - 30x - 135 = 0$
b) $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = 0$
c) $3x^3 - 17x - 6 = -4x^2$
d) $x^4 + 16x^3 + 54x^2 = 16x + 55$

Exercice 3.26 Factoriser.

a) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48$
b) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$
c) $x^3 + 5x^2 - 8x - 48$
d) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$
e) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$
f) $35x^3 + 47x^2 + 13x + 1$

Exercice 3.27 Factoriser.

a) $x^3 - 64x$
b) $x^3 - 64$
c) $x^4 - 64$
d) $x^3 + 8x^2 + 8x + 64$
e) $x^4 + 16x^2 + 64$
f) $x^3 + 14x^2 + 56x + 64$
g) $3x^3 + 16x^2 - 64x$
h) $x^3 + 16x^2 - 4x - 64$

5.4 Exercices - Fractions rationnelles

Généralités

Exercice 4.1 Déterminer les ensembles de définition des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x-2)^2}$

b) $g(x) = \dfrac{4x^2-36}{7x^2+4x}$

c) $h(x) = 9x^2+5x-4$

d) $i(x) = \dfrac{x^3-9x}{x^2+9}$

e) $j(x) = \dfrac{4x^2+12x+9}{x^2-8x-9}$

f) $k(x) = \dfrac{7x}{x^3+4x^2-9x-36}$

g) $l(x) = \dfrac{x^3+4x^2-9x-36}{7x}$

h) $m(x) = \dfrac{x^3-125}{6x^3+11x^2+x-4}$

Simplification

Exercice 4.2 Simplifier au maximum.

a) $\dfrac{x^2+2x}{5x^3+10x^2}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

c) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$

d) $\dfrac{3x^2+15x}{7x^3+28x}$

e) $\dfrac{12x^3(x+3)^2(x-2)^4}{18x^7(x+3)(x-2)^4}$

f) $\dfrac{-51x^6y^3}{34x^2y^8}$

Exercice 4.3 Simplifier au maximum.

a) $\dfrac{3xy-12y^2}{x-4y}$

b) $\dfrac{2-x}{x-2}$

c) $\dfrac{(2-x)^2}{(x-2)^4}$

d) $\dfrac{6x^3-25x^2+21x+10}{4x^2-20x+25}$

e) $\dfrac{x^3+1000}{x^3+10x^2-100x-1000}$

f) $\dfrac{x^4+6x^3+9x^2}{x^4-18x^2+81}$

Opérations de base

Exercice 4.4 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

a) $\frac{x+1}{3x^2} \cdot \frac{9x}{(x+1)^2}$

b) $\frac{x^2-4}{x^2} \cdot \frac{x^3-x}{2x-4}$

c) $\frac{x^2-2x-3}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^3-27}$

d) $\frac{x+7}{2x} \cdot \frac{4x^2}{14x+98}$

e) $\frac{x^2-1}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x^2-4}{2x+2}$

f) $\frac{x^2+5x+6}{2x^3+x^2-18x-9} \cdot \frac{2x^2-5x-3}{2x+4}$

Exercice 4.5 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

a) $\frac{x-2}{x-1} : \frac{2x-4}{x^2-1}$

b) $\frac{3x^2}{x^3-1} : \frac{x^3}{x-1}$

c) $\frac{x^2+2x-3}{2x} : \frac{x^4-18x^2+81}{x^2-x}$

d) $\frac{x^4+3x^2-4}{x+3} : \frac{x^3+x^2+4x+4}{x}$

Exercice 4.6 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

a) $\frac{7}{2x-3} + \frac{9}{x+5}$

b) $\frac{x-14}{x-2} + \frac{x+2}{x+14}$

c) $\frac{2x+1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1}$

d) $\frac{3x+6}{(x+2)^2} + 1$

e) $\frac{x+4}{x-2} + \frac{x^2-4x-8}{x^2-2x}$

f) $\frac{x+5}{x^2+3x+2} + \frac{10}{x^2-4}$

Exercice 4.7 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

a) $5 - \frac{2x-15}{x+3}$

b) $\frac{x-1}{x-7} - \frac{x+4}{x+2}$

c) $\frac{x}{3x+6} - \frac{x^2}{x^2-4}$

d) $\frac{6x+7}{x^3+6x^2-7x} - \frac{5}{x^2+6x-7}$

e) $\frac{3x}{x^2-x-2} - \frac{2x+3}{x^2+3x+2}$

f) $\frac{2x-1}{x^3-x^2-2x} - \frac{x}{x^3-2x^2}$

Exercice 4.8 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

a) $\frac{x+2}{x^2+7x+10} + \frac{x^2-15}{x^2-25} - \frac{x-3}{x^2-8x+15}$

b) $\frac{x-3}{x^2+6x+8} - \frac{x-2}{x^2+7x+12} + \frac{5}{x^2+5x+6}$

Exercice 4.9 Effectuer les opérations et simplifier au maximum.

a) $\dfrac{6x^2+2x}{27x^3+1}\cdot\dfrac{9x^2-3x+1}{4x^2}$

b) $\dfrac{x+4}{x-5}-\dfrac{x+3}{5-x}$

c) $\dfrac{6x^2+12x}{x^2+x-20}:\dfrac{9x^5+72x^2}{x^2-9x+20}$

d) $\dfrac{x-x^3}{x^4+2x^3+x^2}$

e) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x+5}{2}$

f) $\dfrac{x^2-6x+8}{x^3-5x^2+2x+8}$

g) $\dfrac{x^3-2x^2}{x+3}\cdot\dfrac{x^2+5x+6}{x^3-4x}$

h) $\dfrac{x-4}{x^2-4}-\dfrac{1}{3x+6}$

i) $\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+5x+4}$

j) $\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x^2-1}$

Résolution d'équations rationnelles

Exercice 4.10 Résoudre.

a) $\dfrac{1-x}{2x}-\dfrac{x-1}{x}=0$

b) $\dfrac{x+1}{x-3}=\dfrac{2x+18}{x^2-9}$

c) $\dfrac{3x-7}{2x-6}=\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{4x-2}{x-1}-\dfrac{x+5}{x^2+x-2}=3$

e) $\dfrac{2x^2+1}{(x+2)(x-1)}=0$

f) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{5-3x}{x-x^2}=2$

Exercice 4.11 Résoudre.

a) $\dfrac{(2x+3)(4x-1)}{7x+2}=0$

b) $\dfrac{12}{x}=7+\dfrac{12}{1-x}$

c) $\dfrac{5x+4}{2x-1}=\dfrac{3}{5}$

d) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{x+5}$

e) $\dfrac{4}{x^2-3x}=\dfrac{x-1}{x-3}-1$

f) $\dfrac{2-3x}{2x-1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{7}{3}$

Exercice 4.12 Un marchand achète des places de spectacle pour un montant de CHF $672.–$. Il compte les revendre CHF $4.–$ de plus par place. Il retrouvera ainsi son investissement de départ, tout en gardant 3 places pour lui.

Combien en a-t-il acheté et à quel prix ?

Exercice 4.13 La somme de CHF $144'000.–$ est partagée entre les 14 héritiers, qui sont les enfants et les petits-enfants du défunt. La moitié de la somme est répartie à parts égales entre les enfants. Les petits-enfants reçoivent chacun CHF $3000.–$ de moins que les enfants.

Combien y a-t-il d'enfants et de petits-enfants ? Combien chacun reçoit-il ?

Exercice 4.14 Un voyage d'études a un coût fixe CHF $14'520.–$. Cette somme est répartie à parts égales entre les participants. Malheureusement, 2 étudiants ont arrêté leurs études en cours d'année, sans avoir payé quoi que ce soit. Le prix par participant a donc dû être majoré de CHF $55.–$.

Combien de personnes vont participer à ce voyage ? Combien chacun va-t-il payer ?

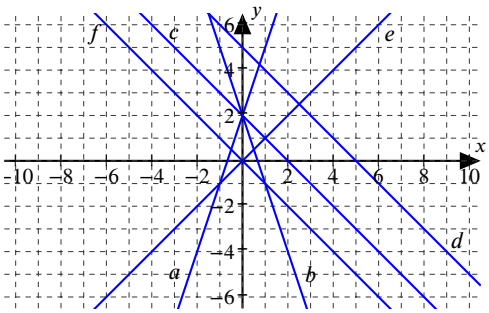
Exercice 4.15 Je me suis lancé dans l'élevage de poules. J'en ai acheté pour un montant de CHF $210.–$. Après que le renard en ait mangé 3, j'ai décidé d'abandonner et de les revendre. Pour ne pas perdre trop d'argent, je les ai vendues CHF $4.–$ de plus chacune. Du coup, je n'ai perdu qu'un franc.

Combien de poules ai-je achetées et à quel prix ?

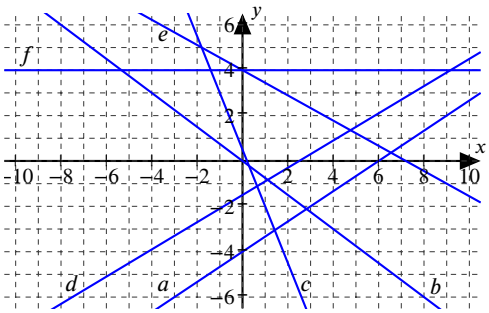
6 Solutions

6.1 Solutions - Droites et fonctions affines

1.1



1.2



1.3

a) $y = -3x + 49$ b) $y = \frac{5}{3}x + \frac{67}{6}$ c) $y = 2x - 3$ d) $y = 4x + 23$

1.4

a) t : temps en [min] et $f(t)$ la masse de sable dans le bas du sablier en [g].
$f(t) = 7t$ pour $0 < t < \frac{30}{7}$ et $f(t) = 30$ pour $t > \frac{30}{7}$.

b) $18 = 7t \iff t = \frac{18}{7}$ Après 2 minutes et 34 secondes.

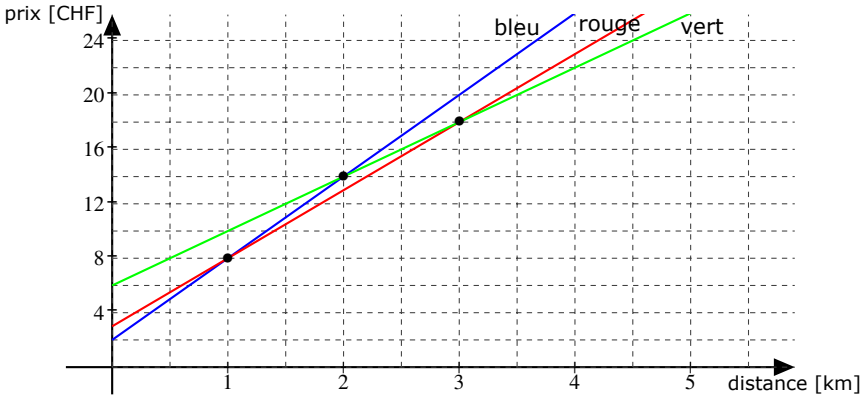
1.5

a) t : temps en [min] et $V(t)$ volume d'eau dans la baignoire [l].
$V(t) = -30t + 165$ pour $0 \leq t$ et tant qu'elle n'est pas vide.

b) $0 = -30t + 165 \iff t = \frac{11}{2}$ Après 5 minutes et 30 secondes.

1.6

Tarif bleu : $C(x) = 6x + 2$ Tarif rouge : $C(x) = 5x + 3$
Tarif vert : $C(x) = 4x + 6$



De 0 à 1 km : tarif bleu De 1 à 3 km : tarif rouge
Plus de 3 km : tarif vert

1.7

a) 30 m

b) Le père a gagné avec 2,5 sec. d'avance.

c) 10 m

d) Vitesse du père : $\sim 6{,}67$ m/s, Vitesse du fils 4 m/s.

e) Oui, à 75 m de la ligne de départ.

f) $p(x) = \frac{20}{3}x$ $\quad f(x) = 4x + 30$

1.8

a) $f(x) = \frac{1}{180}x - \frac{539}{12}$ b) 45,25 cm c) $-39°$C

1.9

a) x : prix d'un bloc de feuilles, en CHF
$f(x)$: tonnes vendues
$f(x) = -7x + 65$.

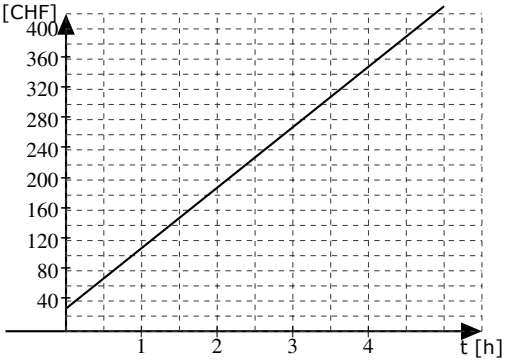
b) 34,55 tonnes.

c) Environ 5,15 francs.

1.10

a) t : durée d'une intervention en heure
$f(t)$: montant à payer en CHF
$f(t) = 80t + 30$ $\quad t \geq 0$

b) $y = 80t + 30$



1.11

a) $q(p) = -\frac{1}{4}p + 3$ b) $p(q) = \frac{3}{2}q + 9$ c) $p(q) = \frac{1}{3}q - \frac{5}{6}$ d) $q(p) = -\frac{7}{2}p - \frac{5}{4}$

1.12 Le taux du placement est de 9%.

1.13 Il faut rembourser avant le 13 août. (133^{e} jour donc 4 mois de 30 jours + 13 jours)

1.14 Le placement a duré 4 mois.

1.15 Le taux d'intérêt est de 15%.

1.16 Les montants sont 12'000.– frs et 9'000.– frs.

1.17 6'000.–

1.18 Le capital initial est de 3'000.– frs et la durée du placement de 8 mois.

1.19 Environ CHF 30'000 en 321 jours

1.20

a) $\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{5}{3}\,;-\frac{19}{3}\right)\right\}$

b) $\mathcal{S} = \varnothing$

c) $\mathcal{S} = \{(x\,;x+6) \mid x \in \mathbb{R}\}$

d) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{5}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)\right\}$

e) $\mathcal{S} = \varnothing$

f) $\mathcal{S} = \left\{(2\,;3)\right\}$

1.21

a) $\mathcal{S} = \{(x\,;x+4) \mid x \in \mathbb{R}\}$

b) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{21}{5}\,;\frac{3}{5}\right)\right\}$

c) $\mathcal{S} = \varnothing$

d) $\mathcal{S} = \left\{\left(-23\,;-\frac{107}{20}\right)\right\}$

1.22

a) x : montant des ventes en CHF
$f(x)$: salaire journalier en CHF
$f(x) = 0{,}1x + 300$.

b) CHF $1500.–$

c) x : montant des ventes en CHF
$f(x)$: salaire journalier en CHF
$f(x) = 0{,}25x$.

d) A partir deCHF $2'000.–$

e) Cela poussera le vendeur à atteindre au moins CHF $2'000.–$ de vente.

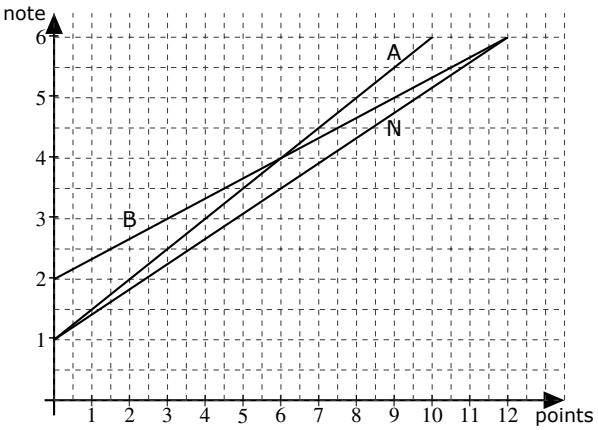
1.23

a) x : nombre de points $f(x)$: note non arrondie
$N(x) = \frac{5}{12}x + 1$

b) Les élèves qui ont obtenu le plus de points.

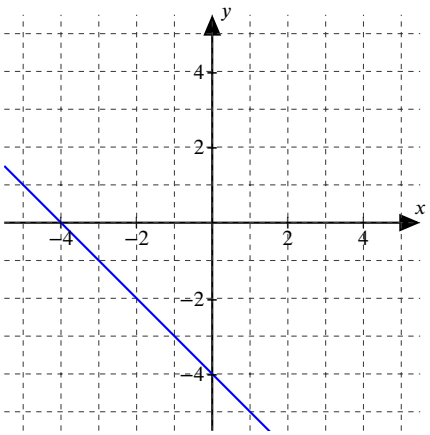
c) Les élèves qui ont obtenu le moins de points.

d) Si on a plus de 6 points.

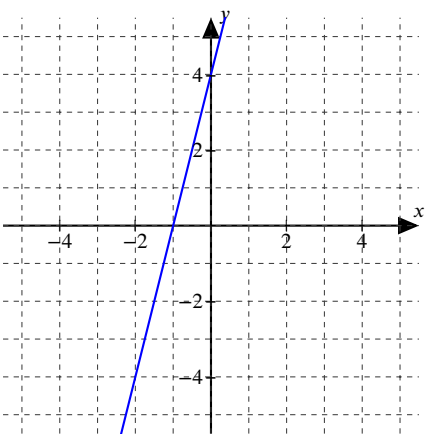


1.24

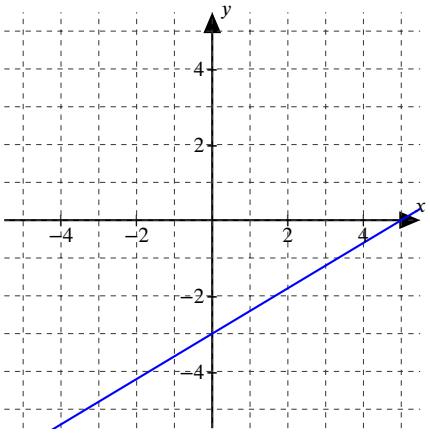
a) $Ox : (-4\,;0)$ $Oy : (0\,;-4)$



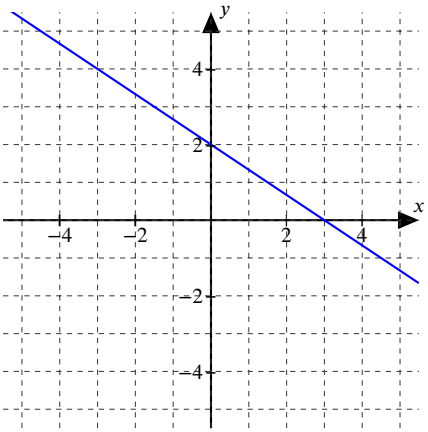
c) $Ox : (-1\,;0)$ $Oy : (0\,;4)$



b) $Ox : (5\,;0)$ $Oy : (0\,;-3)$

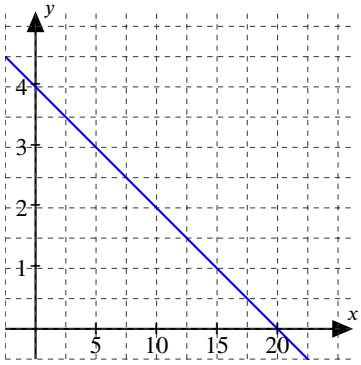


d) $Ox : (3\,;0)$ $Oy : (0\,;2)$

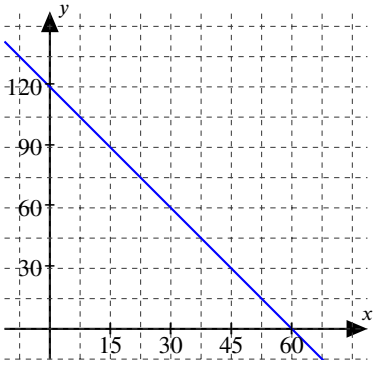


1.25

a) $2x + 10y = 40$



b) $2x + y = 120$



1.26

a) pente $= -5$, o.o. $= 2$

b) pente $= 1$, o.o. $= -3$

c) pente $= -4$, o.o. $= 20$

d) pente $= -\frac{3}{4}$, o.o. $= 5$

e) pente $= \frac{7}{5}$, o.o. $= -\frac{13}{5}$

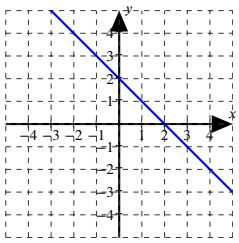
f) pente $= 0$, o.o. $= 9$

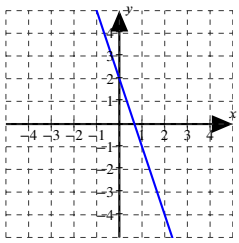
g) pente $= 9$, o.o. $= 0$

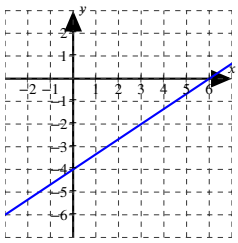
h) droite verticale

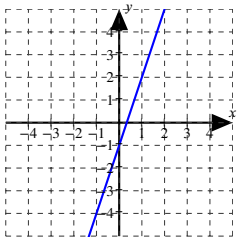
i) pente $= \frac{1}{9}$, o.o. $= 0$

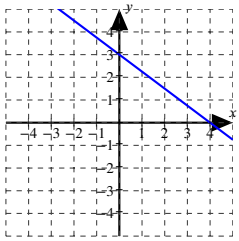
1.27

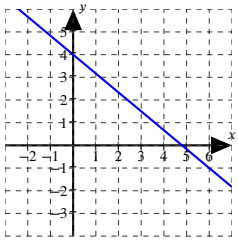
a) 

c) 

e) 

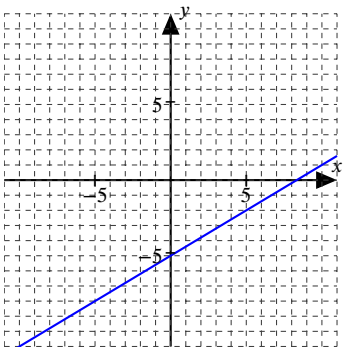
b) 

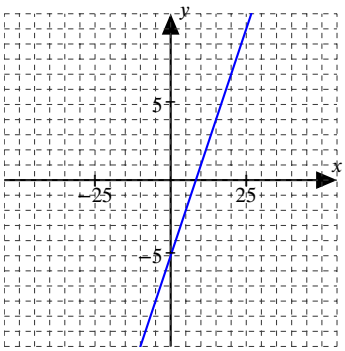
d) 

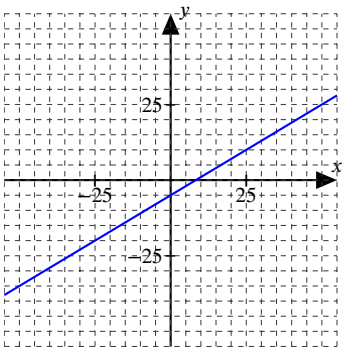
f) 

1.28 A) $y = -\frac{1}{5}x + 2$ $y = x$ $y = \frac{5}{3}x - 3$ $y = 3$ B) $x + 5y = 10$ $x - y = 0$ $5x - 3y = 9$ $y = 3$

1.29





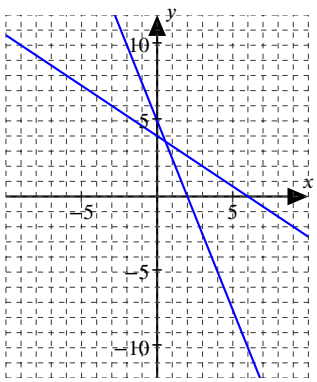


1.30 A) $y = -\frac{3}{50}x + 6$ $y = \frac{5}{2}x - 10$ B) $3x + 50y = 300$ $5x - 2y = 20$

1.31 a) $S = \{(7\,;12)\}$ b) $S = \{(-6\,;3)\}$ c) $S = \left\{\left(\frac{4}{7}\,;0\right)\right\}$

1.32 a) $S = \{(2\,;3)\}$ b) $S = \{(-1\,;-9)\}$ c) $S = \left\{\left(-\frac{1}{21}\,;\frac{6}{7}\right)\right\}$

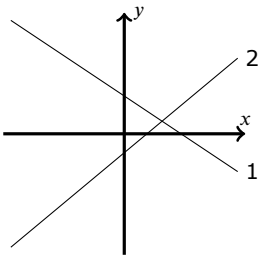
1.33



$\left(\frac{6}{11}\,;\frac{40}{11}\right)$

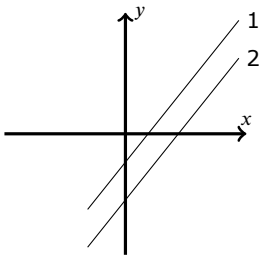
1.34

a)



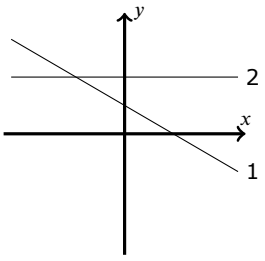
système déterminé

c)



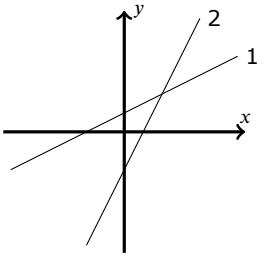
système impossible

e)



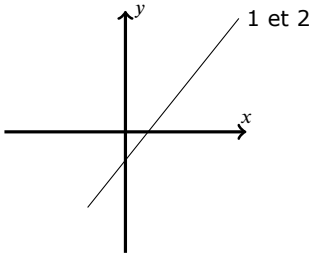
système déterminé

b)



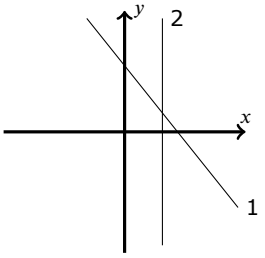
système déterminé

d)



système indéterminé

f)



système déterminé

1.35

a) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)\right\}$

b) $\mathcal{S} = \left\{(3\,;8)\right\}$

c) $\mathcal{S} = \varnothing$

d) $\mathcal{S} = \{(x\,;y) \mid x - 2y = 1\}$

e) $\mathcal{S} = \left\{(-8\,;7)\right\}$

f) $\mathcal{S} = \left\{(2\,;3)\right\}$

1.36

a) x : nombre de représentations

$C(x) = 150'000 + 8'000x$

$R(x) = 50'000 + 10'000x$

$B(x) = R(x) - C(x) = 2'000x - 100'000$

b) Ce point correspond au seuil de rentabilité. L'abscisse de ce point est le nombre de représentations pour lequel les coûts et les revenus s'équilibrent.

c) Non, car $B(25) = -50'000 < 0$, ce qui correspond à une perte.

d) 50 représentations.

1.37

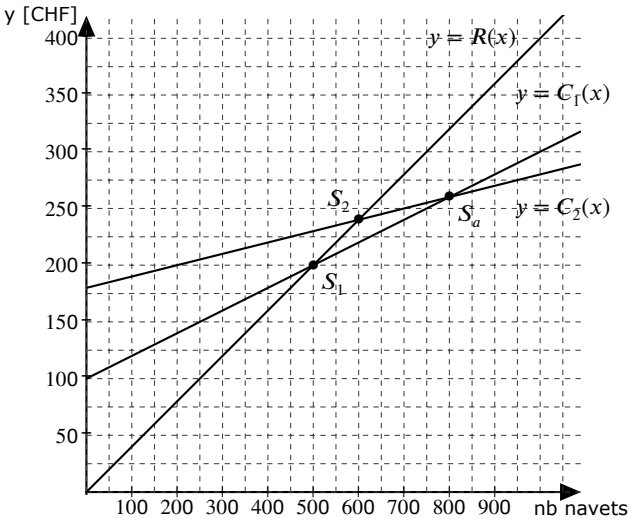
a) 500 navets par jour.

b) Le nouveau seuil de rentabilité est de 600 navets par jour.

c) S_1 : seuil de rentabilité méthode 1

S_2 : seuil de rentabilité méthode 2

S_a : seuil de rentabilité amélioré (la méthode 2 devient plus rentable)



1.38

a) $2'500$ yoyos.

b) $125'000.–$ francs.

1.39 $6.–$ francs.

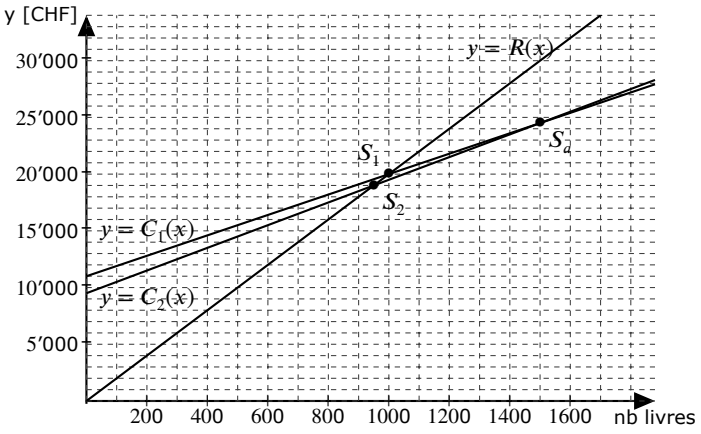
1.40

a) 1000 livres.

b) Le nouveau seuil de rentabilité est de 950 livres.

Il doit changer seulement s'il vend moins de 1'500 livres.

c) S_1 : seuil de rentabilité procédé 1
S_2 : seuil de rentabilité procédé 2
S_a : seuil de rentabilité amélioré (le procédé 2 devient plus rentable)



1.41

a) Prix d'équilibre : 52 quantité échangée : 141.

b) 105 car $O(40) = 105 < D(40) = 165$

c) 125 car $D(60) = 125 < O(60) = 165$

1.42

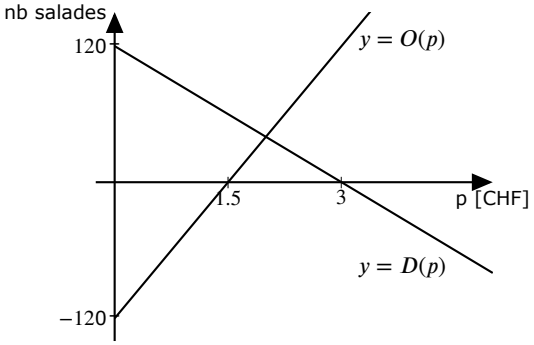
a) Prix minimum de vente : 1,50 frs
Prix maximum d'achat : 3.– frs

Taille du marché : 120 salades
Le point d'intersection est le point d'équilibre.

b) 80 salades proposées, 20 salades achetées.

c) 40 salades proposées en plus, 20 salades demandées en moins.

d) Prix d'équilibre : 2.– francs, quantité échangée : 40 salades.



1.43

a) Prix d'équilibre : 600.– francs
quantité échangée : 450 machines.

b) 138 machines invendues.

c) 138 clients sans machine.

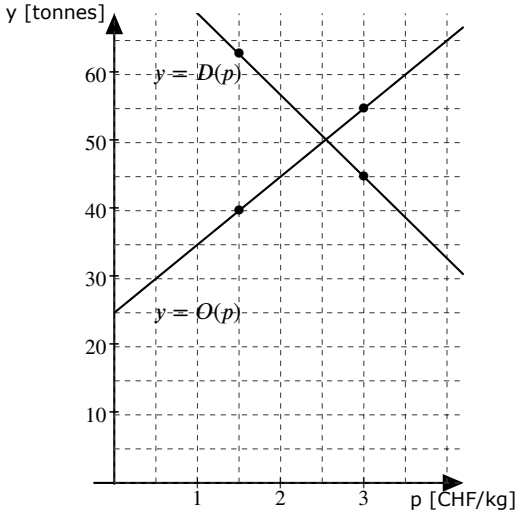
1.44

a) p : prix d'une paire de chaussures en CHF
$O(p) = 5p - 450$ et $D(p) = 235 - 2p$

b) Prix d'équilibre ~ 97,85 francs, quantité échangée ~ 39 paires de chaussures.

1.45

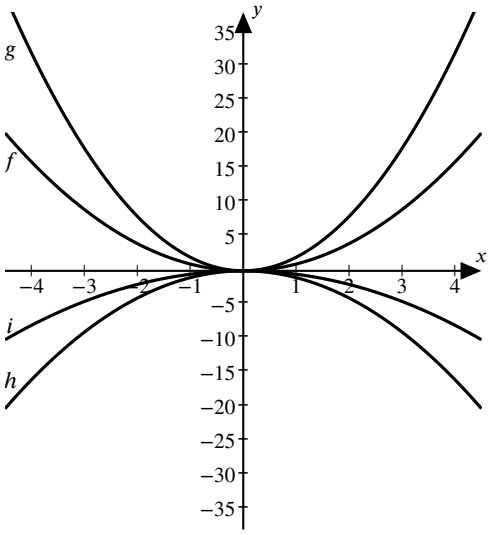
a)



b) Prix d'équilibre : ~ 2,55 CHF/kg
Quantité échangée : ~ 50,45 tonnes.

6.2 Solutions - Fonctions quadratiques

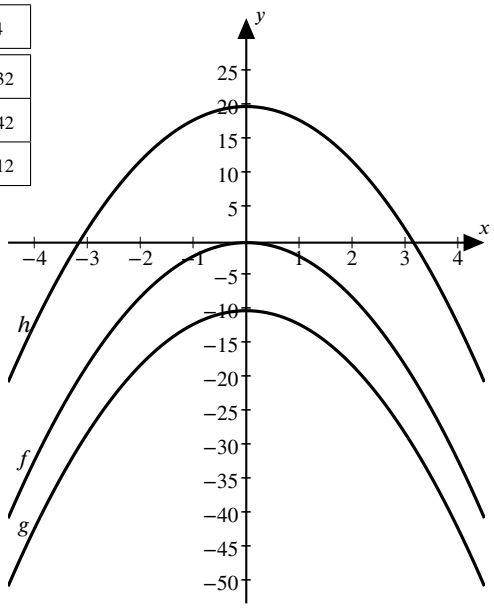
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)=x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$g(x)=2x^2$	32	18	8	2	0	2	8	18	32
$h(x)=-x^2$	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16
$i(x)=-\frac{1}{2}x^2$	-8	$-4{,}5$	-2	$-0{,}5$	0	$-0{,}5$	-2	$-4{,}5$	-8



2.1

- Leur expression est de la forme ax^2. Les coefficients b et c sont nuls.
- Toutes ces paraboles passent par l'origine.
- Elles sont symétriques par rapport à l'axe Oy.
- Si $a > 0$, la parabole « sourit ». si $a < 0$, la parabole est « triste ».
- Faire varier le a change la courbure de la parabole.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)=-2x^2$	-32	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	-32
$g(x)=-2x^2-10$	-42	-28	-18	-12	-10	-12	-18	-28	-42
$h(x)=-2x^2+20$	-12	2	12	18	20	18	12	2	-12



2.2

- $a = -2$ pour toutes les paraboles. Elles sont toutes « tristes ». Elles ont la même courbure.
- Leur expression est de la forme $-2x^2 + c$. Le coefficient b est nul.
- Elles sont symétriques par rapport à l'axe Oy.
- Faire varier c translate verticalement la courbe.
- c est l'ordonnée à l'origine de la parabole.

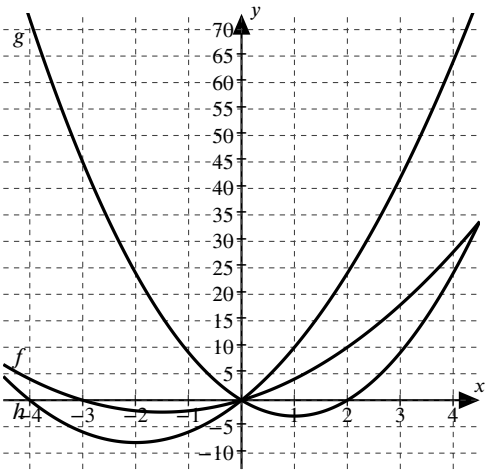
2.3

a) f : 0 et -3 $\quad$ g : 0 et 2
h : 0 et -4

b) 0 et $-\dfrac{b}{a}$

c)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)=x^2+3x$	4	0	-2	-2	0	4	10	18	28
$g(x)=3x^2-6x$	72	45	24	9	0	-3	0	9	24
$h(x)=2x^2+8x$	0	-6	-8	-6	0	10	24	42	64



d) $S_f=(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{9}{4})$; $S_g=(1;-3)$; $S_h=(-2;-8)$

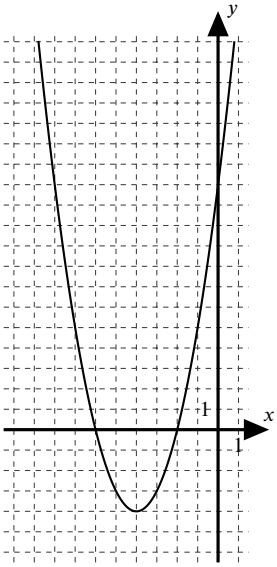
e) La première coordonnée du sommet est la moyenne des 2 zéros, quand ils existent. Ici, cela revient à prendre la moitié du zéro non nul.

f) $-\dfrac{b}{2a}$

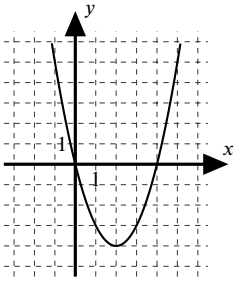
g) On a vu dans l'exercice précédent que changer le c translate verticalement la parabole. Cela ne change donc pas la première coordonnée du sommet. Ainsi, elle sera de $-\dfrac{b}{2a}$, comme à la question précédente.

2.4

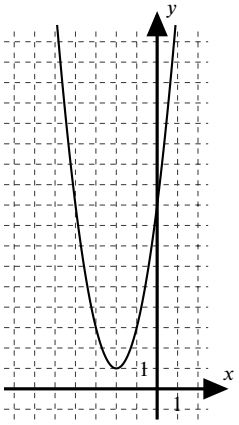
a) O. o. : 12
Zéros : -6 et -2
Sommet : $S(-4;-4)$
Orientation : convexe



b) O. o. : 0
Zéros : 0 et 4
Sommet : $S(2;-4)$
Orientation : convexe

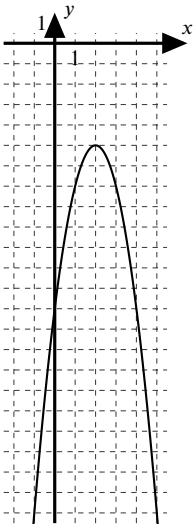


c) O. o. : 9
Zéros : aucun
Sommet : $S(-2;1)$
Orientation : convexe

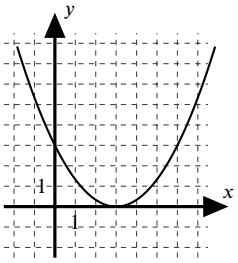


2.4

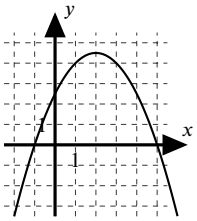
d) O. o. : -13
Zéros : aucun
Sommet : $S(2\,;-5)$
Orientation : concave



e) O. o. : 3
Zéros : 3
Sommet : $S(3\,;0)$
Orientation : convexe



f) O. o. : $\frac{5}{2}$
Zéros : -1 et 5
Sommet : $S\left(2\,;\frac{9}{2}\right)$
Orientation : concave



2.5

a) $(3\,;-2)$ et $(-2\,;18)$

b) $(1\,;8)$ et $\left(\frac{2}{3}\,;7\right)$

c) Aucun point d'intersection.

2.6

a) $(3\,;9)$ et $(5\,;33)$

b) $(6\,;-6)$

c) Aucun point d'intersection

2.7

a) 225.– francs pour un revenu maximal de 1'012'500.– francs.

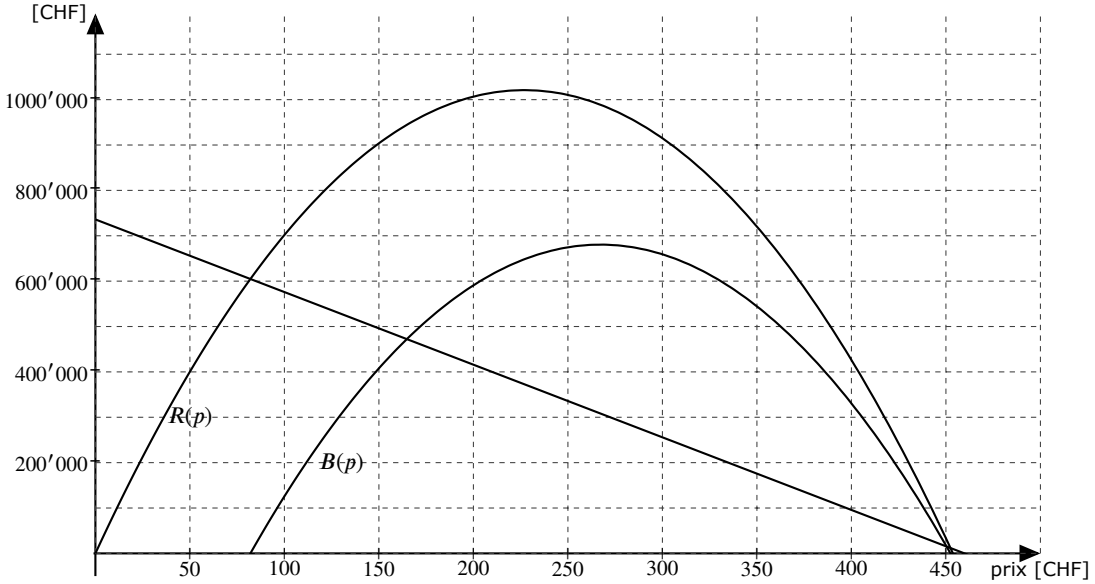
b) 82.175 francs.

c) 447.825 francs.

d) 265.– francs, pour un bénéfice maximal de 668'500.– francs.

$D(p) = 9'000 - 20p$
$R(p) = -20p^2 + 9'000p$

$C(p) = 16'000 + 80(9'000 - 20p) = 736'000 - 1600p$
$B(p) = -20p^2 + 10'600p - 736'000$

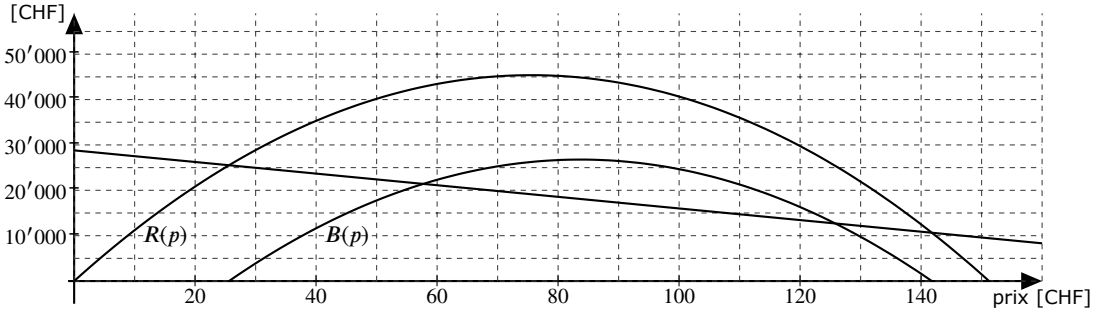


2.8 $B(p) = -200p^2 + 24'000p - 118'800$ Intervalle de rentabilité : de 5,2.– francs à 114,80.– francs.
Prix pour un bénéfice maximal : 60.– francs.

2.9 500.– francs

a) 75.– francs pour un revenu maximal de 45′000.– francs.
b) 25,65 francs.
c) 140,35 francs.
d) 83.– francs, pour un bénéfice maximal de 26′312.– francs.

2.10
$D(p) = 1'200 - 8p$
$R(p) = -8p^2 + 1'200p$
$C(p) = 9600 + 16(1'200 - 8p) = 28'800 - 128p$
$B(p) = -8p^2 + 1328p - 28'800$



2.11 a) 14.– francs b) 40.– francs c) 27.– francs d) 4′225.– francs

2.12 a) 6.– francs b) 90.– francs c) 48.– francs d) 52′920.– francs

2.13 Intervalle de rentabilité : de 10.45 francs à 199.50 francs.
Prix pour un bénéfice maximal : 105.– francs.

2.14 a) Prix de 40.– francs pour un revenu maximal de 24′000.– francs.
b) 18.– francs.
c) 70.– francs.
d) prix de 44.– francs pour un bénéfice maximal de 10′140.– francs.

2.15 a) $R(p) = -28\,p^2 + 3'920\,p$ b) $C(p) = -840\,p + 129'472$ c) 72′828.– francs

6.3 Solutions - Factorisation

3.1
a) $x^5(x+7)(x-7)$
b) $5(y-2)(y-8)$
c) $\frac{1}{8}x^2(x-4)^2$
d) $(14x+1)^2$
e) $-m(m+7)(m-1)$
f) $x^7y^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
g) $\frac{1}{8}(x+2)(x-8)$
h) $-3(c^2+15)$

3.2
a) $10(2x+7)(x-3)$
b) $(5y-2)(5y-8)$
c) $x(2x-5)(3x-1)$
d) $x^3(2x-3)(5x-4)$
e) $(3x+5)^2$
f) $100a^2+9a+1$

3.3
a) $11x^2(x+3)(x-2)$
b) $3(4x-1)(3x-1)$
c) $5y(7x^2+5x+2)$
d) $2x^5(x-12)(x+12)$
e) $-(7c+3)^2$
f) $x^2y^4(3x+5)(x-2)$

3.4

a) $\frac{1}{3}x(x-5)(x+3)$
b) $\frac{1}{2}(x-6)(x-4)$
c) $(\sqrt{7}x+15)(\sqrt{7}x-15)$
d) $(x-12)(2x+1)$
e) $x^5(9x+2)^2$
f) $\frac{1}{6}(x-6)(x-3)$

3.5

a) $x^2-10x+25$
b) $9x^2+42xy+49y^2$
c) $25a^3-16a$
d) $3x^2-15x-150$
e) $4y^4-60y^3+200y^2$
f) $-21x^2+88x-25$
g) $-2x^2+7x+54$
h) $t^3+\frac{22}{3}t^2-28t+3$
i) $t^3+10t^2-9t-90$
j) $t^3+30t^2+300t+1000$

3.6

a) $x^3+12x^2+48x+64$
b) $8x^3-60x^2+150x-125$
c) $1000c^3-300c^2+30c-1$
d) $27x^3+9x^2+x+\frac{1}{27}$
e) $x^3-6x^2+12x-8$
f) $x^6-6x^4+12x^2-8$
g) $x^9+3x^6+3x^3+1$
h) $x^{30}y^{12}+3x^{20}y^8+3x^{10}y^4+1$

3.7

a) $(x+5)(x^2-5x+25)$
b) $(x-5)(x^2+5x+25)$
c) $(2V+T)(4V^2-2VT+T^2)$
d) $(3x-2)(9x^2+6x+4)$
e) $(x+1)^3$
f) $(q-10)^3$

3.8

a) $(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$
b) $x(x+2)(x^2-2x+4)$
c) $(x+1)^2(x^2-x+1)^2$
d) $8(n+1)^3$
e) $(x+1)(x^2-x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)$
f) $x^3(x+3)^3$

3.9

a) $(x+2)(x-2)\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)$
b) $\left(x^2+11\right)\left(2x^2+1\right)$
c) $(3x+2)^2(3x-2)^2$
d) $(z+3)(z-3)\left(z^2+1\right)$
e) $(x+1)(x-1)\left(x^2+9\right)$
f) $\left(x^2+25\right)(x-5)(x+5)$

3.10

a) $a^2(a+5)(a-5)\left(a^2+4\right)$
b) $5(x+3)(x-3)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$
c) $-x^3\left(7x^2+6\right)(x+1)(x-1)$
d) $\left(x^2+9\right)(x-3)(x+3)$
e) $2xy\left(4x^2+25\right)^2$
f) $\frac{1}{7}x^4\left(x^2+7\right)\left(x^2+3\right)$

3.11

a) $25x^2+40x+16$
b) $25x^4+40x^2+16$
c) $25x^6+40x^3+16$
d) z^2-225
e) z^4-225
f) $z^{20}-225$
g) $x^2+19x-66$
h) x^6+19x^3-66

3.12

a) $(x+1)\left(x^2-x+1\right)(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$
b) $(x+1)\left(x^2-x+1\right)(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$
c) $(x+1)\left(x^2-x+1\right)(x-1)\left(x^2+x+1\right)$
d) $x^2(x+5)(x-5)\left(x^2+25\right)$
e) $(x+1)^2\left(x^2-x+1\right)^2$
f) $8\left(n^2+1\right)^3$
g) $(x+1)\left(x^2-x+1\right)(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$
h) $x^3(x+3)^3$

3.13

a) $(x+5)(x^2+3)$
b) $(x+6)(x+2)(x-2)$
c) $(5z-8)(z-1)(z+1)$
d) $(x+8)(x+1)(x^2-x+1)$
e) $(x+1)(x+2)(x^2-2x+4)$
f) $(2w+3)(w-5)(w^2+5w+25)$

3.14

a) $2x(3x-5)(x^2+11)$
b) $-x^3(x+8)(2x+3)(4x^2-6x+9)$
c) $\frac{1}{11}(x+2)(x+11)(x-11)$
d) $10y^2(3y-2)(2y-1)(2y+1)$
e) $5(2x-13)(x+1)(x^2-x+1)$
f) $5(2x+13)(x-1)(x^2+x+1)$

3.15

a) $\mathcal{S}=\left\{-5\right\}$
b) $\mathcal{S}=\left\{-2\,;2\right\}$
c) $\mathcal{S}=\left\{-2\right\}$
d) $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{10}\right\}$
e) $\mathcal{S}=\left\{-5\,;1\right\}$
f) $\mathcal{S}=\left\{0\,;-\frac{1}{6}\,;4\right\}$

3.16

a) $F(x)=(3x^3-2x^2-4x+2)(x-2)+9$
b) $F(x)=(x^2-3x+1)(x-5)$
c) $F(x)=(3x^2-2x+2)(x+2)+4$
d) $F(x)=(x^3+3x^2+x+3)(x-3)+2$

3.17
a) $F(x) = (-x^2 + 2x - 1)(2x - 3) - 4$
b) $F(x) = (-4x^2 - 3x + 2)(4x + 5)$
c) $F(x) = (3x^2 + 7x + 5)(3x - 7) + 9$
d) $F(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1)(2x - 4) - 4$

3.18
a) $F(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 7)(x^2 + 2x - 1) + (20x - 8)$
b) $F(x) = (5x^2 + 3x + 5)(x^2 - 1) + (3x + 4)$
c) $F(x) = (3x^3 + 7x^2 - 5x + 1)(2x^2 - 3x + 2) + (x + 3)$
d) $F(x) = (x^2 - 5x + 6)(3x^2 + 8x + 4)$

3.19 $x^4 + 4x^2 + x - 20$ est la seule possibilité

3.20 $x^3 - 11x + 6$ ou $k(x^3 - 11x + 6)$ pour tout nombre réel $k \neq 0$.

3.21
a.i) oui
a.ii) non
a.iii) non
a.iv) oui
a.v) non
a.vi) oui
a.vii) non
a.viii) non
b) $A(x) = (x^2 + 5x - 4)(x + 2)$ $D(x) = (3x^2 - x + 3)(x + 2)$ $F(x) = (10x^3 + 3x^2 - 3)(x + 2)$

3.22
a.i) oui
a.ii) non
a.iii) oui
a.iv) non
a.v) oui
a.vi) non
b) tous

3.23
a) Zéros : ± 2
b) Zéros : -3 ; -1

3.24
a) $(x - 3)(x + 2)(x + 5)$
b) $(x - 1)(x + 7)(x + 4)$
c) $(2x + 1)(x - 2)(x + 3)$
d) $(x + 3)(x^2 + 4)(x + 4)$

3.25
a) $\mathcal{S} = \left\{-3\,;9\right\}$
b) $\mathcal{S} = \left\{-1\,;-2\,;-3\,;-4\right\}$
c) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}\,;-3\,;2\right\}$
d) $\mathcal{S} = \left\{1\,;-1\,;-11\,;-5\right\}$

3.26
a) $(x - 4)(x + 3)(x + 4)$
b) $(x - 5)(x - 3)(x - 1)$
c) $(x - 3)(x + 4)^2$
d) $(x - 4)(x - 3)(x - 2)$
e) $(x - 2)(x + 3)(x^2 + x + 1)$
f) $(x + 1)(5x + 1)(7x + 1)$

3.27
a) $x(x - 8)(x + 8)$
b) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$
c) $(x^2 + 8)(x + \sqrt{8})(x - \sqrt{8})$
d) $(x + 8)(x^2 + 8)$
e) $(x^2 + 8)^2$
f) $(x + 8)(x + 2)(x + 4)$
g) $x(x + 8)(3x - 8)$
h) $(x + 16)(x - 2)(x + 2)$

6.4 Solutions - Fractions rationnelles

4.1
a) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
b) $\mathrm{D}_g = \mathbb{R}^* \setminus \left\{-\frac{4}{7}\right\}$
c) $\mathrm{D}_h = \mathbb{R}$
d) $\mathrm{D}_i = \mathbb{R}$
e) $\mathrm{D}_j = \mathbb{R} \setminus \{9\,;-1\}$
f) $\mathrm{D}_k = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;3\,;-4\}$
g) $\mathrm{D}_l = \mathbb{R}^*$
h) $\mathrm{D}_m = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\,;-\frac{4}{3}\,;-1\right\}$

4.2
a) $\frac{1}{5x}$
b) $\frac{x - 2}{x + 2}$
c) $\frac{x + 1}{x - 1}$
d) $\frac{3(x + 5)}{7(x^2 + 4)}$
e) $\frac{2(x + 3)}{3x^4}$
f) $-\frac{3x^4}{2y^5}$

4.3

a) $3y$

b) -1

c) $\dfrac{1}{(x-2)^2}$

d) $\dfrac{(3x+1)(x-2)}{2x-5}$

e) $\dfrac{x^2-10x+100}{(x-10)(x+10)}$

f) $\dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

4.4

a) $\dfrac{3}{x(x+1)}$

b) $\dfrac{(x+2)(x+1)(x-1)}{2x}$

c) $\dfrac{x+1}{(x^2+1)(x^2+3x+9)}$

d) $\dfrac{x}{7}$

e) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{2(x+2)}$

f) $\dfrac{1}{2}$

4.5

a) $\dfrac{x+1}{2}$

b) $\dfrac{3}{x(x^2+x+1)}$

c) $\dfrac{(x-1)^2}{2(x+3)(x-3)^2}$

d) $x-1$

4.6

a) $\dfrac{25x+8}{(2x-3)(x+5)}$

b) $\dfrac{2x^2-200}{(x-2)(x+14)} = \dfrac{2(x+10)(x-10)}{(x-2)(x+14)}$

c) $\dfrac{2x+2}{x^2-1} = \dfrac{2}{x-1}$

d) $\dfrac{x^2+7x+10}{(x+2)^2} = \dfrac{x+5}{x+2}$

e) $\dfrac{2x^2-8}{x(x-2)} = \dfrac{2(x+2)}{x}$

f) $\dfrac{x^2+13x}{(x+1)(x+2)(x-2)} = \dfrac{x(x+13)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$

4.7

a) $\dfrac{3(x+10)}{(x+3)}$

b) $\dfrac{4x+26}{(x+2)(x-7)} = \dfrac{2(x+13)}{(x+2)(x-7)}$

c) $\dfrac{-2x^2-2x}{3(x+2)(x-2)} = \dfrac{-2x(x+1)}{3(x+2)(x-2)}$

d) $\dfrac{x+7}{x(x-1)(x+7)} = \dfrac{1}{x(x-1)}$

e) $\dfrac{x^2+7x+6}{(x+1)(x-2)(x+2)} = \dfrac{x+6}{(x-2)(x+2)}$

f) $\dfrac{x^2-2x}{x^2(x-2)(x+1)} = \dfrac{1}{x(x+1)}$

4.8

a) $\dfrac{x^2-25}{(x+5)(x-5)} = 1$

b) $\dfrac{5x+15}{(x+2)(x+3)(x+4)} = \dfrac{5}{(x+2)(x+4)}$

4.9

a) $\dfrac{1}{2x}$

b) $\dfrac{2x+7}{x-5}$

c) $\dfrac{2(x-5)}{3x(x+5)(x^2-2x+4)}$

d) $\dfrac{(1-x)}{x(x+1)}$

e) $\dfrac{x^2+9x+10}{2(x+2)}$

f) $\dfrac{1}{x+1}$

g) x

h) $\dfrac{2(x-5)}{3(x+2)(x-2)}$

i) $\dfrac{(x+1)^2}{x+4}$

j) $\dfrac{1-x}{x(x+1)}$

4.10

a) $\dfrac{-3x+3}{2x} = 0$
$\mathcal{S} = \{1\}$

b) $\dfrac{x^2+2x-15}{(x-3)(x+3)} = 0$
$\mathcal{S} = \{-5\}$

c) $\dfrac{x-2}{x-3} = 0$
$\mathcal{S} = \{2\}$

d) $\dfrac{x^2+2x-3}{(x+2)(x-1)} = 0$
$\mathcal{S} = \{-3\}$

e) $\dfrac{2x^2+1}{(x+2)(x-1)} = 0$
$\mathcal{S} = \varnothing$

f) $\dfrac{5x-5}{x(x-1)} = 0$
$\mathcal{S} = \varnothing$

4.11

a) $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{1}{4}\right\}$

b) $\dfrac{(7x-3)(x-4)}{x(1-x)} = 0$
$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{7}\,;4\right\}$

c) $\dfrac{19x+23}{5(2x-1)} = 0$
$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{23}{19}\right\}$

d) $\dfrac{x^2-7x-30}{6x(x+5)} = 0$
$\mathcal{S} = \{-3\,;10\}$

e) $\dfrac{-2x+4}{x(x-3)} = 0$
$\mathcal{S} = \{2\}$

f) $\dfrac{-23x^2+42x-16}{3(2x-1)(x-1)} = 0$
$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{21-\sqrt{73}}{23}\,;\dfrac{21+\sqrt{73}}{23}\right\}$

4.12 24 places à CHF 28.– pièce

4.13 6 enfants qui reçoivent CHF $12'000.-$ chacun et 8 petits-enfants qui reçoivent chacun CHF $9'000.-$.

4.14 22 participants qui paieront CHF $660.-$ chacun.

4.15 14 poules à CHF $15.-$ chacune.

Références

[1] S. Amaudruz : Cours et exercices. Gymnase de Bugon.
[2] H. Bovet : Diplôme 1D. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2008.
[3] C.-A. Chevalley : Calculs pour l'économie. DFJC Vaud, 2009.
[4] J.-P. Favre : Mathématiques pour la Matu pro. Promath Editions, 2019.
[5] O. Isely : Cours et exercices. Gymnase d'Yverdon.
[6] M.-A. Jaquemet et N. Lakehal : Cours et exercices. Gymnase de Beaulieu.
[7] J.-P. Javet : Cours et exercices. Gymnase de Morges.
[8] J.-P. Javet : Mathématiques 2EC. http://www.gymomath.ch, 2020.
[9] O. Kruger et A. Schenkel : Cours et exercices. Gymnase de Beaulieu et du Bugon.
[10] K. Studer et P. Frommenwiler : Mathématiques pour la maturité. Algèbre et analyse de données. Cornelsen Schweiz, 2014.

Nous tenons à remercier notre collègue Emmanuelle Vlcek pour son travail de relecture et pour ses commentaires constructifs qui ont permis d'améliorer cette brochure.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch
sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 3 juillet 2026